This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Math 322 (c)

Digitized by Google

Math. 322c

Math. 322c

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK

900000066849

Digitized by Google

THEORIA MOTVS CORPORVM SOLIDORVM SEV RIGIDORVM

EX

PRIMIS NOSTRAE COGNITIONIS PRINCIPIIS

STABILITA

ET AD OMNES MOTVS,

QVI IN HVIVSMODI CORPORA CADERE POSSVNT,

ACCOMMODATA.

AVCTORE

LEONH. EVLERO

ACADEMIAE REGIAE SCIENT. BORVSSICAE DIRECTORE

ACADEMIAE IMPER. PETROPOL. SOCIO HONORARIO

ET ACADEMIARVM SCIENT. REGIARVM PARISINAE

ET LONDINENSIS MEMBRO.

ROSTOCHII ET GRYPHISWALDIAE

LITTERIS ET IMPENSIS A. F. RÖSE. MDCCLXV.

Digitized by Google

Digitized by Google

PRAEFATIO.

Quae ſint VIRI PERILLVSTRIS, LEONHARDI EVLERI in univerſam Matheſin merita, longa hic enumerare oratione, ac imprimis eum, in quo edendo curam & operam poſui, de motu corporum rigidorum tractatum, multis commendare verbis, licet haud incongruum nec a ſcopo prologi alienum eſſe videatur; ſuperſedere tamen hoc negotio me poſſe arbitror, cum tanta & tot eximia PERILL. AVCTORIS inventa, quibus omnes fere Matheſeos partes ad ſummum extulit perfectionis faſtigium, per univerſum orbem eruditum celebratiſſima omnem exſuperent laudem. In eo itaque ſolo occupatus ero, ut brevibus integri hujus operis ſummam recenſeam, ac ea praecipue capita ſuccinctius exponam,

Digitized by Google

ponam, quae lectori in evolvendo hoc ſcripto ac ratiociniorum filo detegendo utilia eſſe ac operam ſublevare poſſe mihi viſa ſunt.

Corporis finitae extenſionis motus non innoteſcit, niſi ſingularum ipſius particularum motu determinato. Haec cauſſa eſt, cur principia motus corporum, ut puncta conſideratorum, abſtrahendo ab eorundem extenſione, prius ſint ſtabilienda, quam negotium leges motus corporum finitae magnitudinis evolvendi ſuſcipi queat. Explicata jam eſt theoria de motu punctorum a CEL. EVLERO in *Mechanicæ ſive motus ſcientiae analytice expoſitae* Tomo I. & II. quod opus abſolutiſſimum A. 1736 Petropoli ex typographia Academiae ſcientiarum prodiit. Promiſerat ſimul CLAR. AVCTOR, operi huic ſubjungere tractatum de motu corporum finitorum & primo quidem rigidorum, pari methodo conſcribendum. Ac licet hoc argumentum tam arduum & antehac tam parum tractatum maximis implicatum inveniſſet difficultatibus; felici tamen ſucceſſu tandem omnia vicit impedimenta ac prorſus novam fere elaboravit ſcientiam, cujus principia, qualiacunque licet antea fuerint cognita, ad tantam ab ipſo promota ſunt univerſalitatem, ut nihil amplius in hac Mechanices parte deſiderandum reliquerit. Quin quod vix expectandum erat, abſtruſiſſima haec inventa mira expoſuit evidentia non tantum ſed & perſpicuitate, ita ut Artis peritis non tantum aditus ad myſteria in hoc libro recondita pateat, ſed & idem opus iis erudiendis inſervire queat, qui in analyſi jam

ſatis

Digitized by Google

ſatis exercitati Mechanices ſtudio primam admovent manum. In horum praecipue gratiam hic tractatus non tantum inſtar Tomi III. Mechanices duobus jam tomis comprehenſae conſcriptus eſt; ſed ſimul praemiſſa eſt a CELEB. AVCTORE *Introductio*, univerſae Mechanices fundamenta, prima nimirum de motu punctorum principia, methodo plane nova, priore faciliori concinniori & evidentiori ſiſtens evoluta. Integrum itaque opus perluſtrari poteſt ſine ullo ſubſidio principiorum in prioribus de Mechanica libris expoſitorum, quorum tamen lectio ideo non negligenda, ſed potius omnibus commendanda eſt, qui principiorum de motu punctorum generalium applicationem ad ſolutiones problematum ſpecialium ſibi reddere cupiunt familiarem. Sed operae pretium eſſe arbitror, ut ſuccinctius exponam, quae ſit methodi in Introductione huic operi praemiſſa uſurpatae a methodo priorum de Mechanica librorum differentia.

Effectus potentiarum, quibus mobile ſollicitatur, alias duobus principiis comprehendi ſolet, quorum altero definitur, quantum celeritas mobilis immutetur, altero autem, quantum ejus directio inflectatur. Eandem methodum effectus virium exprimendi ſecutus eſt CEL. AVCTOR in prioribus libris de Mechanica, ſicque omnes quaeſtiones de motu punctorum felici ſucceſſu dedit ſolutas. Quando autem corporum finitorum motus perpenditur; binorum iſtorum principiorum adplicatio plurimis ſubjecta eſt difficultatibus, atque haec cauſſa fuit, cur loco binorum iſtorum principiorum jam

Digitized by Google

non niſi unico, aequatione $dc = npdt:M$ comprehenſo, utatur in hoc de motu corporum rigidorum tractatu, admiſſo ſimul hoc artificio, ut motus ſecundum datas directiones reſolvatur, ad easdemque directiones reſolutio virium ſollicitantium inſtituatur, ubi cognitio celeritatum lateralium ſimul motus directionem atque inflexionem in ſe complectitur. Methodus haec nititur more in Geometria uſitato naturam linearum curvarum per binas vel ternas coordinatas exprimendi. Verum cum in Geometria etiam ſaepe lineae curvae ad punctum aliquod fixum referuntur non ſine egregio calculi compendio; eodem quoque modo motus evolutio explicatur, idque non ſolum, cum motus in eodem abſolvitur plano, ſed etiam, ſi mobile extra planum vagatur. Hoc modo uti ſolent Aſtronomi, dum motus planetarum reſpectu alicujus puncti per angulos circa id deſcriptos diſtantiasque ab eodem definiunt, ubi ſi motus non fiat in eodem plano, inſuper lineam nodorum cum inclinatione orbitae ad certum planum contemplantur. Quare cum hoc quoque in prioribus libris deſiderari poſſit, quod ea methodus, qua nunc quidem corporum coeleſtium motus ad calculum revocari ſolent, ibi non ſit expoſita, ea in hoc opere accuratius explicata legitur. Quod denique adtinet ad modum, aequationes motum corporum definientes ad menſuras abſolutas revocandi, hic quoque commodiore uſus eſt CEL. AVCTOR, quam in praecedentibus libris, ubi quidem celeritates per radicem quadratam ex altitudinibus, per quas grave cadendo pares acquireret

Digitized by Google

quireret celeritates, exprimebantur, quo nimirum efficitur, ut in formula generali $dc = npdt:M$ conſtanti n valor $\frac{1}{2}$ tribuendus ſit. Verum ex altitudine celeritati debita ipſa celeritas non tam perſpicue cognoſcitur, ſed calculo quodam opus eſt, ut ad menſuras ſolitas reducatur. Deinde etiam temporis ratio peculiari calculo eget, quo nova quaedam unitas in calculum introduci debet, ut tempus in minutis ſecundis eliciatur. Quod ſi vero, uti alias commodiſſime fieri ſolet, celeritates per ſpatium uno minuto ſecundo uniformiter percurſum, & tempora in minutis ſecundis exprimantur; eadem experimenta, quibus ſuperior modus conſtantem n definiendi innititur, oſtendunt, eſſe hunc numerum n aequalem duplae altitudini, ex qua grave primo minuto ſecundo libere delabitur. Quare relicta priore methodo haud paucas ambages evitavit PERILL. AVCTOR, hoc ultimo modo multo faciliore & ſimpliciore in Introductione expoſito, & in toto ſequente opere retento.

Expoſitis hisce principiis generalibus tranſit CLAR. AVCTOR ad motus corporum finitae extenſionis conſiderandos, & quidem ejusmodi corporum, quorum ſtructura partiumque nexus a viribus ſollicitantibus non mutari poteſt, quae rigidorum nomine ab aliis diſtinguuntur, quorum ſtructura tot roboris non habet, ut virium ſollicitantium actioni reſiſtere valeat. Partes itaque talismodi corporis easdem perpetuo durante motu a ſe invicem diſtantias ſervant, nec corpus rigidum alium motum recipere poteſt, niſi quo haec con-

Digitized by Google

conditio ſalva manet: alias ad aliam corporum claſſem eſſet referendum, quorum motus hic non definitur. Nihilo tamen minus ejusmodi corpus infinitorum motuum eſt capax. Inter omnes hos motus is eſt ſimpliciſſimus, quo ſingula corporis puncta ſecundum directiones inter ſe parallelas paribus celeritatibus quovis temporis momento promoventur, qui motus *progreſſivus purus* dici ſolet. Hic motus tanquam ſimpliciſſimus, cujus omnia corpora ſunt capacia, primus erat conſiderandus. Servat corpus, cui ſemel ejusmodi motus eſt impreſſus, eundem non tantum ob inertiam, ſed motus quoque progreſſivus purus non turbatur, ſi corporis tali motu lati ſingula elementa viribus, quae maſſis eorum ſunt proportionales, ſecundum directiones inter ſe parallelas ſollicitentur. Tum vero ſi corpus ſit rigidum aſſignari poteſt unica vis omnibus illis aequivalens, cujus directio per centrum gravitatis ſeu inertiae tranſit. Unde viciſſim, ſi corpori rigido in centro inertiae applicata fuerit vis quaecunque, ea quaſi per omnia corporis elementa maſſis proportionaliter diſtributa conſiderari poterit, atque ob aequivalentiam effectus in motu turbando erunt aequales. Haec ſunt, quae Capite I. fuſius demonſtrantur. Ubi inprimis notari meretur, quod per principia hic ſtabilita, omnia, quae de motu punctorum in prioribus de Mechanica libris ſunt tradita, pro motu progreſſivo corporum rigidorum valeant. Quae itaque cum in ſe nimis ſterilia multis videri poſſent, nunc ampliſſimum uſum habebunt, cum eo univerſum genus motuum pro-

Digitized by Google

progreſſivorum ſit referendum. Praeterea dum corpora rigida ejusmodi viribus ſollicitata moventur, eorum compages ſatis firma eſſe oportet, ne in figura ſua mutationem patiantur. Ideo, quantam vim compages corporis a viribus ſollicitantibus ſuſtineat, ſimul erat definiendum.

Corporum rigidorum finitae magnitudinis perinde ac corpuſculorum infinite parvorum motus duplici modo eſt tractandus, prout fuerit vel liber, vel ob externa impedimenta reſtrictus. Neque vero hanc inveſtigationem ita ſuſcipere licet, ut ſepoſitis omnibus motus obſtaculis omnia motus liberi genera, quorum corpora rigida capacia ſunt, ad calculum revocentur. Corpus enim libere motum praeter motum progreſſivum purum infinitis modis motus gyratorios recipere poteſt, cujusmodi motus complicati ante evolvi prorſus nequeunt, quam motus gyratorii circa axes fixos ſunt definiti: tum enim demum ad motus gyratorios circa axes mobiles, ac porro ad motus liberos in genere progredi licet. Expedito itaque motu progreſſivo puro corpora rigida extrinſecus ita reſtricta contemplatur PERILL. AVCTOR, ut certum tantum motus genus recipere poſſint, quod fit dum ab aliqua cauſſa externa duo corporis puncta fixa retinentur. Hoc caſu corpus rigidum circa lineam rectam per haec puncta tranſeuntem, cum ipſo firmiter connexam, *motu gyratorio* fertur, quare ipſa haec recta *axis gyrationis* vocatur. Sex Capitibus a IIdo ad VIImum hos motus gyratorios contemplatus eſt CLAR. AVCTOR. Stabilita notione

Digitized by Google

& menſura celeritatis angularis primo definivit motus gyratorii a nullis viribus turbati continuationem, inveſtigat vires, non tantum quas axis ſuſtinet, ſeu quae adhiberi debent, ut axis in ſitu ſuo conſervetur, ſed & quas corporis compages ſuſtinet, & quibus mutuus partium nexus reſiſtere debet. Poſthaec CLAR. AVCTOR tranſit ad effectus virium quarumcunque in motu circa axem fixum generando. Ac quidem primo motus tantum initium contemplatur, qui corpori rigido circa axem fixum mobili a viribus quibuscunque imprimitur, quo facilius ſolus virium effectus a motu jam infito ſeparatus perſpiceretur, atque hinc ad ſequentes inveſtigationes ſubſidia peti queant, quando, dum corpus circa quempiam axem gyratur, vires adſunt, id circa alium axem convertere conantes: tum enim ex effectu momentaneo circa hunc axem producto judicare licet, quomodo motus praecedens turbetur. Poſtea quoque corpus rigidum in motu circa axem fixum conſiderat & ſcrutatur, quomodo is a viribus quibuscunque immutari debeat. Utraque inveſtigatio ſimul conjuncta eſt cum determinatione virium, quas ipſa corporis compages, & praeterea earum praecipue, quas axis ſuſtinet, quibus itaque ſuſtentari debet, ne de ſitu ſuo deturbetur. Haec ultima quaeſtio de viribus, quas axis ſuſtinet, adhuc minus ſtudioſe eſt tractata. Quare cum ea maximi ſit momenti, hocque non ſolum ut intelligatur, quantis viribus opus ſit, ad axem in ſitu ſuo retinendum, ſed praeſertim ut in motu corporum rigidorum libero dijudicari

Digitized by Google

dicari poſſit, quibusnam caſibus axis nullas plane vires ſuſtinet; CEL. AVCTOR omni cura hoc argumentum luculenter & diſtincte evolutum dedit.

Univerſae hujus theoriae de motu corporum rigidorum circa axem fixum ſummam, quod ad variationem hujus motus a viribus productam adtinet, complectitur aequatio $d\omega = \frac{2Vfgdt}{\int rrdM}$, in qua denotat ω celeritatem angularem, Vf momentum vis ſollicitantis, g altitudinem ex qua grave primo minuto ſecundo libere delabitur, $\int rrdM$ ſummam omnium productorum, quae oriuntur, ſi ſingula corporis elementa per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe multiplicentur. Formula haec ſimillima eſt ei, qua variatio motus progreſſivi exprimitur, nimirum iſti alias dudum cognitae $dc = \frac{2gpdt}{M}$. Quemadmodum enim ſecundum hanc formulam eſt incrementum celeritatis motus progreſſivi ut vis ſollicitans diviſa per maſſam ſeu inertiam; ita in motu gyratorio eſt incrementum celeritatis angularis proportionale momento vis ſollicitantis diviſo per quantitatem $\int rrdM$, ſeu per ſummam omnium productorum ex quovis elemento maſſae in quadratum diſtantiae ſuae ab axe gyrationis. Quare cum loco vis ſollicitantis pro motu gyratorio ejus momentum conſiderari debeat, & quantitas $\int rrdM$ loco maſſae ſeu inertiae ſpectanda, ipſa haec quantitas $\int rrdM$ nomine *momenti inertiae* commode inſignitur, ita ut incrementum celeritatis angularis proportionale fiat momento vis ſollicitantis diviſo per momentum

Digitized by Google

inertiae. Similitudo utriusque formulae eo eſt perfectior, quod utrinque per elementum temporis *dt* & duplam altitudinem *2g* multiplicari oporteat, ut ipſum celeritatis incrementum exprimatur. Ad motum igitur gyratorium definiendum prae omnibus noſſe oportet momentum inertiae reſpectu axis gyrationis. Patet autem, cum poſitio axis gyrationis reſpectu corporis in infinitum variari poſſit, ejusdem corporis infinita diverſa dari momenta inertiae, prout ad alium atque alium axem referatur, ut ideo hujus momenti inertiae inveſtigatio opus maxime laborioſum eſſe videatur. Aſt vero CLAR. AVCTOR peculiari utitur artificio, cujus ope ſatis concinna methodo pro quovis corpore & pro dato in eodem axe momentum inertiae reſpectu illius axis indagari poteſt. Fuſius haec omnia explicantur in Cap. V. ubi iſta maxime notatu digna proprietas corporum demonſtratur: dari in quovis corpore tres axes, quorum reſpectu momentum inertiae ſit vel maximum vel minimum, hosque axes ſeſe invicem in centro inertiae ad angulos rectos ſecare, ita ut quivis plano duorum reliquorum ſit perpendicularis. Ob inſignem hanc proprietatem tres illos axes *principales* vocat CLAR. AVCTOR, atque tum explicat modum, quomodo ex momentis inertiae reſpectu trium axium principalium absque prolixo calculo momentum inertiae ejusdem corporis reſpectu alius cujuscunque axis per ejus centrum inertiae tranſeuntis, hincque porro quoque reſpectu aliorum omnium illi parallelorum aſſignari poſſit. Hocque modo inventio momenti inertiae,

Digitized by Google

inertiae, quae initio pro quovis corpore quaſi infinita videri poſſet, mirifice in compendium redigitur. Secundum hanc methodum ſequenti Cap. VI. CEL. AVCTOR momenta inertiae pro praecipuis corporum & quidem homogeneorum ſpeciebus evoluta dedit, ut quoties uſus poſtulat inde deſumi queant. Praecipuus caſus, ad quem theoria de motu corporum rigidorum circa axem fixum accommodari ſolet, eſt motus oſcillatorius corporum gravium, quare omnia, quae huc ſpectant, problemata de centro oſcillationis in pendulis compoſitis Cap. VII. reſoluta ſunt, hisque tractatio de motu circa axem fixum gyratorio finitur.

Reſtat vero jam praecipuum totius operis argumentum, theoria ſcilicet de motu libero corporis rigidi a viribus quibuscunque ſollicitati, in qua enodanda Summus EVLERVS tanta praeſtitit, quanta in re tam ardua expectari vix poterant. Quomodocunque motus corporis fuerit perturbatus, is ſemper pro quovis temporis momento reſolvi poteſt in binos motus, quorum alter ſit progreſſivus, ex motu centri inertiae dijudicandus, alter gyratorius circa quempiam axem per centrum inertiae ductum: effectus vero virium momentaneus duabus hisce rebus continetur: primo variatione motus centri inertiae tam ratione celeritatis, quam ratione directionis: ſecundo variatione motus gyratorii & quidem tam ratione celeritatis angularis, quam ratione poſitionis ipſius axis gyrationis. Ex his dijudicari quodammodo licet, generalem problematis, de motu libero corporis rigidi a viri-

Digitized by Google

bus quibuscunque ſollicitati determinando, ſolutionem haud exiguis premi difficultatibus. Ut itaque lector eo clariorem omnium elementorum ſolutionem problematis ingredientium cognitionem conſequatur, per gradus quaſi a caſibus ſpecialibus ad generaliora, ab his demum ad univerſalem problematis generaliſſimo ſenſu concepti ſolutionem adſcendit AVCTOR. Caſus motus gyratorii liberi ſimpliciſſimus is eſt, qui Cap. VIII. evolvitur, quo nimirum corpus circa ejusmodi axem gyrari concipitur, qui nullas ob motum vires ſuſtinet. Vocantur axes corporis *liberi*, qui iſta proprietate ſunt praediti. In quolibet corpore libero tres ſaltem dantur axes gyrationis liberi, ſuntque iſti axes iidem cum illis axibus principalibus, quorum reſpectu momentum inertiae corporis eſt vel maximum vel minimum. Licet alias jam conſiderati ſint a Mechanicae Scriptoribus ejusmodi axes per centrum inertiae tranſeuntes, circa quos corpus libere gyrari poſſit, ſi nimirum momenta virium centrifugarum ex motu gyratorio natarum ſeſe mutuo deſtruant; valde tamen dubito, an ante EVLERVM, hanc proprietatem corporum univerſalem eſſe, quod in quolibet corpore *tres* certe dentur axes gyrationis liberi, quis unquam invenerit, ſi PERILL. DN. DE SEGNER excipiam, qui eandem proprietatem omnibus corporibus competentem demonſtravit in Programmate ſub titulo: *Specimen Theoriae turbinum*, Halae A. 1755. promulgato. Quemadmodum vero in quovis corpore rigido centrum inertiae eſt punctum maxime memorabile, cujus

ratio

Digitized by Google

ratio per universam Mechanicam latissime patet; ita axes principales, qui simul sunt axes gyrationis liberi, in quovis corpore non minus sunt notatu digni, cum iis universa doctrina de motu corporum libero innitatur. Trium momentorum inertiae corporis, quae sunt maxima vel minima, duo esse possunt aequalia, quod accidit in omnibus solidis tornatis homogeneis, quin fieri potest, ut omnia sint aequalia, veluti in sphaera. Si momenta inertiae respectu duorum axium principalium sunt aequalia, respectu reliquorum omnium in plano eorundem axium aequalium sitorum momenta inertiae sunt aequalia. Ac in corpore cujus tria momenta inertiae principalia sunt aequalia, reliqua omnia aequantur. Prouti igitur duobus vel tribus axibus principalibus paribus praedita sint corpora, vel tribus axibus principalibus disparibus gaudeant; quoad cognitionem mechanicam maxime notatu digna inter eadem intercedit differentia. Cum vero quodvis corpus tribus ad minimum axibus principalibus seu liberis sit praeditum; omne corpus quoque ejusmodi motus est capax, vi cujus circa talem axem liberum uniformiter gyratur, & quidem vel circa axem quiescentem, si centrum inertiae corporis quiescat, vel circa axem motu sibi semper parallelo uniformiter in directum progredientem, qui motus tum *mixtus* est ex progressivo & simplici gyratorio. Ac si praeterea corpus ab ejusmodi viribus sollicitetur, quae vel ipsi centro inertiae sint applicatae, vel quarum directiones cadunt in planum ad axem normale per centrum inertiae ductum,

Digitized by Google

ductum, istae vires vel solum motum progressivum vel simul gyratorium turbabunt, ita tamen, ut axis situm sibi parallelum perpetuo servet. Reliquae vires omnes axeos situm simul turbabunt, atque hic est casus, quo principia Mechanicae huc usque cognita haud erant sufficientia ad continuationem motus determinandum. Jam itaque CLAR. AVCTOR. Cap. IX. & X. problema de corporis rigidi a viribus quibuscunque sollicitati motu generatim determinando adgreditur, ubi quidem primo Cap. IX. corpus rigidum in quiete considerat, & dum a viribus quibuscunque sollicitatur, primam motus generationem investigare conatur: deinde vero Cap. X. eum considerat casum omnium difficillimum, quo corpus jam in motu versatur, ac circa axem per centrum inertiae transeuntem gyratur, qui vero a viribus sollicitantibus continuo variatur. Ratiociniorum nexum, quibus CLAR. AVCTOR in evolvendis hisce quaestionibus usus est, brevibus recensebo.

Quotcunque fuerint vires corpus rigidum sollicitantes, & quomodocunque fuerint applicatae, eae semper ad duas revocari possunt, quarum altera per ipsum centrum inertiae corporis transeat. Ast vero si cognitus fuerit effectus duarum virium junctim agentium in motu generando, quarum altera ipsi centro inertiae est applicata, alterius etiam seorsim agentis effectus innotescit. Quodsi itaque quaestio est de prima motus generatione determinando, quando corpus rigidum quiescens & liberum a viribus quibuscunque sollicitatur,

Digitized by Google

tatur, hae vires ad binas revocentur, quarum altera ipſi centro inertiae ſit applicata, tumque cum hujus effectus ſit determinatu facillimus, totum negotium eo redit, ut effectus ab unica quacunque vi productus definiatur. Quod ſi minus ſucceſſerit, cum ea vi, alia quaecunque centro inertiae applicata, combinetur, ac ſi effectus inde junctim productus aſſignari poterit, totum negotium erit confectum. His poſitis primo inveſtigatur, quomodo duae hujusmodi vires comparatae eſſe debeant, ut ab iis corpori motus circa datum axem per ejus centrum inertiae tranſeuntem imprimatur; tum vero exinde viciſſim colligitur poſitio axis, circa quem corpus rigidum quieſcens primum gyrari incipit, reſpectu trium axium principalium corporis, una cum angulo elementari primo tempuſculo producto, ſi a vi quacunque ſollicitetur, eique ſimul in centro inertiae vis aequalis & contraria fuerit applicata. Effectus quidem idem produceretur a viribus ſollicitantibus, etiamſi corpus in motu verſetur: verum ob hujus motus admixtionem difficilius cognoſci poterit. Si enim corpus jam circa alium axem gyratur, ac nunc incitatur, non ſolum celeritas angularis, ſed etiam ipſe axis gyrationis mutabitur, ita ut nunc circa alium axem per centrum inertiae tranſeuntem gyrari incipiat. Quare jam in id incumbendum erat, ut iſta axis gyrationis variatio & quidem momentanea a viribus producta formulis analyticis expreſſa quaeratur, ubi demum ex cognita mutatione elementari ad ipſam motus determinationem per calculum integralem

Digitized by Google

tranſeundum erit. Reſolvenda igitur erat quaeſtio: ſi data ſit poſitio axis gyrationis corporis moti reſpectu trium axium principalium corporis, isque a viribus ſollicitantibus varietur, ut corpus elapſo tempuſculo elementari circa alium axem gyretur, quomodo definienda ſit poſitio hujus axis variati reſpectu axium principalium. Cognitis jam viribus, quibus corpus dum circa quempiam axem gyratur, ſollicitatur, is axis, circa quem quieſcens gyrari inciperet definiri: tum vero variatio in axe gyrationis ob motum facta explorari poterit. Verum niſi corpus primo circa axem quempiam principalem gyretur, praeter vires externas, quibus corpus forte ſollicitatur, imprimis eae vires, quae ex ipſo motu gyratorio ejusque vi centrifuga naſcuntur, perpendi, & in calculum introduci debent, ideo iſtae vires ex ipſo motu gyratorio natae ſollicite erant inveſtigandae. Si enim axis gyrationis non ſit principalis, etiamſi nullae vires extrinſecus urgerent, tamen axis parallelismus conſervari non poſſet, quoniam vires centrifugae ad axem deflectendum tendunt. Inventis his viribus ex motu gyratorio ipſo ad eum turbandum natis, cum his combinatis viribus externis corpus ſollicitantibus methodo ſupra deſcripta definiri poterat variatio momentanea tam in ipſo axe quam in celeritate angulari inde orta. Ipſum modum procedendi & calculum dirigendi explicat Problema 67. Licet itaque ſic totum negotium abſolutum eſſe cenſeri poſſet; tamen reſtat aliud argumentum prorſus non negligendum. Cognita enim variatione tam cele-

Digitized by Google

celeritatis angularis, quam axis gyrationis positione respectu trium axium principalium corporis ad quodvis temporis momentum; nondum tamen liquet, quem situm corpus respectu spatii absoluti teneat. Cum enim iste situs corporis labente tempore continuo varietur, etiam haec quaestio prioribus adjungenda erat: Si ad datum tempus cognitus sit situs corporis rigidi circa quempiam axem per ejus centrum inertiae transeuntem gyrantis, atque tam axis gyrationis, quam celeritas angularis utcunque varietur, quomodo invenienda sit mutatio momentanea in corporis situ orta. Hoc demum problemate resoluto, universa theoria de motu corporum rigidorum absoluta est censenda, tumque quodvis problema mechanicum, utcunque complicatum sit, aequationibus fundamentalibus, ex ipsius conditionibus secundum stabilita principia deductis, calculi integralis ope complete erit resolvendum.

Exposita sic theoria generali de modo singulas motus corporum rigidorum variationes aequationibus analyticis exprimendi, CEL. AVCTOR adgreditur applicationem principiorum ab ipso stabilitorum ad casus speciales in mundo obvios, ita quidem, ut primo, a viribus externis sollicitantibus abstrahendo, corpora sibi relicta tantum contempletur, ac constitutis tribus corporum generibus, ex indole axium principalium petitis, tribus quoque Capitibus XI. XII. XIII. motum evolvat corporum rigidorum, primo ternis axibus principalibus paribus, deinde duobus tantum paribus, ac deni-

Digitized by Google

que tertio ternis axibus principalibus disparibus praeditorum, & a nullis viribus sollicitatorum. Statim ab initio hujus tractationis demonstrat CLAR. AVCTOR illud, quod per universam mechanicam maximi est momenti, principium: quomodocunque corpus rigidum moveatur, ejus motum quovis momento compositum seu mixtum concipi posse ex motu progressivo centri inertiae & ex gyratorio circa axem aliquem per ejus centrum inertiae transeuntem. Remotis jam viribus sollicitantibus externis, determinatio motus corporum primi generis nulla laborat difficultate, cum circa nullum axem gyrari queant, qui non axis principalis proprietate gaudeat, unde nullae omnino vires ex ipso motu gyratorio ad motum turbandum ortum trahere possunt. Quaestio de motus corporum secundi generis continuatione determinanda calculum quidem requirit quodammodo complicatiorem; nihilo tamen minus ejusmodi corporum motus in genere determinare atque ad quosvis casus accommodare docet CEL. AVCTOR, ita ut perfecta & omnibus numeris absoluta sit hujus problematis solutio. Explicat simul CLAR. AVCTOR, quomodo motus hujusmodi corporum reduci queat ad duplicem gyratorium, unum nimirum circa axem *mobilem* (a motu circa axem *variabilem* sollicite distinguendum) qua corpus circa ipsum axem principalem singularem aequabiliter gyratur, dum secundo ipse hic axis circa polos extra corpus fixos circumfertur pariter motu uniformi. Tertiae classis corporum motus longe complicatior est, ac aequationum differentialium

dalium, variationem momentaneam hujus motus definientium, integratio maxima premitur difficultate, Aequatio differentialis celeritatis angularis variationem exprimens licet ad ſeparationem variabilium reduci queat, pauciſſimis tamen caſibus exceptis, receptas expreſſiones arcuum circularium vel logarithmorum reſpuit. Huic quidem incommodo aliqua ratione medelam affert CEL. AVCTOR, loco celeritatis angularis introducendo aliam variabilem, a qua celeritas angularis pendeat: nihilo tamen ſecius nova aequatio differentialis inde orta ita eſt comparata, ut non niſi per arcus ſectionum conicarum ejus integratio expediri queat, unde nec ullum commodum ad calculum proſequendum redundat, nec ad datum tempus celeritas angularis colligi poteſt. Quare cum formulae ſitum axis gyrationis reſpectu axium principalium definientes a celeritate angulari pendeant, univerſalis problematis ſolutio a ſubſidiis analyticis expectari nequit. Explicatis itaque caſibus quibusdam ſpecialibus perfectam ſolutionem admittentibus, ut quodammodo aeſtimare liceat, quales hic motus ſit futurus, ad ſubſidium quoddam mechanicum confugit CEL. AVCTOR, motum ſcilicet penduli per circulum; ac conceſſa motus determinatione, quo corpus grave in peripheria circuli vel oſcillando vel revolvendo movetur, ad quodvis tempus determinare docet poſitionem axis gyrationis reſpectu axium principalium. Aſt vero jam reſtabat alterum problematis reſolvendi momentum, determinatio ſcilicet ſitus axium principalium

Digitized by Google

reſpectu ſpatii abſoluti. Non minores in hoc negotio expediendo, ac ante, occurrunt difficultates, cum res ad ejusmodi aequationes differentiales reducatur, quae non ſolum non integrari, ſed ne ad ſeparabilitatem quidem variabilium revocari poſſe, ipſo EVLERO ab initio viſa ſunt, unde hujus problematis ſolutionem in §. 761. ad finem perducere non potuit. Poſtea vero artificia invenit ingenioſiſſima, quorum ope harum aequationum integratio abſolvi poterat, eaque in Supplemento in fine adjecto explicata leguntur.

Expoſitis ſic, quae ad motum corporum rigidorum liberum, remotis viribus externis, pertinent, ordo poſtulabat, ut principia ſupra ſtabilita ad eos quoque caſus applicarentur, quibus vires externae corpus ſollicitantes ejus motum perturbant. Primo itaque tractandam elegit CEL. AVCTOR theoriam turbinum, cujus explicatio ob continuam axis gyrationis variationem adhuc maximis tenebris fuit involuta. Quod argumentum ut initio a gravioribus difficultatibus liberetur, axis turbinis ſuper plano horizontali politiſſimo incedere aſſumitur, ne frictioni ullus locus relinquatur, tum vero axis infra in cuſpidem deſinens ſtatuitur, qua ſuper plano horizontali ingrediatur. Cumque duo genera turbinum conſtituenda ſint, prout vel omnia ejus momenta inertiae principalia fuerint inter ſe aequalia, vel duo duntaxat; illud genus primo loco Cap. XIV. calculo ſubjicitur. Inventa itaque primo via a centro inertiae turbinis deſcripta, determinata inſuper ſecundum principia ſupra ſtabilita variatione momentanea

Digitized by Google

mentanea non tantum in axe gyrationis & celeritate angulari producta, ſed & in ſitu turbinis reſpectu ſpatii abſoluti orta, generalis ſolutio problematis de motu & ſitu turbinis ad quodvis tempus aſſignando tentatur, ubi vero iterum adeo complicatae prodeunt aequationes differentiales, ut earum integratio nec algebraice nec per logarithmos vel arcus circulares expediri poſſit. Longe majores praevidere poterat difficultates CEL. AVCTOR, ſi in turbine non omnia momenta inter ſe aequalia ſtatuerentur, quare id argumentum nondum attingit, ſed potius ipſam theoriam generalem de motu corporum rigidorum a viribus quibuscunque ſollicitatorum denuo tractandam ſuſcipit, & quidem methodo prorſus nova, priore longe perfectiore & ad uſum magis accommodata. Methodum Cap. IX. & X. expoſitam nimis eſſe operoſam compertus eſt CEL. AVCTOR, ſi inde effectus virium quarumcunque ſit definiendus, dum primo axis, circa quem vires corpus, ſi quieſceret, convertere inciperent, definiri, tum vero hinc variatio axis, circa quem corpus actu gyratur, & celeritas angularis determinari oporteat. Negari quoque non poteſt, nec ipſe CLAR. AVCTOR diffitetur, methodum, qua Cap. X. momentaneae axis mutationes eliciuntur, ea non gaudere evidentia, ut ab omnibus dubiis ſat expedite liberari queat, quam Artis periti contra eandem movere poſſent. His adeo praegnantibus rationibus commotus ingenioſiſſimus AVCTOR idem problema in Cap. XV. quod in integro opere eſt maxime notatu dignum, de novo pertractare voluit,

Digitized by Google

voluit, ita ut ex hactenus allatis nihil in ſubſidium vocaverit, ſed non niſi primis mechanicae principiis utatur, quo effecit, ut omnia hic evadant maxime perſpicua. Statim quidem hoc faciliori modo uti potuiſſet CLAR. AVCTOR, ſicque non leves difficultates in ſuperiori tractatione occurrentes evitaviſſet: verum in argumento adhuc tam parum tractato haud incongruum erat, methodum operoſiorem & prolixiorem praemittere, quo ſingulae notiones in re pene nova animo firmius imprimantur, ipſaeque difficultates, quibus haec pars Mechanicae involuta videbatur, luculentius perſpiciantur. Inſuper haud parum intereſt, noſſe viam, qua incedentes Auctores novis Artibus condendis aut inſigniter promovendis operam navarunt, licet poſtea praeſtantiores methodi vel ab ipſis vel ab aliis detegantur. Mira facilitate ac evidentia hanc novam methodum ex primis & ab omnibus conceſſis motus principiis derivavit CEL. AVCTOR, atque ob ſummam ſolutionis univerſalitatem, in eadem jam omnia continentur, quae Cap. IX. & X. per multas ambages magno labore erant evoluta. Supra, dum corpus quieſcit, axis, circa quem ipſi vires primum motum gyratorium imprimunt, vehementer operoſe determinabatur; iſta vero determinatio inſtar Corollarii ex nova hac problematis ſolutione ſponte fluit. Deinde etiam hic planiſſima fiunt, quae de variatione momentanea motus gyratorii, dum corpus a nullis viribus ſollicitatum circa axem non principalem gyratur, per nimis intricata ratiocinia tandem inventa

Digitized by Google

venta erant. Quae autem ſupra vix attingi poterant, cum corpus inſuper a viribus quibuscunque ſollicitatur, hic pari facilitate eodemque labore feliciter expediuntur, ita ut hac nova methodo a primis motus principiis derivata univerſam theoriam motus corporum rigidorum perfecte condidiſſe cenſendus ſit CEL. AVCTOR. Accedit, quod ipſa haec nova & univerſalis hujus problematis ſolutio formularum, quae ſuperiori methodo quodammodo dubia, ſaltem non prorſus evidenti, nitebantur, veritatem pleniſſime confirmet, cum omnes iſtae formulae jam ex univerſali ſolutione corollariorum inſtar nullo negotio deriventur. Cum denique haec praecepta pro motu corporum rigidorum determinando latiſſime pateant, ea non ad motum liberum ſolum adſtricta ſunt. Quomodocunque enim corporum rigidorum motus compeſcitur, ſive ſuper plano quodam, ſive juxta alia corpora incedere cogantur, ſive quodpiam eorum punctum fixum retineatur, quaeſtio ſemper ad tradita praecepta reduci poteſt.

Ad utriusque igitur generis motus, tam liberos, quam reſtrictos in ſequentibus Capitibus ab AVCTORE noſtro facta eſt applicatio. Graviſſima ejus generis quaeſtio, qua corpus motu libero, tam progreſſivo, quam gyratorio, circa axem variabilem latum a viribus externis ſollicitatur, circa motum vertiginis corporum coeleſtium verſatur. Eam ob cauſſam hoc argumentum in Cap. XVI. generatim ita pertractatur, ut in Aſtronomiam inde haud contemnenda incrementa re-

Digitized by Google

dundent; cum motus lunae libratorius, praeceſſio aequinoctiorum, & nutatio axeos terrae principalia ſint hujus Capitis objecta. Excipit hanc tractationem plenior explicatio motus turbinum ſuper plano horizontali, ſemota frictione. Et cum ſupra tantum ejusmodi turbines ſint conſiderati, in quibus omnia momenta inertiae inter ſe ſunt aequalia, quae conditio nimium erat limitata, nunc motus turbinum in genere exploratur, poſitis tantum duobus momentis inertiae principalibus inter ſe aequalibus, quae conditio cum indole turbinum neceſſario conjuncta videtur. Cum turbo ſit corpus cuſpide ſuper plano horizontali incedens, ita ut cuſpis ſit quaſi baſis ipſius cenſenda, hinc ad alia corporum genera ducitur CEL. AVCTOR, quae baſi quacunque ſuper plano incedant. Nimias autem ambages, quae in calculos inextricabiles perducerent, evitaturus, duo tantum corporum genera, cylindrica ſcilicet ac ſphaerica potiſſimum evolvit, quorum nimirum figura externa, qua plano applicantur, ſit vel cylindrica vel ſphaerica, quomodocunque materia intrinſecus fuerit diſtributa. Ad genus itaque cylindricum referuntur ea pendula, quae non ab axe lineari ſunt ſuſpenſa, ſed axiculis cylindricis utrinque plano horizontali incumbunt. Huc quoque refertur, ac ideo ſimul inveſtigatur motus vacillatorius, motui cunarum reciproco ſimilis. Ad genus praeterea ſphaericum pertinent turbines, quorum axes infra non in cuſpidem, ſed quaſi in haemiſphaerium deſinunt. Ab omnibus ejusmodi motibus, quibus corpus in ſuperficie alterius incedit,

Digitized by Google

incedit, frictio est inseparabilis. Quare ut tractatio de ejusmodi motibus eo majorem in praxi habere possit usum, ultimo loco peculiaris tractatus de motu corporum rigidorum a frictione perturbato adnexus est. Explicata itaque frictionis natura in genere, & modo frictionem in calculum introducendi generatim evoluto, perpendet CEL. AVCTOR motus gravium progressivos a frictione impeditos, motus gyratorios corporum gravium circa axem fixum a frictione retardatos, quorsum pertinent motus pendulorum ab axiculis cylindricis suspensorum, motus praeterea turbinum in cuspidem desinentium super plano horizontali, frictionis habita ratione, ac denique motus globorum centrum inertiae in ipsorum centro situm habentium super plano horizontali.

Haec erant, quae de praestantissimi hujus operis argumento praefationis loco praemittenda esse putavi. De eo quidem persuasus sum, L. B. etiam absque hac praliminari recensione ab EVLERO haud vulgares expectasse investigationes. Nihilo tamen secius haud incongruum mihi visum est, de iis saltem in antecessum aliquid in medium proferre, quae in hoc opere vel prorsus nova sunt, vel nova saltem methodo exposita, & quibus scientia mechanica maximi ponderis augmenta adsecuta est censenda. Mechanicam corporum rigidorum ad tantum perfectionis gradum in hoc tractatu perduxit Ill. AVCTOR, ut plura expectari non possint, nec debeant. Quomodunque enim problema de motu corporis rigidi definiendo fuerit complicatum, secundum principia stabilita sem-

Digitized by Google

per erui poſſunt aequationes fundamentales, motus variationes elementares definientes. Quodſi itaque accidat, ut aequationes differentiales, ex conditionibus problematis deductae, integrari nequeant; tum non Mechanicae, ſed potius Analyſeos defectui tribuendum eſt, quod plena problematis ſolutio dari nequeat. Una cum EVLERO noſtro Magnus Galliae Geometra, ILL. D'ALEMBERT, in enodandum generale de motu corporum rigidorum problema parem operam contulit. In praeſtantiſſimo *de praeceſſione aequinoctiorum & nutatione axeos terrae* tractatu, A. 1749. Pariſiis gallico idiomate edito, expoſita leguntur omnia, quae ad problematis noſtri ſolutionem generalem inveniendam conducere poſſunt principia. Ac EVLERVS noſter, poſtquam ejusdem de praeceſſione aequinoctiorum & nutatione axeos terrae problematis ſolutionem ſuo more evolutam dederat in Hiſtoriae Academiae Regiae Berolinenſis Tom. V. pro A. 1749. qui Tomus A. 1751 prodiit, in Tomo VI. ſequente PERILLUSTRI D'ALEMBERT cedit gloriam debitam, qui arduam hanc de aequinoctiorum praeceſſione & axeos terrae nutatione quaeſtionem primus dedit reſolutam. Poſtea vero EVLERVS noſter problematis de motu corporum rigidorum generaliſſime concepti reſolutionem inveſtigavit in Hiſtoriae Academiae Berolinenſis Tomo VI. ad A. 1750. edito demum A. 1752. Sed methodus, qua tunc temporis uſus eſt CEL. AVCTOR, ad multo majorem ab ipſo perducta eſt perfectionem, poſt inſignem de tribus axibus corporum principalibus proprietatem a SEGNERO dete-

Digitized by Google

detectam, ab ipso vero Auctore nostro ad usus mechanicos felicissimo successu ulterius applicatam. Quod in applicatione ad problema de motu vertiginis terrae jam investigaverat, id in Opusculis Mathematicis Parisiis A. 1761. gall. id. editis denuo in generalissimo sensu conceptum problema enodavit Cel. D'ALEMBERT, & quidem in prioris Tomi *Commentatione secunda: de motu corporis cujuscunque figurae a viribus quibuscunque sollicitati.* Hanc commentationem CEL. D'ALEMBERT Auctori nostro, cum in elaborando hoc opere occupatus esset, cognitam non fuisse, ideo pro certo evincere possum, quia opus EVLERI nostri jam A. 1760. consummatum & a CEL. AVCTORE initio A. 1761. ad me transmissum erat, prouti de eo testatur schedula jam A. 1761. impressa, qua institutum Dni. Roese de excudendo hoc opere indicebatur. Ipsa etiam methodus, qua CEL. D'ALEMBERT usus est, adeo differt ab EVLERIANA, ut ne minima suspicio oriri queat, unum Auctorem alterius opus in subsidium vocasse. Sic iterum Germania de novae scientiae inventore certare potest cum Gallia, prouti alias de Calculi differentialis inventore cum Anglia certavit. Quivis horum primae magnitudinis Geometrarum peculiari usus est methodo ac propriis inveniendi artificiis, quae vero methodus alteri palmam praeripiat, quaestio est, quam sublimiorum hujusmodi scientiarum maxime peritis decidendam relinquo.

Si interest reipublicae litterariae, ut posteris conserventur scripta Auctorum, qui, novis Artibus condendis aut insigniter

Digitized by Google

amplificandis ſcientiis, promeritam adſecuti ſunt gloriam; omnem ſane laudem meretur Illuſtr. Acad. Gryph. bibliopola & typograph. A. F. RÖSE, quod operam & impenſas excudendo huic praebere voluit operi, prae multis immortalitate digno. Verendum eſt, ne poſteri incuriam noſtri ſeculi indignentur, cum & alia ſcriptis mandaverit doctrinae ſuae monumenta Summus noſter EVLERVS, ob ſumtuum ad ea typis mandanda neceſſariorum defectum hactenus inedita, inter quae eminet de calculo integrali opus abſolutiſſimum. Non poſſum non exſcribere hic verba, quibus rei hujus mentionem fecerunt Auctores diarii litter. Gryphisw. A. 1763. p. 98. *Wir wiſſen, daſs Herrn Eulers Integralrechnung zum Druck bereit lieget, und nur auf einen Verleger wartet. Wenn unſre Nachkommen wiſſen könnten, daſs bey uns jährlich eine ſolche Menge ſchlechter Schriften gedruckt und verkauft werden könnte, ſo würde es ihnen keine groſſe Idee von der Aufklärung unſrer Zeiten und der Unterſtützung, welche den Wiſſenſchaften wiederfähret, machen, wenn ſie leſen, daſs ein Werk, das für die Welt und alle Zeiten geſchrieben iſt, aus Mangel eines Verlegers ungedruckt lieget*

Caeterum, ut emendate prodiret opus, omni qua potui providi diligentia. Quae interim oculorum aciem fugerunt, vel operariorum culpa admiſſa ſunt menda, ad calcem libri, ea ſaltem, quae ſenſum turbare poſſunt, ſunt adnotata, quae igitur B. L. operis lectionem inchoaturus tollat, officioſiſſime rogo. Scrib. Bützovii menſe Martio MDCCLXV.

WENCESL. JOH. GVSTAVUS KARSTEN.
Phil. D. et Math. P. P. O.

INDEX

Digitized by Google

INDEX CAPITVM.

INTRODVCTIO

CONTINENS ILLVSTRATIONES ET ADDITIONES NECESSARIAS DE MOTV PVNCTORVM.

CAP. I. Consideratio motus in genere Pag. 2
CAP. II. De internis motus principiis 29
CAP. III. De causſis motus externis seu viribus 44
CAP. IV. De mensuris absolutis ex lapsu gravium petitis 68
CAP. V. De motu absoluto corpusculorum a viribus quibuscunque actorum 76
CAP. VI. De motu respectivo corpusculorum, a viribus quibuscunque sollicitatorum 93

TRACTATVS

DE MOTV CORPORVM RIGIDORVM.

CAP. I. De motu progressivo corporum rigidorum. 105
CAP. II. De motu gyratorio circa axem fixum a nullis viribus turbato 122
CAP. III. De motus gyratorii generatione 137
CAP. IV. De perturbatione motus gyratorii a viribus quibuscunque orta 157
CAP. V. De momento inertiae. 166
CAP. VI. Investigatio momenti inertiae in corporibus homogeneis 184
CAP. VII. De motu oscillatorio corporum gravium 204
CAP. VIII. De axe gyrationis libero motuque corporum rigidorum circa tales axes 224
CAP. IX. De prima motus generatione in corporibus rigidis. 238
CAP. X. De variatione momentanea axis gyrationis a viribus producta 255

CAP.

Digitized by Google

CAP. XI. De motu libero corporum rigidorum ternis axibus principalibus paribus praeditorum & a nullis viribus sollicitatorum 275

CAP. XII. De motu libero corporum rigidorum duobus axibus principalibus paribus praeditorum & nullis viribus sollicitat. 283

CAP. XIII. De motu libero corporum rigidorum ternis axibus principalibus disparibus praeditorum & nullis viribus sollicitat. 298

CAP. XIV. De motu turbinum super plano horizontali, in quibus omnia momenta inertiae sunt inter se aequalia 321

CAP. XV. De motu libero corporum rigidorum a viribus quibuscunque sollicitatorum 333

CAP. XVI. De motu gyratorio seu vertiginis corpor. coelestium 352

CAP. XVII. Plenior explicatio motus turbinum super plano horizontali, semota frictione 375

CAP. XVIII. De motu corporum basi sphaerica praeditorum super plano horizontali 395

CAP. XIX. De motu corporum cylindricorum super plano horizontali. 425

SVPPLEMENTVM I.

DE MOTV CORPORVM RIGIDORVM A FRICTIONE PERTVRBATO.

CAP. I. De frictione in genere 449

CAP. II. De motu progressivo corporum gravium a frictione impedito 457

CAP. III. De motu gyratorio corporum gravium circa axem fixum a frictione retardato 464

CAP. IV. De motu turbinum in cuspidem desinentium super plano horizontali, frictionis habita ratione 482

CAP. V. De motu globorum centrum inertiae in ipsorum centro situm habentium super plano horizontali. 489

INTRO-

Digitized by Google

INTRODUCTIO
CONTINENS
ILLUSTRATIONES ET ADDITIONES
NECESSARIAS
DE
MOTU PUNCTORUM

Digitized by Google

Digitized by Google

CAPUT I.
CONSIDERATIO MOTUS IN GENERE.

DEFINITIO. 1.

1.

Quemadmodum *Quies* et perpetua in eodem loco permanentia: ita *Motus* est continua loci mutatio. *Corpus scilicet, quod semper in eodem loco hærere observatur, quiescere dicitur: quod autem labente tempore in alia atque alia loca succedit, id moveri dicitur.*

EXPLICATIO. 1.

2. Quanquam notiones quietis et motus in se planissimæ videntur, tamen quo accuratiorem earum cognitionem acquiramus, singulas, quibus constant, ideas attentius considerari convenit. Ac primo quidem occurrit idea loci: quid autem sit locus? haud facile declaratur. Qui spatium immensum imaginantur, in quo totus mundus versetur, ejus partes a corporibus occupatas horum loca appellant, ob extensionem enim quodque corpus parem spatii partem occupet, et quasi impleat, necesse est. Verum hujus ipsius spatii notionem nos nonnisi per abstractionem concipimus, dum mente omnia corpora tollentes, id quod residuum fore arbitramur, spatii nomine appellamus: sublatis scilicet corporibus eorum adhuc extensionem residuam fore putamus; qui conceptus a Philosophis multis argumentis impugnari solet. Neque etiam hæc ipsa quæ-

Digitized by Google

ſtio, niſi ante jam adæquata motus idea fuerit ſtabilita, dirimi poſſe videtur. A principio certe hujusmodi lubricas abſtractiones repudiantes, rem prouti in ſenſus immediate incurrit, perpendere debemus, quos conſulentes de loco cujuspiam corporis aliter judicare non licet, niſi id ad alia corpora circumjacentia referendo, quorum reſpectu, quam diu, id eundem ſitum ſervaverit, id in eodem loco perſeverare, ſin autem in alium ſitum pervenerit, locum mutaſſe pronunciare ſolemus.

EXPLICATIO. 2.

3. Cum autem ſitum corporis reſpectu aliorum circumjacentium aeſtimamus, dum hæc inter ſe eundem ſitum ſervent, judicium noſtrum utpote geometricis quaſi ideis innixum fallax eſſe nequit. Determinatur enim ſitus per diſtantias ab aliquot punctis diverſis, neque unum vel etiam duo puncta ad hoc ſufficiunt. Nam ſi dicam punctum O a puncto A intervallo $= a$ diſtare, ſitus puncti O minime determinatur. Sed univerſa ſuperficies ſphaerica circa centrum A radio $= a$ deſcripta relinquitur, in cujus ſingulis punctis punctum O æque ineſſe poſſet, quorum nullum præ reliquis hoc modo ipſi pro loco, ubi exiſtat, aſſignatur. Sin autem dicam, punctum O a puncto A intervallo $= a$, ab alia puncto B vero intervallo $= b$ diſtare; concipiatur ſuperficies ſphærica circa A radio $= a$, ſimulque alia circa B radio $= b$ deſcripta; et quia interſectio harum ſuperficierum eſt circulus, hujus ſingula puncta ita erunt comparata, ut a puncto A intervallo $= a$, a puncto B vero intervallo $= b$ diſtent. Certum ergo erit, punctum O in peripheria hujus circuli exiſtere, et ubi revera exiſtat, non definitur. Ponamus igitur, dari inſuper puncti O diſtantiam a tertio quodam puncto C, quæ ſit $= c$, neque hoc tertium punctum C cum duobus ſuperioribus in directum jaceat, et cum ſperficies ſphærica circa C radio $= c$ deſcripta ſuperiorem circulum duobus adhuc punctis ſecet, etiam nunc dubitamus, in utro eorum punctum O exiſtat; veruntamen inter duo tantum puncta ancipites hæremus. Hinc concludimus, ſi puncti O diſtantias a quaternis punctis A, B, C, D, non in eodem plano ſitis noverimus, ejus ſitum plane determinari; plerumque vero etiam tria ſufficiunt, quando ſcilicet aliunde alterum duorum illorum punctorum, quæ æque ſatisfaciunt, excluditur.

SCHOLION.

4. Cum hæc ſitus cujusque puncti determinatio ſit geometrica, nulli prorſus dubio eſt ſubjecta: unde ab ea conſiderationes de quiete

Digitized by Google

et motu exordiemur. Quæ autem hic de ſitu punctorum ſunt obſervata, facile ad quævis corpora accommodantur, quoniam idea quietis vel motus in corporibus locum non habet; niſi quatenus ſingulis ejus punctis tribuitur. Neque enim, quæcumque etiam idea quietis ac motus ſtatuatur, ea ſubito de corpore quodam univerſo prædicari poteſt, cum fieri poſſit, ut in corpore alia puncta quiescant alia vero magis minusve moveantur. Atque hanc ob cauſam omnino neceſſe eſt, ut veram quietis motusve in dolem primo tantum in punctis inveſtigemus. Neque tamen ideo hæc conſideratio tanquam imaginaria eſt ſpectanda, propterea quod punctorum conceptus ſit mere abſtractus, quibus nonnulli etiam dubitarunt motum vel quietem adſcribere. Verum, quicquid ſit de hac controverſia, neceſſario concedendum eſt, ſi corpus vel quiescat vel moveatur, puncta in eo concipi poſſe, quæ vel quiescent vel movebuntur: neque hic intereſt, utrum talia puncta pro corporum elementis haberi queant nec ne? Nihil quoque obſtat, quominus quis ut lubuerit loco horum punctorum vera corporum elementa, ſive ſint infinite parva, ſive ſaltim quam minima ſubſtituere velit: res enim omnino eodem redibit, neque hinc nullum dubium naſci poteſt. Simili modo ea puncta A, B, C, D ad quae ſitum puncti O retuli, realitati minime repugnant, cum ſint termini in veris corporibus exiſtentes, a quibus diſtantiæ menſurentur. Niſi quis exiſtentiam corporum prorſus negaverit, cum quo nobis diſputatio foret nulla, hujusmodi conceptus ad ſublevandum inveſtigationis negotium minime improbare poterit.

DEFINITIO. 2.

5. Dum quatuor plurave puncta easdem inter ſe ſervant diſtantias, ſi punctum aliquod O ab piis perpetuo maneat æquidiſtans, eorum reſpectu quiescere dicitur: propterea quod eorum reſpectu eundem ſitum conſervat.

COROLL. 1.

6. Si A ſit corpus ſolidum figuram ſuam conſtanter ſervans, in eo, quantumvis fuerit parvum, non ſolum quatuor, ſed quam plurima concipere licet puncta, quæ inter ſe easdem perpetuo teneant diſtantias.

COROLL. 2.

7. Quare ſi punctum O reſpectu iſtius corporis A eundem ſitum ſervet, quod fit, ſi ab omnibus ejus punctis perpetuo æque

Digitized by Google

maneat remotum, tum punctum O respectu corporis A quiescere dicitur.

COROLL. 3.

8. En ergo realem quietis definitionem nullis ideis vagis seu imaginariis implicatam, quæ autem conjuncta est cum idea cujuspiam corporis, cujus respectu punctum O quiescere dicitur: neque patet, quid sit quies absolute sic dicta separata a talis corporis notione.

EXPLICATIO. 1.

9 Verum hic in limine Mechanicæ ne solliciti quidem esse debemus de quiete absoluta, quae an sit et qualis, etiam nunc prorsus ignoramus, in id tantum inquirentes, quid sensus nobis ostendant. Ubicunque autem nobis de quiete est sermo, semper nostra idea conjuncta est cum corpore quopiam, cujus respectu corpus vel potius punctum quiescere dicamus. Ita navigantibus corpora, quæ respectu navis eundem situm retinent, quiescere dicuntur, æque ac nos in continenti versantes corporibus, respectu soli eundem situm tenentibus, quietem tribuere solemus. Neque illi magis falli sunt putandi, quod navis moveatur, cum etiam universam tellurem moveri Astronomi statuant. In idea enim quietis hic stabilita, minime curamus, utrum corpus illud, cujus respectu quietem asserimus, quiescat, an moveatur. Quamdiu enim punctum O respectu corporis A eundem situm conservat, id hujus respectu quiescere pronunciamus, neque quicquam ultra hac locutione innuimus. Nova plane futura esset quaestio de quiete vel motu ipsius corporis A aliunde dijudicanda, quae ad illam definitionem nihil conferret. Ita in navi, quicquid ejus respectu eundem situm servat, ejus quoque respectu quiescit, nihilque interest, utrum ipsa navis quiescat, an moveatur.

EXPLICATIO. 2.

10. Idea igitur quietis hic tradita inter relationes est referenda, cum non ex sola conditione puncti O, cui tribuitur, desumatur, sed ejus cum alio quodam corpore externo A comparatio instituatur: ex quo si nobis unquam nosse liceat, an detur quies absoluta et quid sit? distinctionis causa hanc, quam definivimus, quietem respectivam appellemus. Atque hinc statim patet, fieri posse, ut idem punctum, quod respectu corporis A quiescat, respectu aliorum corporum non quiescat, sed adeo varie moveatur. Quemadmodum corpus in navi quiescens

Digitized by Google

cens respectu solis vel aliorum corporum coelestium aliter atque aliter movetur. Unde patet, illa quietis vel motus prædicata in ipso corpore vel puncto O nihil mutare, cum omnia ei simul convenire queant, prout ad alia atque alia corpora referatur.

SCHOLION.

11. Hæc omnia simili modo de idea loci sunt intelligenda; cum enim quies sit permanentia in eodem loco, ut hæc definitio quoque ad quietem respectivam pateat, punctum O, quod respectu corporis A quiescere dicitur, ejus quoque respectu in eodem loco perseverare dicendum est. Quia igitur in eodem situ respectu corporis A manet, idem locus conveniat cum eodem situ necesse est. Hæc autem loci idea perinde ac quietis est respectiva, ita ut locus respectivus sit certus ac determinatus quidem situs respectu cujusdam corporis. Utrum detur alia magis naturalis loci idea, adhuc ignoramus; cujusmodi siquidem detur, is locus absolutus vocetur. Loco quidem respectivo, prouti eum his definivimus, immobilitas, ut vulgo fieri solet, tribui nequit; si enim corpus, cujus respectu erat descriptus, ipsum promoveatur, locus cum ipso progredi censendus est. Sin autem cui videantur ea corpora absolute quiescere, quæ respectu stellarum fixarum eundem locum retineant, ei locus absolutus erit certus ac determinatus situs respectu stellarum fixarum. Num autem relatio ad stellas fixas naturæ rei magis sit consentanea, quam relatio ad alia quævis corpora? hic etiamnum in dubio relinquere cogimur.

DEFINITIO. 3.

12. Si punctum O respectu alicujus corporis A, quod figuram conservat immutatam, situm suum continuo mutet, id respectu corporis A moveri dicitur.

Evidens est, figuram corporis A invariabilem assumi debere, ut quaterna puncta in eo concepta, ad quæ punctum O refertur, inter se easdem distantias servent.

COROLL. 1.

13. Quæ de quiete respectiva diximus, facile ad motum respectivum transferuntur; quando enim punctum O respectu corporis A eundem servat situm quiescere, quando autem ejus respectu situm continuo mutat, moveri respective dicitur.

COROLL.

Digitized by Google

COROLL. 2.

14. Simul vero patet, fieri posse, ut idem punctum O, quod respectu corporis A quiescat, respectu alius corporis B moveatur. Unde hæc idea tam motus quam quietis est relativa, neque quicquam in ipso puncto O mutat.

COROLL. 3.

15. Motus igitur et quies nomine tantum, non vero re ipsa sibi opponuntur, cum utrumque simul eidem puncto, prout cum alio atque alio corpore conferatur, tribui possit. Neque motus a quiete aliter differt, atque alius motus ab alio.

COROLL. 4.

16. Motus itaque et quies perperam inter affectiones corporum numerantur, quandoquidem dum affectio cujuspiam rei mutatur, ipsa res mutationem passa sit censenda: cum contra corpori, sive ei motus sive quies tribuatur, nulla mutatio obveniat.

EXPLICATIO. 1.

17. Cadit ergo celebris illa distinctio inter motum et quietem, quam Philosophi tanquam maxime essentialem corporibus prædicare solent: si quidem rem de motu et quiete respectiva intelligimus. Verum objicient, rem longe aliter se habere, si de motu et quiete absoluta loquamur: quid autem sit motus absolutus et quies absoluta non satis definiunt. Si velint has denominationes ex relatione ad stellas fixas petendas esse, nihilominus tam motus quam quies erunt respectivi, neque a nostris definitionibus recedunt, nisi quod aliud ac determinatum corpus indicent, ad quod relatio sit instituenda, unde quid in ipsum corpus, quod eo refertur, redundet, nondum apparet. Ceterum minime nego, ullum esse discrimen, inter motum et quietem, vel inter corpus motum et quiescens, cum potius in eo definiendo tota Mechanica sit occupata: sed id jure equidem nego, motum et quietem ullam internam corporis mutationem involvere. Ad quod ergo prædicamentorum genus referri debeant quies et motus, Philosophi viderint, qualitates certe minime vocari possunt; nihil autem prohibet, has res inter relationes numerare, quandoquidem utcunque eadem res cum aliis aliisque objectis comparetur, ejus indoles interna nullam mutationem subit.

EXPLI-

Digitized by Google

EXPLICATIO. 2.

18. Cum loci ideam definiverim, prout eam quidem ſenſuum judicium ſuppeditat, idea nunc quoque temporis, quæ in notione quietis ac motus implicatur, occurrit. Dum enim quies perpetua in eodem loco *permanentia* dicitur, hoc ipſum *perpetuum* vel *permanens* ſine temporis notione intelligi nequit. Verum motus idea temporis notionem magis evolutam poſtulat, ex qua etiam diviſio temporis in partes ſive æquales ſive inæquales percipi queat. Dum enim punctum O ſitum reſpectu corporis A mutat; hæc mutatio cognoſci nequit, niſi quanta mutatio quovis tempore ſit facta, intelligamus. Si ergo, ut pluribus placet, temporis notitiam aliunde, niſi ex conſideratione motus, haurire non liceret, neque tempus ſine motu, neque motum ſine tempore cognoſcere poſſemus, neutrius ergo unquam ullam notitiam eſſemus conſecuti. Diviſionem quidem temporis ex motus contemplatione, ſolis ſcilicet, didicimus, verum ſine motus ſubſidio videmur apprehendiſſe, quid ſit *ante* et *poſt*; unde idea ſucceſſionis ſponte ſequi videtur. Atque etiamſi nos temporis accuratiorem notitiam conſiderationi motus debeamus, hinc tamen nondum ſequitur, tempus in ſe nihil eſſe præter noſtrum conceptum. Quid enim ſint duo temporis intervalla æqualia? quilibet intelligit, etiamſi fortaſſe nunquam in iis æquales mutationes eveniant, ex quibus illam æqualitatem colligere poſſit. Quicquid igitur de temporis fluxu diſceptetur inter Philoſophos, ad motus cognitionem temporis menſura uti debemus, concedendumque eſt, tempus ita ab omni motu independenter fluere, ut in eo partes, tam æquales, quam ſecundum rationem quamcunque inæquales, concipere liceat. Qui hanc nobis veniam recuſaverit, omnem motus cognitionem funditus ſuſtulerit. Tempus igitur perinde nobis liceat in calculum introducere, ac lineas aliasque magnitudines geometricas.

DEFINITIO. 4.

19. In motu puncti ſpatium vocatur via, quam punctum motu ſuo percurrit, quae cum ſit linea, erit vel recta vel curva. Illo caſu *motus* dicitur *rectilineus*, hoc vero *curvilineus*.

COROLL. 1.

20. Cum aliam adhuc motus, niſi reſpectivi, ideam non habeamus, ſpatium quoque ſeu linea deſcripta ad corpus, cujus reſpectu motus aeſtimatur, eſt referenda.

COROLL. 2.

21. Hoc scilicet corpus, sive quiescat ipsum sive moveatur, quoniam haec ratio non in computum ducitur, tanquam fixum spectatur, ejusque respectu tractus et positio illius spatii a puncto descripti assignari debet.

COROLL. 3.

22. Cognitio ergo hujus spatii ad tres casus reuocatur, quorum primus est, si motus sit rectilineus, spatiumve linea recta. Secundus, si spatium quidem sit linea curva, sed tota in eodem plano sita. Tertius vero, si linea curva non eodem plano contineatur.

EXPLICATIO. 1.

23. In Geometria jam assumitur, motu puncti lineam describi, quod ipsum per se clarius est, quam ut demonstratione egeat. Si enim punctum quod ante fuerat in A nunc sit in B, interea lineam quandam continuam ab A ad B porrectam percurrerit necesse est, nisi quis dicere velit, id in A subito annihilatum, tum vero in B de novo reproductum esse; verum quia hoc esset miraculum, non motus, ad nostrum institutum non pertinet. Qui motum quidem agnoscere nolunt, rem clarius se concipere opinantur, si dicant, in singulis punctis spatii, quod nobis percursum videtur, punctum annihilari, statimque in sequentibus reproduci; quasi transitus ab uno loco in alium difficilior esset intellectu, quam alterna destructio et creatio. Verum cum motus alio respectu quies esse possit, idem de quiete dicere coguntur, ut sit perpetua ejusdem corporis destructio, in eodemque loco subito secuta creatio: quae opinio cum non differat ab ea, qua conservatio corporum continua eorumdem creatio statuitur, a vulgari vix dissentire videtur. Cum enim nullum temporis punctum sit, quo corpus non existat, quin continuo existat dubitari nequit, haecque continua corporum existentia in motu aeque atque in quiete concedi debet. Ex quo conficitur, punctum ab uno termino in alium transire non posse, quin successive totam quandam lineam, ab illo termino ad hunc extensam percurrerit.

EXPLICATIO. 2.

Fig. 1. 24. Ponamus punctum percurrisse lineam APQB, et cum id simul in A et B esse nequeat, necesse est, ut in B reperiatur, postquam fuerit in A. Ex iis ergo, quae non simul fuisse percipimus, ideam temporis colligimus, atque

Digitized by Google

que cum punctum fuerit in A, idem non nisi elapso aliquo tempore in B pervenire potuisse agnoscimus. Quod idem cum de punctis mediis P et Q fit statuendum, punctumque prius pervenerit in P quam in Q, atque prius in Q quam in B, inde simul divisionem temporis intelligimus, qua constat, tempus quo ex A in P pervenerit, minus esse eo, quo ex A in Q perveniat, hocque minus eo, quo ex A usque in B pertingat. Hinc patet, tempus esse quantitatem divisibilem et mensurabilem, ita ut non solum aliud alio majus minusve sit dicendum, sed etiam ejus partes sive aequales, sive secundum rationem quamcunque inaequales, assignari queant. Cum enim tempus sit quantitas, necessario concedi debet, tempus, quo punctum ex A in P pervenit, vel aequale vel majus esse vel minus tempore, quo porro ex P in Q pervenit: et quicquid dixeris, inter haec duo tempora quaedam ratio intercedat, necesse est. Summo ergo jure hic tempus, tanquam quantitatem divisibilem ac mensurae capacem, in calculum introduci posse postulo.

DEFINITIO. 5.

25. Motus *aequabilis* seu *uniformis* dicitur, quo aequalibus temporibus aequalia spatia percurruntur. Sin autem aequalibus temporibus inaequalia spatia, vel aequalia spatia inaequalibus temporibus conficiantur, motus vocatur *inaequabilis*.

COROLL. 1.

26. Si ergo punctum motu aequabili feratur, tempore duplo percurret spatium duplum, triplo triplum: atque in genere spatia percursa erunt in ratione temporum, ac vicissim. Nempe si tempore t percurratur spatium s, alio vero tempore T spatium S, erit $t : T = s : S$.

COROLL. 2.

27. In motu autem inaequabili res secus se habebit, neque spatia percursa s et S rationem temporum, t : T tenebunt, sermo hic autem est de motu quocunque respectivo, cujus solum adhuc habemus ideam, ac perinde est, sive motus sit rectilineus sive curvilineus.

COROLL. 3.

28. Ex motu ergo aequabili vicissim accuratam temporis divisionem nanciscimur: cum enim spatii divisio geometrice institui possit, tempus inde similem divisionem in partes sive aequales sive inaequales impetrabit.

Digitized by Google

SCHOLION. 1.

29. Hinc intelligitur, temporis divisionem non esse meram mentis operationem, ut ii, qui tempori nonnisi in mente nostra locum concedunt, ideam temporis ab ipso tempore non secernentes, statuere solent. Si enim tempus nihil aliud esset, nisi ordo successivorum, neque extra mentem quicquam esset, quo tempus determinaretur; nihil impediret, quo minus in omni motu temporis partes, quibus aequalia spatia conficiantur, pro aequalibus haberemus, cum successiones similes videantur, ita ut omnis motus aequo jure tanquam aequabilis spectari posset. Ipsa autem rei natura abunde testatur, motum aequabilem essentialiter ab inaequabili differre; ideoque in aequalitate temporum, qua nititur, plus, quam quod in ideis nostris resideat, insit necesse est. Atque hinc aequalitas temporum rationi cuipiam, extra mentem sitae, inniti dicenda est, nosque potius ejus cognitionem extrinsecus ex motu aequabili hausisse videmur.

SCHOLION. 2.

30. Quamdiu punctum motu aequabili fertur, ita ut temporibus aequalibus spatia aequalia percurrat, tamdiu aeque celeriter moveri dicitur: unde discimus, quid sit *aeque celeriter moveri*. Ac si duo puncta A et B motu aequabili incedant, illudque A singulis temporibus t spatia $= s$, hoc vero B iisdem temporibus spatia $= \sigma$ percurrat, fueritque $s > \sigma$, punctum A celerius ferri dicitur, quam B, hoc vero illo tardius; unde percipimus, quid sit *celerius*, quid *tardius*. Atque si punctum A eodem tempore spatium duplo vel triplo majus absolvat, quam punctum B, illud *duplo* vel *triplo celerius* incedere dicitur; sicque hinc adeo comparatio hujus rei, quae vocabulo *celerius* subjicitur, menti clare obversatur, etiamsi de re ipsa nihil adhuc definiverimus. Est autem haec res conceptus abstractus, quasi basin exhibens ejus, quod sub voce *celerius* cogitamus; vocaturque iste conceptus *celeritas* vel *velocitas*, cujus definitionem proponamus.

DEFINITIO. 6.

31. In motu aequabili ratio spatiorum ad tempora, quibus percurruntur, vocatur *celeritas* sive *velocitas*. Aestimatur ergo celeritas ex quoto, qui oritur, si spatium per tempus dividatur,

COROLL.

Digitized by Google

COROLL. 1.

32. Si ergo in motu aequabili ſpatium $= s$ tempore $= t$ percurratur, celeritas erit $= \frac{s}{t}$. Unde ſi celeritas littera v indicetur, habetur $v = \frac{s}{t}$.

COROLL. 2.

33. Poſitis ergo his tribus rebus, ſpatio $= s$, tempore $= t$, et velocitate $= v$, ex binis tertia ita definitur; ut ſit 1°. $v = \frac{s}{t}$; 2°. $t = \frac{s}{v}$ et 3°. $s = t\,v$.

COROLL. 3.

34. Hinc ſi alius praeterea fuerit motus aequabilis, quo ſpatium $=$ S tempore T conficiatur, ejusque celeritas dicatur $=$ V, habebuntur iſtae notiſſimae proportiones 1°. v : V $= \frac{s}{t} : \frac{S}{T}$; 2°. t : T $= \frac{s}{v} : \frac{S}{V}$: 3°. s : S $= t\,v$: TV.

EXPLICATIO. 1.

35. Dubium hic orietur, quomodo ſpatia per tempora dividi queant, cum ſint quantitates heterogeneae, neque dici poſſit, quoties tempus v. gr. decem minutorum in ſpatio v. gr. decem pedum contineatur. Verum hic non de diviſione abſoluta eſt ſermo. Sed de comparativa, quoniam celeritatis idea nihil abſoluti involvit. Scilicet celeritas aliter niſi relative intelligi nequit; ſtatim autem atque celeritatem certi cujusdam motus aequabilis tanquam cognitam aſſumimus, et quaſi unitatem ſpectamus, in quocunque alio motu aequabili celeritas per numerum exprimetur, neque ulla amplius occurret difficultas. Fingamus enim in motu aequabili, quo ſpatium $=$ s tempore t abſolvitur, celeritatem pro unitate aſſumi: ita ut $\frac{s}{t}$ tanquam unitas ſpectetur; in alio quocunque motu aequabili, quo ſpatium $=$ S tempore $=$ T percurritur, celeritas talis erit numerus, qui ſit ad unitatem, ut $\frac{S}{T}$ ad $\frac{s}{t}$, eritque hic numerus $= \frac{S\,t}{T\,s} = \frac{S}{s} \cdot \frac{t}{T}$, cujus factores $\frac{S}{s}$ et $\frac{t}{T}$ veros quoſos exhibent.

SCHOLION. 1.

29. Hinc intelligitur, temporis divisionem non esse meram mentis operationem, ut ii, qui tempori nonnisi in mente nostra locum concedunt, ideam temporis ab ipso tempore non secernentes, statuere solent. Si enim tempus nihil aliud esset, nisi ordo successivorum, neque extra mentem quicquam esset, quo tempus determinaretur; nihil impediret, quo minus in omni motu temporis partes, quibus aequalia spatia conficiantur, pro aequalibus haberemus, cum successiones similes videantur, ita ut omnis motus aequo jure tanquam aequabilis spectari posset. Ipsa autem rei natura abunde testatur, motum aequabilem essentialiter ab inaequabili differre; ideoque in aequalitate temporum, qua nititur, plus, quam quod in ideis nostris resideat, insit necesse est. Atque hinc aequalitas temporum rationi cuipiam, extra mentem sitae, inniti dicenda est, nosque potius ejus cognitionem extrinsecus ex motu aequabili hausisse videmur.

SCHOLION. 2.

30. Quamdiu punctum motu aequabili fertur, ita ut temporibus aequalibus spatia aequalia percurrat, tamdiu aeque celeriter moveri dicitur: unde discimus, quid sit *aeque celeriter movere*. Ac si duo puncta A et B motu aequabili incedant, illudque A singulis temporibus t spatia $= s$, hoc vero B iisdem temporibus spatia $= \sigma$ percurrat, fueritque $s > \sigma$, punctum A celerius ferri dicitur, quam B, hoc vero illo tardius; unde percipimus, quid sit *celerius*, quid *tardius*. Atque si punctum A eodem tempore spatium duplo vel triplo majus absolvat, quam punctum B, illud *duplo* vel *triplo celerius* incedere dicitur; sicque hinc adeo comparatio hujus rei, quae vocabulo *celerius* subjicitur, menti clare obversatur, etiamsi de re ipsa nihil adhuc definiverimus. Est autem haec res conceptus abstractus, quasi basin exhibens ejus, quod sub voce *celerius* cogitamus; vocaturque iste conceptus *celeritas* vel *velocitas*, cujus definitionem proponamus.

DEFINITIO. 6.

31. In motu aequabili ratio spatiorum ad tempora, quibus percurruntur, vocatur *celeritas* sive *velocitas*. Æstimatur ergo celeritas ex quoto, qui oritur, si spatium per tempus dividatur,

COROLL.

Digitized by Google

COROLL. 1.

32. Si ergo in motu aequabili ſpatium $= s$ tempore $= t$ percurratur, celeritas erit $= \frac{s}{t}$. Unde ſi celeritas littera v indicetur, habetur $v = \frac{s}{t}$.

COROLL. 2.

33. Poſitis ergo his tribus rebus, ſpatio $= s$, tempore $= t$, et velocitate $= v$, ex binis tertia ita definitur; ut ſit 1°. $v = \frac{s}{t}$; 2°. $t = \frac{s}{v}$ et 3°. $s = t\,v$.

COROLL. 3.

34. Hinc ſi alius praeterea fuerit motus aequabilis, quo ſpatium $= S$ tempore T conficiatur, ejusque celeritas dicatur $= V$, habebuntur iſtae notiſſimae proportiones 1°. $v : V = \frac{s}{t} : \frac{S}{T}$; 2°. $t : T = \frac{s}{v} : \frac{S}{V}$: 3°. $s : S = t\,v : TV$.

EXPLICATIO. 1.

35. Dubium hic orietur, quomodo ſpatia per tempora dividi queant, cum ſint quantitates heterogeneae, neque dici poſſit, quoties tempus v. gr. decem minutorum in ſpatio v. gr. decem pedum contineatur. Verum hic non de diviſione abſoluta eſt ſermo. Sed de comparativa, quoniam celeritatis idea nihil abſoluti involvit. Scilicet celeritas aliter niſi relative intelligi nequit; ſtatim autem atque celeritatem certi cujusdam motus aequabilis tanquam cognitam aſſumimus, et quaſi unitatem ſpectamus, in quocunque alio motu aequabili celeritas per numerum exprimetur, neque ulla amplius occurret difficultas. Fingamus enim in motu aequabili, quo ſpatium $= s$ tempore t abſolvitur, celeritatem pro unitate aſſumi: ita ut $\frac{s}{t}$ tanquam unitas ſpectetur; in alio quocunque motu aequabili, quo ſpatium $= S$ tempore $= T$ percurritur, celeritas talis erit numerus, qui ſit ad unitatem, ut $\frac{S}{T}$ ad $\frac{s}{t}$, eritque hic numerus $= \frac{S\,t}{T\,s} = \frac{S}{s} \cdot \frac{t}{T}$, cujus factores $\frac{S}{s}$ et $\frac{t}{T}$ veros quoſos exhibent.

EXPLICATIO. 2.

36. Verum ſuperior difficultas quoque evanescit, omnia ad numeros abſolutos revocando. Si enim in ſpatiis menſurandis ſpatium quoddam determinatum pro unitate aſſumamus, ſimiliterque pro temporibus tempus quoddam determinatum pro unitate habeamus, hacque menſura conſtanter utamur, omnia tam ſpatia quam tempora numeris abſolutis exprimentur, quorum diviſionem promiſcuam nihil eſt quod impediat. Quoti ergo ſupra indicati certe erunt celeritatibus proportionales, et quia arbitrio noſtro adhuc relinquitur, quamnam celeritatem inſtar unitatis ſpectare velimus, nihil obſtat, quo minus eam ipſam celeritatem, quam quotus ille in unitatem abiens indicat, etiam pro unitate aſſumamus. Quam rationem ſi conſtituerimus, quoti ſupra aſſignati $\frac{s}{t}$ et $\frac{S}{T}$ revera quaſvis celeritates deſignabunt. Semper autem ſolae relationes mutuae ſufficere poſſunt, et quovis caſu oblato facile erit eas ad menſuras abſolutas revocare.

SCHOLION.

37. Hanc celeritatis notionem ex motu uniformi ſeu aequabili petivimus, nihilo vero minus etiam ad motum inaequabilem patet. Uti enim in motu aequabili celeritas ubique eſt eadem, ita in inaequabili mutari eſt intelligenda. Mox enim oſtendemus, in omni motu, utcumque ſit inaequabilis, minima ſpatii elementa ſingula motu aequabili percurſa concipi poſſe, ſicque in quovis ſpatii puncto celeritatem aſſignare licet, qua ſcilicet minimum ſpatiolum ibi conceptum percurritur. Atque hinc celeritas, tanquam indoles quaedam peculiaris motus a deſcriptione ſpatii non pendens, conſiderari poteſt, cum in quolibet ſpatii deſcripti puncto certa detur celeritas. Ex quo *celeritas* etiam ita definiri poſſet, ut ſit talis motus modificatio, qua is ad certum ſpatium certo tempore deſcribendum determinetur. Ceterum uti hic motum utcunque reſpectivum conſidero, celeritas quoque pari modo erit reſpectiva, atque in eodem puncto diverſa, idque eodem tempore, eſt agnoſcenda, prouti motus ad alia atque alia corpora referatur. Ita fieri poteſt, ut corporis in nave moti celeritas, reſpectu navis, maxime diſcrepet ab ejusdem celeritate reſpectu ripae.

DEFI-

Digitized by Google

DEFINITIO 7.

38. Si motus sit rectilineus, *directio motus* est ipsa recta, in qua fit: sin autem fuerit curvilineus, in quovis spatii puncto tangens curvae praebet directionem motus. Quare in motu curvilineo directio continuo mutari dicitur, dum in rectilineo perpetuo eadem manet.

COROLL. 1.

39. Directio ergo motus cognoscitur ex angulo, quo ea ad unam vel duas lineas rectas fixas inclinatur. Scilicet si motus fiat in eodem plano, sufficit ejus inclinationem ad unam rectam fixam nosse: sin autem non fiat in eodem plano, ejus inclinationem ad duas rectas fixas nosse oportet.

COROLL. 2.

40. In motu igitur curvilineo, statim ac linea curva a puncto moto descripta fuerit cognita, methodus inveniendi tangentes directionem motus in singulis punctis manifestabit.

SCHOLION.

41. Quemadmodum motus sine celeritate, ita etiam sine directione cogitari nequit, cum enim punctum tempusculo etiam minimo ex suo loco in alium transeat, spatioli interea percursi magnitudo ad tempusculum applicata motus celeritatem, ejus vero positio motus directionem praebet. In quiete quidem celeritas evanescit, motusque, cujus celeritas est nulla, in quietem abit; verum de quiete dicere non licet, directionem quoque evanescere, sed potius directionis ratio plane cessare est putanda: statim enim ac punctum quiescere dicimus, ne quaestio quidem de directione locum habet. Etsi autem in motu tot sint res, quae in ejus cognitionem ingrediuntur, cum quaeri possit 1°. *Quonam loco punctum post datum tempus sit haesurum?* 2°. *Quamnam lineam seu spatium interea confecerit?* 3°. *Quantam quovis tempore habiturum sit celeritatem?* 4°. *Quaenam ejus futura sit motus directio?* quoniam celeritas et directio sunt notiones, ex motus idea derivatae, dummodo quovis casu primam quaestionem resolverimus, simul omnes confecerimus. Quod quo clarius exponatur, secundum supra factam divisionem, tria motus genera persequar, quorum primo punctum in linea recta moveri assumam, secundo vero spatium descriptum curvum quidem statuam, sed in eodem plano existens: tertio denique id genus per-

Digitized by Google

perſequar, quo ſpatium motu deſcriptum non in eodem plano fuerit ſitum.

PROBLEMA. 1.

42. Si punctum in linea recta moveatur, univerſam motus determinationem ad calculum revocare.

SOLUTIO.

Fig. 2. Totum negotium huc redit, ut ad quodvis tempus locus aſſignetur, ubi tum punctum reperiatur. Sit ergo AB linea recta, in qua punctum incedat, initio in A conſtituto, atque elapſo tempore $= t$, pervenerit in S, ſtatuaturque $AS = s$, quod erit ipſum ſpatium tempore t deſcriptum. Quodſi jam inter t et s aequatio detur, qua alterum ex altero definiri queat, inde omnia, quae ad motus cognitionem pertinent, innoteſcent. Differentiatione enim inſtituta pro temporis elemento dt ſpatii elementum ds, quod eo percurritur, derivatur: atque fractio $\frac{ds}{dt}$ celeritatem puncti in S exprimet. Conſtat enim, hanc fractionem continere quantitatem finitam. Quare ſi celeritas in S ponatur $= v$, erit $\frac{ds}{dt} = v$, unde tam ad quodvis tempus, quam ad quemvis ſpatii locum, celeritas aſſignari poterit. Directio autem motus ubique cum ipſa recta AB congruet.

COROLL. 1.

43. Si ad ſingula temporis momenta celeritas corporis detur v, ita ut relatio inter t et v conſtet, inde quoque ſpatia s ſingulis temporibus t deſcripta definientur ope aequationis $ds = v\,dt$, cujus integrale praebebit ipſum ſpatium $s = \int v\,dt$.

COROLL. 2.

44. Simili modo ſi ad ſingula ſpatii puncta celeritas v fuerit cognita, ſeu data ſit relatio inter s et v, inde tempus t, quo ſpatium s abſolvitur, definietur hac aequatione differentiali $dt = \frac{ds}{v}$, ita ut ſit $t = \int \frac{ds}{v}$.

COROLL.

Digitized by Google

COROLL. 3.

45. Si ergo motus fuerit aequabilis, celeritas $\frac{ds}{dt}$ erit quantitas conſtans, quae ſi ponatur $= c$, erit $ds = cdt$, et integrando $s = ct$, quoniam ſumto $t = 0$, etiam ſpatium s evaneſcere debet. Viciſſim ergo, ſi relatio inter s et t ita fuerit comparata, ut inde pro $\frac{ds}{dt}$ quantitas conſtans eliciatur, motus erit aequabilis.

EXPLICATIO.

46. Quando dicimus, punctum noſtrum motum elapſo tempore t in S eſſe, haec locutio admitti nequit, niſi a ſignificatu vocabuli *eſſe* omnis mora vel manſio ſegregetur. In vulgari autem ſermone phraſis *in loco eſſe* idem ſignificare ſolet, atque *in loco morari*, unde vetus illud ſophisma contra motus exiſtentiam maximam vim adipiſcitur: *Si corpus movetur, vel movetur in loco, ubi eſt, vel in loco, ubi non eſt:* quorum cum neutrum dici poſſit, colligitur, corpus plane moveri non poſſe: prius enim certe dici nequit, ſi, *in loco, ubi eſt*, idem ſignificat, atque *in loco, ubi moratur, ſeu quiescit*. Si loco vocabuli *eſſe* ſubſtitueretur *tranſire*, omnis difficultas tolleretur: nam ubi corpus tranſit, ibi ſine dubio movetur: verum talis vox non ſatis fortis videtur ad exiſtentiam ſimul innuendam, dum corpus ſeu punctum per S tranſit: videtur autem exiſtentiae notio, ad quempiam locum applicata, moram quandam implicare, a motu prorſus alienam. Quare niſi hoc ſolo nomine motum e mundo tollere velimus, cavere debemus, ne cum his loquendi formulis, *in loco eſſe*, *vel exiſtere*, *vel haerere*, ullam manſionem conjungamus, atque tali ſignificatu hic equidem ſemper utar, ita ut plus non declarent, quam per locum tranſire, ſiquidem corpus moveatur. Hinc eſt, quod nonnulli Philoſophi, hanc diſtinctionem negligentes, admodum perverſas ſibi notiones de motu finxerint; dum enim motum per ſucceſſivam ejusdem corporis in diverſis locis exiſtentiam explicant, in ſingulis locis ipſi quandam moram tribuunt, unde ſubito in loca ſequentia tranſeat. Si hac definitione incommodum, quod ex exiſtentia ſine mora in eodem loco pertimescunt, vitare volunt, ſaltus illos ſubitaneos certe multo magis pertimescere debebant; dum enim talis ſaltus fit, dicere non poterunt, ubi tum corpus exiſtat; ac, ſi huic opinioni ulla ratio ſubeſſet, expediret potius, omnem motum

negare, quam hujusmodi principia, naturam motus evertentia, constituere.

PROBLEMA. 2.

47. Si punctum in linea curva moveatur, quae autem tota sita sit in eodem plano, universam motus determinationem ad calculum revocare per binas coordinatas.

SOLUTIO.

Fig. 3. Quoniam id corpus, cujus respectu motus aestimatur, ut fixum spectatur, planum quoque, in quo spatium percursum est situm, pro fixo est habendum. In eo autem pro lubitu duae rectae directrices OA et OB, inter se sive normales sive obliquae, accipiantur, ad quos motus referatur: sitque ESF via seu spatium, a puncto moto descriptum, in cujus puncto E initio fuerit. Iam tota quaestio huc redit, ut elapso tempore t locus in curva S definiatur, ubi tum punctum sit futurum. Ponatur totum spatium interea percursum seu linea $ES = s$, et ex S binis directricibus OA, OB, parallelae agantur SY et SX, vocenturque coordinatae $OX = SY = x$; $XS = OY = y$; atque si pro tempore t valores ipsarum x et y assignari queant, simul punctum S innotescet; quin etiam relatione inter x et y natura curvae ESF exprimetur. Tum vero ex angulo directricium AOB, qui sit $= \zeta$, habebitur pro elemento temporis dt elementum spatii $Ss = ds = \gamma(dx^2 + 2dx\,dy\cos\zeta + dy^2)$, unde prodit celeritas in loco $S = \frac{ds}{dt}$, et pro motus directione reperitur angulus, quem ea cum altera directrice OA facit, cujus anguli tangens est $= \frac{dy \sin\zeta}{dx + dy\cos\zeta}$, et sinus $= \frac{dy \sin\zeta}{ds}$. Vel si angulus quaeratur, quem motus directio Ss cum altera directrice OB facit, erit ejus tangens $= \frac{dx \sin\zeta}{dy + dx\cos\zeta}$, et sinus $= \frac{dx \sin\zeta}{ds}$

COROLL. 1.

48. Ut locus curvae S per coordinatas $OX = x$ et $XY = y$ determinatur, ita locus sequens s per earum elementa dx et dy definitur: scilicet punctum ex S egressum tempusculo dt secundum directionem OA per spatiolum dx, secundum directionem OB vero per spatiolum dy transfertur.

COROLL.

Digitized by Google

COROLL. 2.

49. Duplex ergo haec translatio per spatiola dx et dy veram translationem ex S in s per spatiolum $Ss = ds$ ita ostendit, ut tam ejus quantitatem ipsam, quam directionem declaret.

COROLL. 3.

50. Sin autem mobile tempusculo dt spatiola dx et dy revera percurreret, ejus celeritas futura esset $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$: ex quibus celeritatibus, mente conceptis, non solum vera celeritas per spatiolum $Ss = ds$, sed etiam hujus directio indicatur.

COROLL. 4.

51. Si inter binas directrices OA et OB angulus $AOB = \zeta$ constituatur rectus, calculus fit simplicissimus. Tum enim ex elementis dx et dy definitur $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, et directionis Ss ad rectam fixam OA inclinationis tangens est $= \frac{dy}{dx}$

SCHOLION. 1.

52. Geometrica plane est haec consideratio, qua motus puncti, dum tempusculo dt spatiolum $Ss = ds$ peragrat, resolvi concipitur in binos motus secundum directiones fixas OA et OB, quippe qua in ipso motu nihil mutatur. Atque dum huic duplici motui sua assignatur celeritas $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$, hoc commodi inde consequimur, ut non solum veram celeritatem $\frac{ds}{dt}$ sed etiam motus directionem cognoscamus, id quod in calculo plerumque maximum usum praestabit. Cum enim celeritas ac directio sint duae res, natura sua diversae, ambas hoc modo per duas celeritates, seu quantitates ejusdem generis, cognoscere licet. Mente autem tantum motum puncti, pro quovis temporis elemento dt, in binos motus secundum datas directiones resolvimus, et utrique suam velocitatem assignamus; non quasi in puncto duplex inesset motus, quod sane esset absonum, sed quoniam talis conceptus ad veram cognitionem perducit. Hoc subsidio uti licet, quando jam aliunde certum est, motum puncti in eodem fieri plano: at si de hoc non constet, ad

Digitized by Google

ternas directrices fixas recurrere debemus, ſecundum quas motum in ternos motus reſolvi conveniet.

SCHOLION. 2.

53. Evolutio haec motus, in plano facti, uſitata nititur ratione, lineas curvas ad binas directiones fixas, quibus coordinatae parallelae ſtatuuntur, revocandi. Cum autem electio harum rectarum directricium ab arbitrio noſtro pendeat, manifeſtum eſt, eundem motum infinitis modis calculo exprimi poſſe: qui cum omnes, pro quovis tempore, tam eandem celeritatem quam directionem monſtrare debeant, motus etiam reſolutio eſt arbitraria. Motus ſcilicet puncti, quo tempusculo dt ſpatiolum $Ss = ds$ percurrit, infinitis modis, mente ſaltem, in binos motus reſolvi poteſt, prout aliae atque aliae lineae pro directricibus aſſumuntur: qui vero ſemper in hoc convenient, ut binae illae celeritates $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$, utcunque fuerint diverſae, ſi junctim ſumantur, eandem ſemper tam celeritatem veram $\frac{ds}{dt}$, quam directionem ſeu poſitionem tangentis in S ductae, ſint oſtenſurae. Quae infinita varietas, quoniam a Geometria inducitur, nihil habet, quod ſit mirandum: interim tamen, quovis caſu oblato, plurimum intereſt, qua ratione rectae illae directrices eligantur, quo calculus maxime facilis reddatur.

PROBLEMA. 3.

54. Si ſpatium, a puncto deſcriptum, non ſit in eodem plano, univerſam motus determinationem per ternas coordinatas ad calculum revocare.

SOLUTIO.

Fig. 4. Corpus, cujus reſpectu motus aeſtimatur, et quod pro fixo habetur, ſuppeditabit ternas directiones fixas, in longum, latum ac profundum extenſas, quarum electio cum arbitrio noſtro relinquatur, ſtatuuntur eae, ad calculi commodum, inter ſe normales. Sint igitur OA, OB et OC hae tres directrices, quarum binae priores in plano tabulae ſint ſitae, poſtrema vero OC huic plano perpendiculariter inſiſtens concipiatur. Punctum autem motum confecerit lineam ESF, extra planum tabulae utcunque ſitam, in qua elapſo tempore t ex E pervenerit in S, unde ad planum AOB demittatur perpendiculum SY, et ex Y ad OA normalis

Digitized by Google

malis YX. Vocentur hae coordinatae orthogonales, $OX = x$, $XY = y$ et $YS = z$, quae ternis directricibus erunt parallelae; inter quas per duplicem aequationem natura curvae ESF definitur, ita ut, si ad tempus t eorum valores assignari queant, iis locus S, ubi nunc punctum motum versatur, determinetur. Deinde cum posito toto spatio $ES = s$, quod tempore t est percursum, ex differentialibus dx, dy, et dz, tempusculo dt convenientibus, colligetur elementum spatii $Ss = ds$ eodem tempusculo percursum, cum sit $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, unde celeritas in S erit $= \frac{ds}{dt}$. Quod autem ad directionem motus Ss attinet, ea indidem determinatur: producta enim recta y Y ad concursum usque T cum recta AO, erit $XT = \frac{ydx}{dy}$, et si concipiatur planum super YT plano AOB normaliter insistens, in eo erit elementum Ss, quod productum cum recta YT angulum faciet, cujus tangens est $= \frac{dz}{\sqrt{(dx^2+dy^2)}}$ et sinus $= \frac{dz}{ds}$. Quin etiam directio Ss cum recta, per S ipsi OA parallela ducta, faciet angulum, cujus cosinus $= \frac{dx}{ds}$; cum recta autem, per S ipsi OB parallela ducta, angulum, cujus cosinus $= \frac{dy}{ds}$, et cum recta, per S ipsi OC parallela ducta, angulum, cujus cosinus est $= \frac{dz}{ds}$: quibus rebus universa motus determinatio continetur.

COROLL. 1.

55. Hic ergo elementum spatii Ss tanquam diagonalis parallelepipedi consideratur, cujus latera sunt dx, dy, et dz, ternis directricibus fixis OA, OB et OC parallela; ex quibus, cum parellelepipedum statuatur rectangulum, diagonalis $Ss = ds$ ita definitur, ut sit $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$.

COROLL. 2.

56. Dum mobile tempusculo dt elementum Ss percurrit, interea secundum directionem, ipsi OA parallelam, per spatiolum dx; secundum directionem, ipsi OB parallelam, per spatiolum dy; et secundum directionem, ipsi OC parallelam, per spatiolum dz progredi concipi solet.

Digitized by Google

COROLL. 3.

57. Si haec triplex translatio ut verus motus ſpectetur, etiamſi tantum mente concipiatur, exprimet $\frac{dx}{dt}$ celeritatem, ſecundum directionem OA; porro $\frac{dy}{dt}$ celeritatem, ſecundum directionem OB; atque $\frac{dz}{dt}$ celeritatem, ſecundum directionem OC.

COROLL. 4.

58. Ex his tribus autem celeritatibus fictitiis non ſolum vera puncti celeritas in S, quae eſt $= \frac{ds}{dt}$ colligitur, ſed etiam motus directio; atque adeo ex earum integralibus totus motus definitur.

SCHOLION. 1.

59. Calculi gratia hic ternas directrices OA, OB, et OC, inter ſe normales conſtitui; quae etiam, ut praecedente caſu fecimus, utcunque obliquae aſſumi potuiſſent: verum indoles angulorum ſolidorum obliquorum non tam nota plerisque eſſe ſolet, ut eorum proprietates, tanquam ex elementis ſatis cognitae, hic aſſumi potuiſſent. Quin potius, quoniam imprimis calculi prolixitas eſt evitanda, merito ſemper directricibus orthogonalibus utemur. Interim tamen, ſi eae eſſent oblique, angulique ponantur AOB $= \zeta$, AOC $= \eta$ et BOC $= \theta$, atque iis coordinatae x, y, z, parallelae ducantur, haberetur per formulam utique magis complicatam:

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dxdy\cos\zeta + 2dxdy\cos\eta + 2dydz\cos\theta)}$$

atque poſitio elementi Ss, ſeu motus directio, nimis incommode exprimeretur.

SCHOLION. 2.

60. Quoniam conſtitutio ternarum directricium OA, OB, OC, etſi inter ſe normalium, infinitis modis variari poteſt, idem motus infinitis modis repraeſentari poteſt. Quin etiam, ſi punctum moveatur in linea recta, vel curva, tota in eodem plano exiſtente, quaſi hoc non conſtaret, motus ni hilo minus per hujusmodi ternas directrices expediri poterit, praeſtabit tamen methodis ſimplicioribus ſupra traditis uti. Ex his ergo patet, eundem motum ſemper infinitis modis in ternos reſolvi

Digitized by Google

ſolvi poſſe, quorum cuique ſua tribuatur celeritas, ita ut omnes junctim ſumtae non ſolum ipſam puncti celeritatem, ſed etiam motus directionem exhibeant, id quod in calculo ſummum praeſtabit uſum, quoniam hoc modo a pluribus inveſtigationibus ſatis taedioſis circa curvaturam ſpatii deſcripti, eamque duplicem, niſi motus in eodem plano fiat, liberamur. Hae enim ternae celeritates, mente ſaltem puncto mobili tributae, totum negotium expedient; quo ſubſidio cum non ſim uſus in ſuperioribus de Mechanica libris, in nimis intricatos calculos ſum delapſus. Quare cum haec motus reſolutio, etſi mente ſolum inſtituatur, tanti ſit momenti, operae pretium erit, eam per peculiarem definitionem ſtabilivisſe.

DEFINITIO. 8.

61. Motus *reſolvi* dicitur, dum ſpatiolum, elemento temporis percurſum, tanquam diagonalis parallelogrammi vel parallelepipedi conſideratur, cujus latera data tenent directiones; punctoque mobili duplex vel triplex motus, ſecundum latera parallelogrammi vel parallelepipedi, quisque cum ſua velocitate, adſcribitur.

SCHOLION. 1.

62. Quae hic de motu quaſi elementari per ſpatiolum infinite parvum dicuntur, transferri poſſunt ad motum finitum, dum ſit aequabilis et rectilineus: propterea, quod ea ideo motui elementari ſint adſtricta, quoniam quodque elementum lineae curvae, ut lineola recta, et motus per id aequabilis, ſpectari poteſt. Quo igitur haec magis fiant ſenſibilia, ea in motu finito aequabili et rectilineo explicabo, ſiquidem hinc applicatio ad motum elementarem facillime inſtituitur.

EXPLICATIO. 1.

63. Ponamus, punctum tempore $= t$ percurrere motu aequabili rectam SV, ut ejus celeritas ſit $= \frac{SV}{t}$; et concipiamus circa SV parallelogrammum quodcunque SAVB deſcriptum, cujus recta SV ſit diagonalis. Quo facto motus ſecundum latera SA et SB ita mente reſolvi poteſt, ut illius celeritas ſit $= \frac{SA}{t}$, et hujus $= \frac{SB}{t}$, utroque ſcilicet aequabili exiſtente: atque hic duplex motus cum his celeritatibus lateralibus Fig. 5

Digitized by Google

libus non ſolum veram celeritatem $\frac{SV}{t}$, ſed etiam veram motus directionem indicabit; ſicque ad cognitionem hujus motus ſufficiet, binas illas celeritates laterales definiviſſe. Neque vero hujusmodi reſolutio mechanico fundamento inniti eſt exiſtimanda; cum potius certum ſit, plus uno motu ſimul in eodem puncto ineſſe non poſſe, ſed ea ex mero conceptu geometrico nata, atque a natura motus plane aliena, eſt judicanda, in ſubſidium tantum calculi in Mechanicam introducta.

EXPLICATIO. 2.

Fig. 6. 64. Percurrat mobile tempore t motu aequabili rectam SV, quem motum ſecundum ternas directiones reſolvi oporteat. His agantur ex utroque termino S et V rectae parallelae SA, SB, SC, atque VP, VQ, VR, quoad quaeque plano binarum reliquarum directionum, ad alterum terminum conſtitutarum occurrat. Hoc modo orietur parallelepipedum, cujus SV eſt diagonalis: atque motus per SV, cujus celeritas eſt $= \frac{SV}{t}$, ita mente in tres motus ſecundum SA, SB, SC, reſolvi poteſt, ut motus ſecundum SA celeritas ſit $= \frac{SA}{t}$, motus ſecundum SB celeritas $= \frac{SB}{t}$, et motus ſecundum SC celeritas $= \frac{SC}{t}$. Ex his tribus celeritatibus non ſolum vera celeritas per diagonalem SV determinabitur, ſed etiam motus directio, ratione ternarum directricium, innoteſcit. Eodem vero modo, ſi SV ſit elementum curvae cujuscunque, tempusculo *dt* percurſum, reſolutio in ternas celeritates ſecundum ternas quascunque directiones inſtitui poteſt.

SCHOLION. 2.

65. In his motus determinationibus ſecutus ſum uſitatam in Geometria methodum, naturam linearum curvarum per binas vel ternas coordinatas exprimendi; illud ſcilicet, quando curva tota in eodem plano eſt ſita, hoc vero, ubi eodem plano contineri nequit. Quae methodus, uti primum ſe obtulit, ita nos manuduxit ad inſignem illam motus reſolutionem, ſecundum datas vel duas vel tres directiones inſtituendam, quae per univerſam Mechanicam ampliſſimi erit uſus, dum cognitio celeritatum lateralium ſimul motus directionem atque inflexionem in ſe complectitur, cujus conſideratio calculum alioquin non mediocriter per-

Digitized by Google

perturbare solet. Verum cum in Geometria etiam saepe lineae curvae ad punctum aliquod fixum non sine egregio calculi compendio referuntur, eodem modo quoque motus evolutionem exposuisse juvabit, idque cum motus non solum in eodem sit plano, sed etiam extra planum vagatur: hoc quippe modo Astronomi feliciter uti solent, dum motus planetarum, respectu alicujus puncti, per angulos circa id descriptos distantiasque ab eodem definiunt, ubi si motus non fiat in eodem plano, insuper lineam nodorum cum inclinatione orbitae ad certum planum contemplantur; quare haud abs re erit, etiam hanc motus repraesentandi rationem paucis in genere explicare.

PROBLEMA. 4.

Si motus fiat in eodem plano, universam motus determinationem per angulos, circa punctum quoddam fixum absolutos, describere.

SOLUTIO.

Si AS sit via a puncto moto in eodem plano descripta, in eodem accipiatur punctum fixum O, quod ad motus determinationem maxime accommodatum videatur, ductaque ad motus initium A recta OA, motus perfecte cognoscetur, si ad quodvis tempus elapsum $= t$, quo punctum in S versetur, definire poterimus tam angulum AOS $= \varphi$, quam distantiam OS $= z$. Cum enim inde natura curvae AS definiatur, tum etiam differentialia tam motus celeritatem, quam ejus directionem, determinabunt. Si enim punctum tempusculo dt ex S pervenerit in s; quo angulus AOS $= \varphi$ cepit incrementum S O$s = d\varphi$, et distantia OS $= z$ incrementum $sp = dz$, posito semper sinu toto $= 1$, erit S$p = zd\varphi$, et S$s = \sqrt{(dz^2 + zzd\varphi^2)}$, unde celeritas in S $= \frac{\sqrt{(dz^2+zzd\varphi^2)}}{dt}$ et directio cognoscetur ex angulo ASO seu Ssp, cujus tangens est $= \frac{zd\varphi}{dz}$. Fig. 7.

COROLL. 1.

67. Cum punctum motum tempore $= t$ circa O angulum descripserit AOS, et ab eodem puncto O jam intervallo OS $= z$ distet, ejus motus tanquam duplex spectari potest, alter angularis circa punctum fixum O, alter directus ab eodem puncto recedens, vel eo accedens.

Digitized by Google

COROLL. 2.

68. Et cum tempusculo dt angulus AOS $= \varphi$ crescat elemento $d\varphi$, fractio $\frac{d\varphi}{dt}$ celeritatem angularem exprimet, tum vero ob dz augmentum distantiae OS $= z$, fractio $\frac{dz}{dt}$ celeritatem recessus a puncto O declarabit.

COROLL. 3.

69. Cognita autem utraque hac celeritate, tam angulari quam recessus, inde non solum vera puncti celeritas, sed etiam directio, tum vero insuper ipsa curva descripta AS assignari poterit.

PROBLEMA. 5.

70. Si punctum non in eodem plano moveatur, ejus motum, cum ad planum, tum ad datum in eo punctum fixum, per angulos exprimere.

SOLUTIO.

Fig. 8. Repraesentet tabula id planum, ad quod motus sit referendus, in quo sit O punctum illud fixum, quod quasi centrum spectetur. Moveatur punctum utcunque extra hoc planum in linea ES, et tempore elapso t pervenerit in S, unde in planum demittatur perpendiculum SM, ducanturque rectae MO et SO. Sit OA directio fixa in hoc plano assumta, atque manifestum est, ad datum tempus t locum puncti S definitum iri, si assignare poterimus 1°. angulum AOM $= \varphi$. 2°. angulum MOS $= \psi$, ac 3°. distantiam OM $= z$. Quod quo facilius fieri possit, ducatur ex S tangens curvae descriptae, quae plano occurrat in T, unde agatur OT, quae erit intersectio plani, in quo punctum jam movetur, cum plano assumto. Vocarique solet haec recta OT linea nodorum, pro qua sit hoc tempore angulus AOT $= \omega$ et inclinatio plani OST ad planum assumtum $= \varrho$, qui duo anguli ω, ϱ si fuerint praeter angulum AOM $= \varphi$ et distantiam OM $= z$ ad datum tempus t cogniti, locus puncti S, hoc est angulus MOS $= \psi$ cum distantia OS $= \frac{z}{\cos\psi}$ commode assignari poterit. Hunc in finem ex M in rectam OT ducatur normalis MN, simulque recta SN; atque ob angulum

gulum TOM $= \varphi - \omega$, erit MN $= z \sin(\varphi - \omega)$ et ON $= z \cos(\varphi - \omega)$: tum vero habebitur angulus MNS $= \varrho$, unde fit MS $= z \sin(\varphi - \omega) \tang \varrho$, et NS $= \frac{z \sin(\varphi - \omega)}{\cos \varrho}$, hincque OS $= \frac{z}{\cos \varrho} \sqrt{(\sin \varphi - \omega)^2 + \cos(\varphi - \omega)^2 \cos \varrho^2)}$ seu OS $= \frac{z}{\cos \varrho} \sqrt{(1 - \cos \varphi - \omega)^2 \sin \varrho^2)}$. Verum hinc angulus MOS $= \psi$ ita definitur, ut sit $\tang \psi = \frac{MS}{OM} = \sin(\varphi - \omega) \tang \varrho$. Cum igitur angulus AOT $= \omega$ cum inclinatione $= \varrho$ aequae ad punctum sequens s, ubi punctum elapso insuper tempusculo dt haeret, atque ad punctum S pertineat, in differentiatione anguli ψ elementa ω et ϱ pro constantibus habere licet, unde fit $\frac{d\psi}{\cos \psi^2} = d\varphi \cos(\varphi - \omega) \tang \varrho$: erit vero etiam secundum praecepta differentiationis

$$\frac{d\psi}{\cos \psi^2} = (d\varphi - d\omega) \cos(\varphi - \omega) \tang \varrho + \frac{d\varrho}{\cos \varrho^2} \sin(\varphi - \omega)$$

quibus valoribus aequatis oritur

$$\frac{d\omega}{\tang(\varphi - \omega)} = \frac{d\varrho}{\sin \varrho \cos \varrho} = d.\, l \tang \varrho$$

qua aequatione ratio inter progressionem momentaneam lineae nodorum OT et variationem inclinationis ϱ continetur. Invento autem angulo MOS $= \psi$, per formulam $\tang \psi = \sin(\varphi - \omega) \tang \varrho$, inde innotescit distantia OS $= \frac{z}{\cos \psi}$.

COROLL. 1.

71. Quoniam anguli ω et ϱ ita a se invicem pendent, ut sit $\frac{d\omega}{\tang(\varphi - \omega)} = \frac{d\varrho}{\sin \varrho \cos \varrho}$, patet si angulus AOT $= \omega$ maneat idem, etiam inclinationem ϱ perpetuo eandem fore: tum ergo motus puncti fiet in eodem plano. Criterium ergo motus in eodem plano per punctum fixum O transeunte facti in hoc consistit, ut anguli ω et ϱ sint constantes.

Digitized by Google

COROLL. 2.

72. Dum punctum mobile tranſit per planum aſſumtum, verſabitur in ipſa linea nodorum OT, eritque $tang\,(\Phi-\omega)=0$, unde uteunque inclinatio ϱ varietur, erit $d\omega=0$, ſeu linea nodorum quieſcet.

COROLL. 3.

73. Sin autem angulus TOM $=\Phi-\omega$ fuerit rectus, ob $tang\,(\Phi-\omega)=\infty$, uteunque linea nodorum moveatur, erit $d\varrho=0$, ſeu inclinatio per tempusculum dt non mutabitur.

SCHOLION.

74. Si hoc modo elementum ſpatii Ss exprimere, indeque celeritatem motus definire velimus, formula nimis fit complexa, quod etiam in directione uſu venit. Alio igitur modo calculus inſtitui poteſt, ut huic incommodo occurratur: ad datum ſcilicet tempus quaeratur primo poſitio lineae nodorum OT ſeu angulus AOT $=\omega$, tum vero inclinatio MNS $=\varrho$, deinde in ipſo plano TOS, in quo jam punctum moveri concipitur, angulus TOS $=\sigma$, una cum diſtantia OS $=v$. Quibus poſitis habebitur ON $=v\,cof\,\sigma$; SN $=v\,ſin\,\sigma$, hinc SM $=v\,ſin\,\sigma\,ſi\,\varrho$ et MN $=v\,ſi\,\sigma\,cof\,\varrho$. Ex his angulus SOM $=\psi$ colligitur, nempe $ſi\,\psi=ſi\,\sigma\,ſi\,\varrho$. Porro ob $tang$ TOM $=tang\,\sigma\,cof\,\varrho$, quia angulus TOM ante erat $\Phi-\omega$, hic differentialia $d\omega$ et $d\varrho$ ita a ſe invicem pendent, ut ſit

$$\frac{d\omega}{tang\,\sigma\,cof\,\varrho}=\frac{d\varrho}{ſi\,\varrho\,cof\,\varrho}\text{ ſeu }d\omega=\frac{d\varrho\,tang\,\sigma}{ſi\,\varrho}.$$

Poſtea vero hinc colligitur elementum ſpatii $Ss=\gamma(dv^2+vvd\sigma^2)$ ideoque celeritas ipſa $=\frac{1}{dt}\gamma(dv^2+vvd\sigma^2)$; verum directio motus Ss in plano TOS ita ad rectam OS inclinatur, ut ſit anguli OST tangens $=\frac{vd\sigma}{dv}$. In Aſtronomia autem, ubi haec evolutio potiſſimum adhibetur, angulus TOS vocari ſolet *argumentum latitudinis*, et angulus SOM *latitudo*: tum vero adjecto angulo TOM, cujus tangens eſt $=tang\,\sigma\,cof\,\varrho$, ad longitudinem nodi AOT $=\omega$, ſumma ſeu angulus AOM vocatur *longitudo*.

CAPUT

CAPUT II.

DE INTERNIS MOTUS PRINCIPIIS.

DEFINITIO. 9.

75. *Interna motus principia* complectuntur omnia ea, quae in ipsis corporibus insunt, in quibus ratio sive quietis sive motus eorum contineatur; exclusis omnibus causis externis, quae quicquam ad eorum motum vel quietem conferre queant.

EXPLICATIO. 1.

76. Cum in capite praecedente modum exposuerim, motum in genere spectatum ad calculum revocandi, nunc in ejus causas inquirere animus est. Sive enim corpus quiescat, sive moveatur, sive in quiete persevèret, sive motum accipiat, eumque quomodocunque continuet, haec phaenomena a certis causis proficiscantur necesse, est. Quicquid scilicet in corpore ratione motus vel quietis contingit, id temere ac sine ulla ratione fieri, nullo modo statui potest. Quaecunque autem sit ratio ea, vel in ipso corpore, de quo quaeritur, insit necesse est, vel extra id sit quaerenda; unde duo genera principiorum, quibus motus corporum definiatur, constitui debent, quorum illa *interna*, haec vero *externa* appellabo. Ad *interna* scilicet refero, quicquid in ipsis corporibus inest, in quo ratio sive motus sive quietis eorum contineatur; quae autem extrinsecus ita in corpora agunt, ut eorum status sive motus sive quietis afficiatur, ea ad principia motus *externa* erunt referenda. Cum autem in mundo omnia corpora quaquaversus aliis contingantur, arctissimoque nexu inter se conjungantur, in hoc complexu neutiquam discernere licebit, quid principiis sive externis sive internis seorsim sit tribuendum. Quare ne in hac investigatione confundamur, mente saltem opus erit, omnia corpora ambientia e medio tollere, ut id, de quo quaeritur, quasi solitarium relinquatur: atque tale corpus, sive fuerit in quiete sive in motu, quomodo deinceps se sit habiturum, erit explorandum; hincque motus principia interna cognoscentur, ab externis sollicite distinguenda.

Digitized by Google

EXPLICATIO. 2.

77. Dum autem corpus ita solitarium et extra omnem nexum cum aliis corporibus, quasi solum in mundo existeret, sum considerauturus, a nonnullis Philosophis statim clamabitur, hanc hypothesin in se contradictionem involvere, cum omnia in mundo ita arctissimo nexu sint inter se colligata, ut, uno sublato, tota compages destruatur. Verum hic minime de ullo corpore e mundo tollendo agitur, sed quomodocunque aliquod corpus ab aliis ob nexum illum afficiatur, ne Philosophus quidem prohibebitur, quaestionem instituere, quid de illo corpore esset futurum, si nullatenus ab aliis afficeretur? non ut deinceps affirmet, hoc revera esse eventurum, sed ut discat, quid eorum, quae ipsi revera eveniunt, externis causis sit tribuendum. Talibus sane abstractionibus Philosophi perpetuo utuntur, ac, si eas proscribere vellent, ad nullius certe veritatis cognitionem aditus relinqueretur. Si autem licet, corpus ita considerare, quasi a nullis aliis afficeretur; perinde se habebit, ac si alia corpora plane non adessent; quid igitur opus est, hac investigatione reliqua corpora omnia praeter id, de quo quaestio instituitur, tanquam existentia contemplari? cum eo nihil plane conferant. His perpensis nihil profecto obstare potest, quominus aliquod corpus tanquam prorsus solitarium, et quasi reliqua corpora omnia e mundo essent sublata, consideremus: ac, si quem forte haec hypothesis adhuc offendat, relinquat is omnia corpora, dum nobis concesserit, nullam ab iis actionem in id corpus, quod considerandum sumsimus, redundare.

AXIOMA. 1.

78. Omne corpus, etiam sine respectu ad alia corpora, vel quiescit vel movetur, hoc est vel absolute quiescit, vel absolute movetur.

EXPLICATIO. 1.

79. Hactenus sensus secuti, alium motum vel quietem non agnovimus, nisi respectu aliorum corporum, unde tam quietem quam motum *respectivum* diximus. Nunc vero si omnia corpora praeter unum mente tollimus, ejus quoque ad illa relatio aufertur, qua hactenus ejus quietem vel motum dijudicavimus: ubi primo quaeritur, utrum etiamnunc judicium de motu vel quiete corporis locum habere possit, nec ne? si enim hoc judicium non aliunde, nisi ex comparatione situs corporis propositi cum aliis corporibus, peti queat, his remotis etiam ipsum judicium

Digitized by Google

judicium tollatur, necesse est. Verum tametsi nos quietem vel motum cujuspiam corporis non nisi ex relatione ejus ad alia corpora cognoscimus, inde tamen concludere non licet, has res in se nihil esse, praeter meram relationem in mente institutam, nihilque in ipsis corporibus inesse, quod ideis nostris quietis ac motus respondeat. Quantitatem quippe nobis etiam aliunde cognoscere non licet, nisi ex comparatione: tamen sublatis his, quibuscum comparationem instituebamus, in corpore tamen relinquitur quasi fundamentum quantitatis, quoniam si in majus extenderetur vel in minus contraheretur, vera mutatio in eo facta esset censenda. Ita si etiam unicum corpus existeret, id vel quiescere vel moveri esset dicendum; cum neque utrumque simul, neque neutrum statui possit. Unde concludo, quietem et motum non esse meras res ideales, ex comparatione sola natas, ita ut in ipsis corporibus nihil, quod iis respondeat, insit; sed de corpore etiam solitario recte quaeri posse, utrum moveatur, an quiescat? ubi equidem eos Philosophos, qui omnia ad relationes revocant, minime pertimesco, cum iidem tantum motui tribuant, ut in vi motrice etiam aliquid substantiale agnoscant.

EXPLICATIO. 2.

80. Cum ergo etiam de unico corpore, nullo ad alia habito respectu, vel his adeo annihilatis, recte quaeri possit, quiescat ne, an moveatur? alterutrum necessario statui debet. Qualis autem haec futura sit quies, qualisve hic motus? cum mutatio situs respectu aliorum corporum hic nullum inveniat locum, ne cogitare quidem possumus, nisi spatium absolutum admittamus, in quo nostrum corpus locum quendam occupet, indeque in alia loca transire possit. Cum enim, secundum eosdem Philosophos, qui spatium absolutum maxime impugnant, plurimum intersit, utrum corpus quodpiam moveatur, an quiescat? nullo etiam ad alia corpora respectu habito dicant, in quanam alia re discrimen consistat. An dicent, id corpus revera moveri, quod situm suum respectu vicinorum continuo mutet? verum motus in his vicinis inesse posset, illo quiescente. An comparationem cum remotis institui oportebit? sed cum quibus primo? deinde cur cum hisce potius, quam cum aliis? Respondebunt tandem cum talibus, quae per se quiescant. Tum autem porro interrogo, non quomodo nos corpora per se quiescentia agnoscamus, sed quid sit per se quiescere? quando quidem nunc ad situm respectu aliorum non amplius confugere licet. Cogentur ergo tandem confiteri, ea corpora per se quiescere, quae in eo-

dem

dem ſpatii loco perſeverent, a quo cum omnis conſideratio aliorum corporum ſit remota, ad ipſum ſpatium abſolutum perveniunt, cujus reſpectu quae corpora vel quiescunt, vel moventur, ea abſolute vel quieſcere vel moveri dicimus.

SCHOLION.

81. Qui ſpatium abſolutum negare voluerit, in graviſſima incommodo delabitur. Cum enim motum et quietem abſolutam tanquam vanos ſine mente ſonos rejicere debeat, non ſolum leges motus, quae huic principio innituntur, rejicere debet, ſed etiam ne ullas quidem motus leges dari affirmare cogitur. Namque ſi ea, quae nos huc perduxit quæſtio, *quid in corpore a nexu reliquorum ſeparato ſit eventurum?* per ſe eſt abſurda, etiam ea, quae ab aliis in eo effici poſſent, per ſe incerta et indeterminabilia erunt, ſicque omnia temere ac ſine ulla ratione evenire eſſent ſtatuenda. Vel ſi haec effugere velit, motum omnem negare debebit, qua tamen in ſententia, etiamſi omnia argumenta contra eam allata feliciter refutaverit, minime acquieſcere poterit, cum ne dicere quidem valeat, quid ſit quies, quam per totum mundum conſtituerit. Sed contra tam apertas abſurditates pugnare firmiſſimum noſtrae ſententiae fundamentum videtur.

AXIOMA. 2.

82. Corpus, quod abſolute quieſcit, ſi nulli externae actioni fuerit ſubjectum, perpetuo in quiete perſeverabit.

EXPLICATIO.

83. Pronunciari hoc axioma ſolet de corpore quocunque, et per ſe tam perſpicuum videtur, ut nulla probatione indigeat. Quo autem vis ejus clarius intelligatur, punctum tantum ſeu elementum corporis conſideretur, quod ſi ſemel abſolute quieverit, perpetuo in quiete perſeverare debet: cum enim in eo nulla inſit ratio, cur in unam potius directionem moveri incipiat, quam in omnes alias, atque extrinſecus omnis cauſa motus adimatur, ſecundum nullam directionem motum concipere poterit. Nititur igitur quidem haec veritas principio ſufficientis rationis; interim tamen in ipſo puncto ſeu elemento corporeo cauſa permanentiae in quiete agnoſci debet, ita ut haec veritas pro neceſſaria ſit habenda. Quod autem de puncto quocunque eſt probatum, id quoque de omnibus junctim ſumtis, ideoque de quovis corpore, valeat neceſſe eſt; ſi enim ſingula ejus elementa quieſcant, et in quiete perſeverent, quin totum corpus ſit quieturum, dubitari

Digitized by Google

dubitari nequit. Interim circa hujusmodi corpus dubium moveri potest, quod fortasse ejus partes etsi quiescant, in se mutuo agant, motumque excitent: sed hoc etiam concessum nihil contra axioma facit, dum non solum totum corpus, sed etiam singulas ejus partes, ab omni actione externa liberamus: atque nobis sufficit, axioma hoc sensu admisisse, ut saltem omnes particulae corporum minimae quiescentes, quatenus in se invicem non agunt, in quiete persistant.

SCHOLION.

84. Quae lex hic circa quietem absolutam est sancita, neutiquam ad quietem respectivam extendi potest, Si enim corpus, cujus respectu corpusculum adhuc quieverat, subito concutiatur, hoc non amplius ejus respectu in quiete permanebit. Finge globum super tabula jacentem in navi uniformiter progrediente, qui respectu navis utique in quiete perseverabit; irruente autem navi in scopulum haec quies respectiva subito cessabit, globusque respectu navis motum concipiet, etiamsi ipse nullam causam externam fuerit passus. Necessario ergo haec lex ad quietem absolutam adstringitur, et cum lex sit necessaria, etiam relatio corporum ad locum quempiam, quem occupent, est necessaria. Scilicet cum haec lex quietis perseverantiam in eodem loco innuat, id aliter nisi de loco absoluto interpretari non licet, locus autem absolutus per ordinem inter coëxistentia definiri nequit, quia alioquin nostra lex ad quietem respectivam extenderetur.

AXIOMA. 3.

85. Corpus, quod absolute movetur, si nulli externae actioni subjiciatur, secundum eandem directionem motu aequabili progredi perget.

EXPLICATIO. 1.

86. Hoc axioma quoque de particulis corporum minimis, quasi punctis, proprie est intelligendum, neque enim de corporibus magnitudine praeditis valet, nisi omnes particulae pari celeritate secundum eandem directionem moveantur: si enim initio vel inaequales celeritates vel secundum diversas directiones accepissent, singulae particulae ne motum hunc quidem conservare possent, quin a se invicem dissipentur, et corporis compages dissolvatur. Quod autem non est metuendum, si omnium particularum celeritates fuerit aequales, in eandemque directionem tendant, vel si corpus ita fuerit exiguum, ut in eo talis dispa-

Digitized by Google

ritas locum habere nequeat. Conſideretur ergo hujusmodi punctum corporeum, quaſi ſolum exiſteret, ac ſi motum quemcunque acceperit, ita ut data celeritate ſecundum datam directionem moveri inceperit: atque hoc punctum, vi iſtius axiomatis, perpetuo tam eandem celeritatem, quam eandem directionem conſervabit. Quod cum ſit pro axiomate receptum, demonſtratione non indiget; interim tamen ratio haud difficulter afferri poteſt. Primo enim in directione nullam patietur mutationem, cum nulla eſſe poſſit ratio, cur in unam potius quam omnes alias plagas ab ea deflectat; aeque ſcilicet certe eandem directionem conſervabit, ac punctum quieſcens in quiete perſeverabit. Quod autem porro ad celeritatem attinet, niſi ea perpetuo eadem maneret, vel augeri vel minui eſſet dicenda, quorum neutrum ſine abſurditate dici poteſt: ſive enim augeretur ſive minueretur, id ſecundum certam legem fieri deberet; qualis autem haec futura eſſet lex, nullo modo concipi poſſet, cum nulli certe prae reliquis tanta praerogativa conveniret. Deinde ſi quis forte dicat, celeritatem in ratione temporum diminui; rem nondum definiret, determinare enim inſuper deberet, quanta celeritatis pars quovis tempore interiret, in quo quicquid aſſignaverit, cum nulla ratione fulciatur, nullo modo admitti poteſt; id quod etiam de quacunque alia lege valebit. Nihil aliud ergo relinquitur, niſi ut ſtatuamus, celeritatem quoque perpetuo eandem manere, perinde ac directionem.

EXPLICATIO. 2.

87. Huic axiomati, aeque ac praecedenti, opinio eorum Philoſophorum adverſatur, qui ſtatuunt, omnia corpora vi quadam occulta praedita eſſe, ſtatum ſuum motus vel quietis continuo mutandi: quae opinio, nulli rationi innixa, funditus eo ipſo evertitur, quod axiomati contradicat. Verum hoc axioma primo intuitu experientiae contrarium videri ſolet, cum in omnibus experimentis obſervemus, motum pedetentim retardari ac tandem penitus extingui, ita ut ex hoc fonte motus perpetuus negetur, dum vi noſtri axiomatis omnis motus perpetuus eſſe deberet. Verum in his ipſis experimentis cauſa retardationis manifeſto deprehenditur, cum in frictione tum in reſiſtentia aeris aliisque motus obſtaculis, quae nequaquam penitus tollere licet. Quas circumſtantias ſi probe perpendamus, ex his ipſis experimentis concludere debemus, ſi omnia haec obſtacula abeſſent, motum revera perpetuo eſſe duraturum. Quare cum in axiomate omnia obſtacula expreſſe ſint remota, tantum abeſt, ut haec experimenta ei adverſentur, ut potius ejus veritatem

ritatem ſenſibili argumento confirment. Ceterum probe cavendum eſt, ne hoc axioma, ad motum abſolutum adſtrictum, ad motus quoque reſpectivos extendatur.

DEFINITIO 10.

88. Dum corpus abſolute, vel quieſcit, vel aequabiliter in directum promovetur, *in eodem ſtatu perſeverare* dicitur.

COROLL. 1.

89. Ambo ergo axiomata allata ita enunciari poſſunt, ut corpora, quatenus ab aliis non impediuntur, in eodem ſtatu perſeverent.

COROLL. 2.

90. Si ergo corpus, quod ante quieverat, moveri incipit, vel, quod motum, mutationem ſive in celeritate ſive in directione patitur, id *ſtatum ſuum mutaſſe* eſt cenſendum.

SCHOLION.

91. Permanentia in quiete, ſive in motu aequabili rectilineo, non incongrue *ſtatus* appellatur, quia corpus ad eam ſponte determinatur: quamdiu enim corpus ſibi eſt relictum, neque ulli externae actioni ſubjectum, recte in eodem ſtatu manere dicitur, ſiquidem mutatio ſtatus actionem externam innuere videtur. Manſio ergo in eodem ſtatu maxime differt a manſione in eodem loco, cum qua tum demum convenit, quando corpus quieſcit. Ad hanc ſtatus ideam nos deduxerunt axiomata ante ſtabilita, neque viciſſim idea ſtatus, quae per ſe eſſet arbitraria, ad eorum cognitionem ducere potuiſſet; hinc autem ipſa haec idea fixam ſignificationem eſt adepta.

DEFINITIO. 11.

92. Proprietas illa corporum, quae rationem perſeverationis in eodem ſtatu in ſe continet, *inertia* appellatur: quandoque etiam *vis inertiae*.

COROLL. 1.

93. Inertia ergo vera eſt cauſa, cur corpora in eodem ſtatu perſeverent, cum enim cauſa in ipſo corpore ſit quaerenda, ea ſine dubio pro communi omnium corporum proprietate haberi debet.

Digitized by Google

COROLL. 2.

94. Quodſi ergo quaeratur, cur corpus abſolute quieſcens quieſcere, vel motum aequabiliter in directum moveri pergat, alia cauſa, praeter ejus inertiam aſſignari nequit; neque hujus phaenomeni cauſam usquam extra corpus quaeri licet.

SCHOLION.

95. Vox *inertiae* proprie ad eam corporum proprietatem indicandam, qua quieſcentia in quiete perſiſtunt, eſt adhibita, propterea quod in hoc ſtatu motui ſe quaſi opponunt: ſed quia corpora, in motu conſtituta, aeque ſe omni mutationi ratione, tam celeritatis, quam directionis, opponunt, hoc nomen haud inepte ad conſervationem ſtatus, ſive quietis, ſive motus, indicandam uſurpatur. Vocatur etiam paſſim *vis inertiae*, quia *vis* eſt aliquid mutationi ſtatus reluctans; ſed ſi vis definitur per cauſam quamcunque, qua ſtatus corporum mutatur, hic in iſta ſignificatione neutiquam accipi poteſt: ejus certe ratio maxime diſcrepat ab ea, qua deinceps vires agere oſtendemus. Quare ne hinc ulla confuſio oriatur, nomen *vis* omittamus, et hanc corporum proprietatem ſimpliciter nomine *inertiae* appellabimus.

EXPLICATIO.

96. Inertia ergo tantum cernitur in ſtatu corporum abſoluto, neque ad quietem reſpectivam aut motum reſpectivum referri poteſt. Corpus enim, reſpectu alterius, motu utcunque inaequabili et in linea curva incedere poteſt, cum tamen abſolute, vel quieſcat, vel uniformiter in directum moveatur, ideoque in ſtatu ſuo perſeveret: atque ſi nobis contigerit, corpus videre, de quo certi fuerimus, id nulli actioni externae eſſe ſubjectum, quomodocunque id nobis videbitur inaequaliter motu reſpectivo ferri, certe tamen pronunciare poterimus, id abſolute vel quieſcere, vel uniformiter in directum progredi. Quoniam autem quietem vel motum corporum nonniſi reſpectu aliorum nobis cognoſcere licet, ſenſus nobis ſtatum corporum abſolutum minime declarant, unde criterium ſtatus abſoluti inde petitum, quando corpora nulli actioni externae ſunt ſubjecta, in hac ſcientia maximi eſt momenti. Fieri tamen poteſt, ut hoc axioma etiam in motu reſpectivo locum habeat, quando ſcilicet corpus, cujus reſpectu motus aeſtimatur, ipſum in ſtatu ſuo manet, hoc eſt vel abſolute quieſcit, vel abſolute uniformiter in directum promovetur.

THE-

Digitized by Google

THEOREMA. 1.

97. Si corpus, cujus respectu aliorum corporum motum aestimamus, absolute vel quiescit, vel uniformiter in directum promovetur, tum axiomata pro quiete vel motu respectivo aeque valebunt, ac pro absoluto.

DEMONSTRATIO.

Considerentur duo corpora, quorum ambo motu absoluto uniformiter in directum ferantur, alterum describat tempore $= t$ spatium $Aa = at$, alterum vero eodem tempore spatium $Bb = bt$, ita ut illius celeritas sit $= a$, hujus vero $= b$: perinde autem est, sive hae rectae Aa et Bb sint in eodem plano, nec ne. Referatur jam motus corporis B ad corpus A, quod tanquam quiescens in A spectetur, et cum initio corpus B fuerit in B, elapso tempore $= t$ corpus B aestimabitur esse in $\mathfrak{C}$, ducta recta $A\mathfrak{C}$ ipsi ab parallela et aequali. Quare ob $b\mathfrak{C} = Aa = at$, erit $Bb : b\mathfrak{C} = b : a$ seu in ratione constante; et quia angulus $Bb\mathfrak{C}$ est quoque perpetuo idem, triangulum $Bb\mathfrak{C}$ est specie datum, hincque etiam angulus $bB\mathfrak{C}$ constans neque a tempore pendens, pariter ac ratio laterum Bb ad $P\mathfrak{C}$, quae sit ut b ad $\mathfrak{C}$, sicque $B\mathfrak{C} = \mathfrak{C}t$. Ex quibus concluditur, motum respectivum corporis B ita fore comparatum, ut ex B secundum rectam $B\mathfrak{C}$ sit progressum, temporeque t spatium describserit $B\mathfrak{C} = \mathfrak{C}t$, ideoque celeritatem habeat constantem. Consequenter corpus B, quod absolute uniformiter in directum moveri ponebatur, etiam respectu corporis A uniformiter in directum movebitur, dummodo hoc corpus A etiam absolute uniformiter in directum proferatur. Fig. 9.

COROLL. 1.

98. Si angulus $Bb\mathfrak{C}$ ponatur $= \zeta$, qui ubique est idem, etsi rectae Aa et Bb non sunt in eodem plano, erit $P\mathfrak{C} = t\sqrt{(aa - 2ab\cos\zeta + bb)}$, sicque celeritas respectiva $= \sqrt{(aa - 2ab\cos\zeta + bb)}$ anguli autem $bB\mathfrak{C}$ tangens est $= \frac{a\sin\zeta}{b - a\cos\zeta}$.

COROLL. 2.

99. Si corpus A quiesceret absolute, motus respectivus corporis B non differret a motu ejus absoluto. Unde si in mundo unicum esset

Digitized by Google

corpus abſolute quieſcens, reliqua corpora ad id referendo, eorum motum abſolutum cognoſcere liceret.

COROLL. 3.

100. Si in mundo eſſet corpus uniformiter in directum progrediens, ad quod reliqua corpora referantur, de iis, ſi nullam actionem externam ſubirent, affirmare poſſemus, ea etiam in ſtatu reſpectivo eſſe perſeveratura.

COROLL. 4.

101. Ob inertiam igitur corpora non ſolum in eodem ſtatu abſoluto, ſed etiam in eodem ſtatu reſpectivo, perſeverare conantur, dummodo corpus, cujus reſpectu eorum ſtatus aeſtimatur, abſolute vel quieſcat, vel uniformiter in directum promoveatur.

EXPLICATIO.

102. Si in univerſo ſol, vel potius ejus centrum, abſolute quieſceret, omniaque corpora ratione ſitus cum eo comparentur, inertia efficiet, ut omnia corpora, quae reſpectu centri ſolis quieſcunt, in quiete, quae autem moventur, in eodem motu aequabili in directum progredi conentur, quoniam hoc caſu eorum motus a reſpectivo non diſcreparet. At ſi, ut eſt veriſimile, non centrum ſolis, ſed potius centrum gravitatis commune totius ſyſtematis abſolute quieſcat, ejus reſpectu haec inertiae proprietas eſt intelligenda. Verum ad motum reſpectivum determinandum non ſufficit, unicum punctum tanquam fixum conſiderare, quoniam inde tantum diſtantias non vero directiones cognoſcere liceret, ſed tribus vel adeo quatuor punctis fixis adhuc eſt opus, uti ſupra oſtendimus. In mundo ergo ſtellae fixae tanquam totidem puncta fixa conſiderari ſolent, quae hypotheſis ſi vera eſſet, omnia corpora in mundo, quae earum reſpectu vel quieſcunt vel moventur, ob inertiam in eodem ſtatu eſſent perſeveratura. Atque hoc perinde eveniret, ſi omnes ſtellae fixae celeritatibus aequalibus ſecundum directiones parallelas per coelos uniformiter in directum ferentur. Verum in ipſis ſtellis fixis quaedam exiguae inaequalitates animadvertuntur, quarum rationem in hoc judicio haberi oportet, quod ergo pro maxime arduo merito habetur.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION.

103. Quodsi ergo ejusmodi corpora, vel potius, ne eorum magnitudo moram faceſſat, puncta quaſi corporea contemplemur, quae nulli actioni externae ſint expoſita, ea vel perpetuo quieſcent, vel continuo uniformiter in directum promovebuntur, idque non ſolum abſolute, ſed etiam reſpective, ſi modo corpus, ad quod referuntur, ipſum in eodem ſtatu abſoluto perſiſtat. Talem igitur motum, cujus ratio in ſola inertia eſt ſita, accuratius perpendere, ad calculumque revocare conveniet. Supra autem in genere tres pertractavimus caſus, quibus calculus ad motus determinationem accommodabatur. Primus erat, quo motus rectilineus ad directricem, cum ejus directione congruentem, referebatur; ſecundus, quo motus ad duas directrices reducebatur, qui cum in omni motu in eodem plano facto ſuccedat, etiam ad motum rectilineum uniformem, qualem hic examinamus, adhiberi poterit. Tertius caſus latiſſime patens, quo tribus directricibus ſumus uſi, etiam hunc, quem tractamus, in ſe complectitur, operaeque pretium erit diſpicere, quomodo formulae illae generales pro motu uniformi rectilineo futurae ſint comparatae. Quare ſecundum hos tres caſus motum aequabilem rectilineum ad calculum revocemus, hincque colligere poterimus, quid in omni motu inertiae ſit tribuendum. Quatenus enim deinceps motus cujuspiam corporis aliter ſe habere deprehendetur, ejus cauſa non in inertia ejus, ſed aliter extra corpus erit quaerenda.

PROBLEMA. 6.

104. Si motus rectilineus aequabilis ad unicam directricem cum ejus directione congruentem referatur, eum per calculum determinare, ſeu ad quodvis tempus ejus locum aſſignare. Fig. 2.

SOLUTIO.

Corpore, quod movetur, inſtar puncti conſiderato, fuerit id initio in A, et elapſo tempore t pervenerit in S percurſo ſpatio $AS = s$. Cum igitur celeritas in S ſit $= \frac{ds}{dt}$, eaque perpetuo maneat eadem, ſi ea ponatur $= c$, habebimus $\frac{ds}{dt} = c$, et integrando $s = ct$, quae formula jam ſupra pro motu aequabili eſt tradita. Sed ut in genere phaenomena hujus motus, ſine reſpectu ad quantitatem celeritatis habito, evolva-

evolvamus, sufficit notasse $\frac{ds}{dt}$ esse quantitatem constantem: unde ejus differentiale nihilo erit aequale. Sumto ergo temporis elemento dt pro constante, erit $\frac{dds}{dt} = 0$, ideoque etiam suppleta homogeneitate $\frac{dds}{dt^2} = 0$.

COROLL. 1.

105. Si igitur in motu rectilineo fuerit $\frac{dds}{dt^2} = 0$, is simul erit aequabilis, atque si is fuerit absolutus, vel absoluto aequipollens, inertiae est tribuendum, quod sit $\frac{dds}{dt^2} = 0$.

COROLL. 2.

106. Sin autem in motu rectilineo non fuerit $\frac{dds}{dt^2} = 0$, id indicio est, corpusculum non solam inertiam sequi, sed valorem ipsius $\frac{dds}{dt^2}$ causae cuipiam externae esse tribuendum, siquidem motus absolute spectetur.

PROBLEMA. 7.

107. Si punctum uniformiter in directum moveatur, ejusque motus ad duas directrices in eodem plano sitas referatur, determinare hujus motus phaenomena, ad calculum revocata.

SOLUTIO.

Fig. 3. Sit ergo spatium a puncto descriptum EF linea recta, in eodem cum directricibus OA et OB plano sita, atque elapso tempore t versetur mobile in S, unde directricibus parallelae agantur SY et SX, sitque $OX = x$ et $XS = y$. Quia nunc linea ESF est recta, erit $\frac{dy}{dx}$ quantitas constans: deinde labente tempusculo dt perveniat mobile in s, positisque $Xx = Sp = dx$, et $ps = dy$ item angulo $AOB = \zeta$, erit $Ss = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + 2dx\,dy\cos\zeta)}$ et celeritas in $S = \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2 + 2dx\,dy\cos\zeta)}}{dt}$.

Cum autem sit $\frac{dy}{dx}$ quantitas constans, posito $dy = a\,dx$, erit celeri-

tas

Digitized by Google

$vds = \frac{dx}{dt}\, r(1+aa+2a\cos\zeta)$, quae etiam per hypothesin est constans. Quocirca tam $\frac{dx}{dt}$ quam $\frac{dy}{dt}$ erunt quantitates constantes, ideoque earum differentialia evanescent, hinc si motus sit rectilineus et aequabilis, sumto elemento dt constante, erit tam $\frac{ddx}{dt^2} = 0$, quam $\frac{ddy}{dt^2} = 0$, ac vicissim si hae formulae evanescant, erunt $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ quantitates constantes, ideoque etiam $\frac{dy}{dx}$, unde motus erit rectilineus et aequabilis.

COROLL. 1.

108. Si ergo punctum nullam actionem externam patiatur, motumque suum per solam inertiam prosequatur, certe erit tam $\frac{ddx}{dt^2} = 0$, quam $\frac{ddy}{dt^2} = 0$, quippe quibus conditionibus motus rectilineus et aequabilis indicatur.

COROLL. 2.

109. Quare si motus rectilineus aequabilis secundum directiones binarum directricium OA et OB resolvatur, utriusque motus celeritas erit constans: ac si vicissim uterque hic motus lateralis fuerit aequabilis, etiam motus verus non solum aequabilis, sed etiam rectilineus erit.

COROLL. 3.

110. Contra igitur, si in quopiam motu, ad directrices OA et OB relato, vel non fuerit $\frac{ddx}{dt^2} = 0$, vel non $\frac{ddy}{dt^2} = 0$, vel etiam neutrum, hoc indicio est, corpus non soli inertiae esse relictum, sed ab aliqua actione externa affici.

SCHOLION.

111. Quamdiu ergo corpus soli inertiae obediens uniformiter in directum movetur, sive absolute sive respectu corporis, quod ipsum in eodem statu absoluto perseverat; quomodocunque ejus motus secundum duas directrices resolvatur, id quod utique infinitis modis fieri

 potest,

Digitized by Google

potest, semper uterque motus lateralis erit uniformis, hoc est talis, quem corpus vi inertiae prosequeretur. Atque haec est insignis proprietas hujus resolutionis, quod axiomata ad motum verum adstricta etiam in his motibus lateralibus, etsi fictis tantum, locum habeant, ex quo in calculum eximia commoda redundabunt. Majoris vero adhuc momenti haec resolutio agnoscetur, quando infra ostendemus, ab actione virium hos motus ex resolutione natos et ideales tantum perinde affici, ac si motus essent veri. Verum idem quoque in genere est tenendum de resolutione secundum ternas directiones, uti ex sequente problemate patebit.

PROBLEMA. 8.

112. Si punctum uniformiter in directum moveatur, ejusque motus ad ternas directrices quascunque referatur, determinare hujus motus phaenomena ad calculum revocata.

SOLUTIO.

Fig. 4. Constitutis tribus directricibus OA, OB, OC, sit ESF linea recta a puncto motu uniformi percursa, elapsoque tempore t versetur in S, pro quo directricibus parallelae sint coordinatae $OX = x$, $XY = y$ et $YS = z$, sive sint inter se normales sive obliquae. Quoniam ESF est linea recta, ejus etiam projectio TY in plano AOB erit linea recta, unde $\frac{dy}{dx}$ est quantitas constans. Simili modo, quia projectio in plano AOC est recta, erit quoque $\frac{dz}{dx}$ quantitas constans, itemque $\frac{dz}{dy}$. Ponatur nunc spatiolum temporsculo dt descriptum $Ss = ds$, erunt etiam $\frac{ds}{dx}$, $\frac{ds}{dy}$, $\frac{ds}{dz}$, quantitates constantes, quae conditiones inde sequuntur, quod linea ESF est recta. Ob motus porro aequabilitatem celeritas $\frac{ds}{dt}$ est constans, sicque constantes erunt istae quantitates $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$, quibus tam aequabilitas motus, quam rectitudo spatii continetur. Sumtis ergo differentialibus, posito elemento dt constante, sequentes formulas nihilo aequales esse oportet;

$$\frac{ddx}{dt^2} = 0, \quad \frac{ddy}{dt^2} = 0, \text{ et } \frac{ddz}{dt^2} = 0;$$

quibus adeo natura motus uniformis rectilinei determinatur.

COROLL.

Digitized by Google

COROLL. 1.

113. Quando ergo punctum nulli actioni externae subjicitur, ejusque motus absolutus ad tres directrices quascunque refertur, certe hae tres aequationes locum habebunt: $\frac{ddx}{dt^2} = 0$; $\frac{ddy}{dt^2} = 0$, et $\frac{ddz}{dt^2} = 0$, quarum ratio in inertia corpusculi est collocanda.

COROLL. 2.

114. Quare si motus fuerit rectilineus et aequabilis, quomodocunque is secundum ternas directiones fixas resolvatur, terni motus laterales etiam erunt aequabiles, cum sint $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ quantitates constantes.

COROLL. 3.

115. In motu ergo absoluto motus laterales, in quos secundum ternas directiones fixas resolvitur, etiamsi sint ficti, tamen legem inertiae sequuntur, ita ut hoc capite tanquam veri motus spectari possint.

SCHOLION.

116. Haec igitur sunt principia motus interna, quae ea proprietate communi innituntur, quae *inertiae* nomine appellari solet. Atque ex his principiis motum punctorum corporeorum, quando nulli actioni externae subjiciuntur, determinare valemus. Omnia nempe huc redeunt, ut si tale corpusculum quiescat absolute, id perpetuo in quiete sit perseveraturum, sin autem motum acceperit absolutum quemcunque, id perpetuo eadem celeritate in directum sit progressurum. Hic quidem corpora mota tanquam infinite parva sum contemplatus, sed tamen ea, quae sunt stabilita, ad corpora cujusvis magnitudinis accommodare licet. Verum antequam eo progrediamur, necesse est, quid vires externae efficere valeant, expendere, quam ergo investigationem etiam pro punctis seu particulis corporum minimis suscipiamus.

Digitized by Google

CAPUT III.

DE CAUSIS MOTUS EXTERNIS SEU VIRIBUS.

DEFINITIO. 12.

117. Quicquid ſtatum corporum abſolutum mutare valet, id *vis* vocatur: quae ergo, cum corpus ob cauſas internas in ſtatu ſuo eſſet permanſurum, pro cauſa externa eſt habenda.

COROLL. 1.

118. Cauſa ergo, qua vel corpus abſolute quieſcens ad motum incitatur, vel in corpore abſoluto motu lato ejus celeritas ſive directio mutatur, vis appellatur.

COROLL. 2.

119. Eſt ergo vis cauſa externa, ſtatum abſolutum corporum mutare valens; et quamdiu talis cauſa externa non accedit, corpus in eodem ſtatu abſoluto ſive quietis ſive motus aequabilis in directum perſeverat.

EXPLICATIO.

120. In corpore ipſo nihil eſt, quod ſuum ſtatum mutare conetur; ob hoc enim ipſum dicimus, corpus in eodem ſtatu manere, quamdiu proprium quaſi inſtinctum ſequitur, neque ullam actionem externam ſubit. Quando ergo evenit, ut ſtatus abſolutus cujuspiam corporis mutetur, cauſa certe non in ipſo corpore quaeri poteſt, alioquin enim nulla ſtatus mutatio contingeret, ſiquidem ſtatum ita definivimus, ut corpus in eodem ſtatu perſeverare dicatur, quamdiu a nullis cauſis externis ſollicitatur. Cauſa autem illa interna, ob quam corpus in eodem ſtatu perſeverat, eſt ejus inertia, in qua cum ratio omnium, quae in ipſo corpore ad quietem ſive motum ſpectant, contineatur, ea non ſolum penitus tolleretur, ſed etiam ne ſtabiliri quidem potuiſſet; ſi quicquam in ipſo corpore ineſſet, quod ad ſtatum ejus mutandum tenderet. Quare ſi vocabulum *vis* ad eas cauſas adſtringamus, quae ſtatum corporum abſolutum mutare valeant, nulli certe corpori vis tribui poteſt, ſuum ſtatum mutandi, ſed quoties ſtatus cujuspiam corporis

Digitized by Google

poris mutatur, causa mutationis seu vis semper extra id existat necesse est.

SCHOLION. 1.

121. Hic ergo quaestio oritur, *unde vires, quibus corporum statum perpetuo mutari observamus, nascantur? an, cum non in corporibus sint sitae, substantiis immaterialibus erunt tribuendae?* Aliter quidam Philosophi argumentari solent; cum enim status corporum continuo mutetur, concludunt mutationis hujus causam in ipsis corporibus contineri, hincque porro inferunt, singula corpora vi esse praedita statum suum jugiter mutandi, sicque principium inertiae funditus evertunt. Verum in hoc ratiocinio insignem saltum committunt; priorem enim partem, quod causa mutationis status in corporibus sit sita, concedentes, alteram partem omnino negamus, quod singula corpora vi sint praedita suum statum mutandi. Causam scilicet mutationis status tantum ab eo corpore removemus, cujus status mutatur, eamque in aliis corporibus quaerendam esse affirmamus; atque adeo corporibus vim tribuimus aliorum statum mutandi, non suum. Quod tantum abest, ut absurdum videri debeat, ut potius ex hoc ipso, quod singula corpora facultate sint praedita in suo statu perseverandi, sequatur, in corporibus vim inesse debere aliorum statum mutandi. In congerie enim plurium corporum, nisi vel omnia quiescant, vel aequalibus celeritatibus secundum eandem directionem ferantur, necessario evenit, ut singula in statu suo salvo reliquorum statu permanere nequeant. Concipiamus enim duo corpora A et B, quorum illud ad hoc pervenerit, fieri certe nequit, ut corpus A motum suum continuet, quin simul corpus B de statu suo quietis deturbetur; neque ut corpus B in quiete persistat, quin simul corporis A motus sistatur. Quare cum ambo simul statum suum conservare nequeant, necesse est, ut vel utriusque vel saltem alterutrius status mutetur, idque ob hoc ipsum, quod utrumque in statu suo perseverare conatur. Consequenter ipsa singulorum corporum facultas in statu suo perseverandi vires suppeditat, quibus aliorum status immutari possit.

SCHOLION. 2.

122. Verum si porro quaeramus, cur ambo illa corpora A et B simul quodque in suo statu perseverare non possint: eam in impenetrabilitate manifesto sitam esse deprehendimus. Nam si illa corpora se invicem penetrare possent, ita ut alterum alteri liberrimum transitum per

Digitized by Google

ſuam quaſi ſubſtantiam permitteret, nihil certe obſtaret, quo minus corpus A motum ſuum proſequeretur, corpusque B in quiete perſiſteret, ſicque utrumque inertiae obtemperaret. Cauſa ergo virium illarum, quibus ſtatus corporum mutatur, non in ſola inertia, ſed inertia cum impenetrabilitate conjuncta eſt conſtituenda. Quoniam vero impenetrabilitas nonniſi de corporibus praedicari poteſt, corpora autem neceſſario inertia ſunt praedita, impenetrabilitas per ſe inertiam involvit, ita ut impenetrabilitas ſola recte pro fonte omnium illarum virium, quibus ſtatus corporum mutatur, habeatur. Hanc igitur corporum proprietatem, tanquam originem omnium virium, accuratius perpendere conveniet.

DEFINITIO 13.

123. *Impenetrabilitas* eſt ea corporum proprietas, qua duo plurave corpora in eodem loco ineſſe nequeunt, atque adeo ad minima corporum elementa extenditur, ita ut ne duo quidem elementa in eodem loco exiſtere poſſint.

COROLL. 1.

124. Per hanc ergo proprietatem omnia corpora extra ſe invicem exiſtant neceſſe eſt, cum ne minimis quidem partibus in ſe invicem penetrare poſſint.

COROLL. 2.

125. Cum impenetrabilitas ſit proprietas corporum neceſſaria, nulla vis prorſus datur, quae valeat duo corpora in eundem locum compingere, atque maxima vis tali effectui producendo aeque eſt impar ac minima.

COROLL. 3.

126. Quomodocunque ergo ſtatus corporum a viribus mutentur, tamen nunquam evenire poteſt, ut ab iis duo elementa ſeu puncta corporea in eundem locum compingantur.

EXPLICATIO. 1.

127. Perperam contra hanc generalem corporum proprietatem adducuntur quaedam experimenta, quibus corpora ſe invicem penetrare videntur et dicuntur. Dicitur ſcilicet globus explosus in argillam penetrare, ſed hic iſta vox *penetrare* alio ſenſu accipitur: nulla enim pars globi

Digitized by Google

globi in ejusmodi locum pertingit, ubi revera pars argillae existat; sed quia jam globus locum occupat, ante ab argilla occupatum, vox penetrationis adhibetur. Hic autem tantum negamus, corpus locum quempiam occupare posse, qui simul ab alio occupetur, non qui ante ab alio fuerit occupatus. Simili modo, quando aqua spongiam penetrare dicitur, aqua tantum interstitia seu poros spongiae replet, qui cum ante a substantia spongiae non distinguerentur, ipsa spongia penetrata videtur, sed re accuratius examinata deprehendimus, nusquam vel minimam spongiae particulam existere, ubi simul aequae particula existat. Eodem modo res se habet in corporibus, quae se in minus spatium comprimi patiuntur, nunquam enim duae particulae in eundem locum redigunturtur, sed intervalla inter particulas coarctantur, ea materia adeo, qua ante implebantur, inde expulsa. His igitur probe perpensis nullum dubium relinquitur, quin corpora sint impenetrabilia, seu, quin omnino fieri nequeat, ut duo corpora simul in eodem loco existant.

EXPLICATIO. 2.

128. Idea igitur impenetrabilitatis nititur idea *loci*, sine qua omnino consistere nequit. Si enim locus nihil esset a corporibus diversum, quid esset impenetrabilitas, nullo modo intelligi posset. Dicunt quidem Philosophi, qui loci realitatem negant, corpora necessario extra se existere; sed quid sit *extra* vel *intra*, si locus sine corporibus nihil sit, minime definiunt. Quae supra de quiete et motu absoluto sunt exposita, abunde evincunt, locum non esse merum mentis conceptum, et nunc ex impenetrabilitate luculenter perspicimus, ideam loci plus in se complecti, quam solam corporum relationem mutuam, ita ut sublatis corporibus etiam *loco* nullus locus relinqueretur. Est ergo locus aliquid a corporibus non pendens, neque merus mentis conceptus; quid autem extra mentem realitatis habeat, definire non ausim, etiamsi in eo aliquam realitatem agnoscere debeamus. Quando autem Philosophi omnes realitates in certas classes distribuunt, atque perhibent, ad nullam earum locum referri posse; malim credere, has classes ab iis perperam esse constitutas, cum res eo referendas non satis cognovissent. Simili modo ratio *temporis* est comparata, in quo nihil reale inesse autumant, cum tamen vocibus *ante* et *post* haud parum realitatis tribuant. Quemadmodum ergo vera idea loci et spatii plus in se continet, quam ordinem coexistentium, ita quoque vera idea temporis plus in se conrinet quam ordinem successivorum; quamvis concesserim, primas harum rerum ideas nobis inde esse natas.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION. 1.

129. Stabilita impenetrabilitatis notione, non equidem dubitaverim, in ea eſſentiam corporum collocare: temerarium hoc vidębitur, cum omnes fere Philoſophi unanimiter clament, eſſentiam corporum nobis penitus eſſe ignotam. Hoc certe de corporum ſpeciebus facile concedo, neque puto, auri vel argenti eſſentiam nobis eſſe cognitam. In quacunque enim re quis auri eſſentiam conſtituerit, incertum eſt, an ea auro in omni ſtatu conveniat; et annon aliud corpus, quod non ſit aurum, eadem ſit praeditum, atque haec ipſa incertitudo aſſertum illud deſtruit; ſed quando de corpore in genere quaeſtio eſt, talem objectionem non pertimeſco; qui enim negare voluerit, eſſentiam corporum in impenetrabilitate ſitam eſſe, is negare vel ſaltem dubitare debet, aut omnia corpora eſſe impenetrabilia, aut viciſſim, quicquid ſit impenetrabile, id eſſe corpus. Quae enim proprietas omnibus ac ſolis corporibus convenit, quin in ea corporum eſſentia ſit conſtituenda, nemo Philoſophorum dubitat. Primo autem omnia corpora eſſe impenetrabilia certiſſimum eſt, ſi enim darentur res extenſae atque etiam inertia praeditae, quae ſcilicet ſibi relictae vel quieſcerent, vel uniformiter in directum moverentur, tamen ſi impenetrabilitate carerent, nemo eas inter corpora eſſet relaturus, hinc eſt, quod umbrae et ſpectra per machinas opticas repraeſentata non pro corporibus habeantur. Deinde quicquid impenetrabile eſt, id quoque extenſum et inertia praeditum ſit neceſſe eſt; ſine extenſione enim impenetrabilitas concipi nequit, tum vero non mobile eſſe non poteſt, poſita autem mobilitate inertia ponitur. Quare, quicquid eſt impenetrabile, nulla certe foret cauſa, cur id non pro corpore habeatur.

SCHOLION. 2.

130. Verum gravior contra hanc ſententiam objectio moveri poteſt, inde petita, quod impenetrabilitatem per ſe nobis percipere non liceat, quippe cujus notio neceſſario plura corpora in ſe involvit. Atque hinc facile concedo, definitionem, qua corpus diceretur ſubſtantia impenetrabilis, regulis Philoſophandi non eſſe conformem, non quod eſſentia male in impenetrabilitate ponatur, ſed quia haec definitio ſine antecedente notione corporis intelligi nequit. Si enim quaeratur, quid ſit ſubſtantia impenetrabilis? ac reſpondeatur, quae a corporibus, hoc eſt, aliis ſubſtantiis impenetrabilibus penetrari nequeat, negotium minime conficitur. Sed quamvis hanc proprietatem nonniſi ex comparatione

Digitized by Google

paratione corporum mutua cognoſcamus, tamen dubium eſt nullum, quin ratio impenetrabilitatis in proprietate quadam interna cujusque corporis ſit ſita, ita ut omnia corpora certa proprietate quadam ſint praedita, qua efficiatur, ut inter ſe fiant impenetrabilia. Haec fortaſſe proprietas non inepte *ſoliditas* vocabitur, qua quaſi materialitas conſtituatur, quae proinde recte pro eſſentia corporum habebitur. Fateor equidem, rem fere eo redire, ac ſi dicerem, eſſentiam corporum in *corporietate* conſiſtere. Attamen impenetrabilitas nos ad originem virium manuducit, ſicque a nudo ſono egregie diſtinguitur; id quod uberius exponi meretur.

THEOREMA. 2.

131. Si duo corpora ita coeunt, ut neutrum ſtatum ſuum conſervare poſſit, quin per alterum penetrēt, tunc in ſe mutuo agunt, viresque exerunt, quibus eorum ſtatus mutetur.

DEMONSTRATIO.

Cum corpora in ejusmodi ſtatu ponantur, ut in eo perſeverare nequeant, niſi ſe mutuo penetrent; quoniam penetratio nullo modo fieri poteſt, neceſſe eſt, ut in eorum ſtatu mutatio eveniat. Quia autem corporum ſtatus ſine viribus externis mutari nequit, et in caſu poſito mutatio ſtatus actu producitur, vires ſine dubio adeſſe debent, quibus hic effectus eſt tribuendus. Quaeritur ergo, unde hae vires oriantur? utrum ex ipſa corporum impenetrabilitate, an aliunde? ſi dicas, eas aliunde oriri, origo mente ſaltem tolli poſſet, ſalva impenetrabilitate, ideoque nulla mutatio ſtatus contingeret, corporaque proinde ſe mutuo penetrarent, quod cum ſit abſurdum, neceſſe eſt, iſtas vires ab ipſa impenetrabilitate ſuppeditari. Statim ſcilicet atque corpora in ſtatu ſuo perſeverare nequeunt, quin ſe mutuo penetrent, ipſa impenetrabilitas vires ſuppeditat, quibus eorum ſtatus mutetur, ut penetratio evitetur; et dum hae vires effectum ſuum exerunt, corpora in ſe invicem agere dicuntur, alterumque alterius ſtatum mutabit.

COROLL. 1.

132. Corpora igitur in ſe invicem agunt, quando ita congrediuntur, ut ſingula in ſtatu ſuo perſeverare nequeant, quin ſe mutuo penetrent; unde diſtincta notio actionis corporum, quae apud plerosque auctores nimis obſcura eſſe ſolet, eſt haurienda.

Digitized by Google

COROLL. 2.

133. Vires, quibus hoc casu status corporum mutatur, ab eorum impenetrabilitate nascuntur, tantumque effectum producunt, ut penetratio impediatur, semperque hae vires tantae erunt, ut huic fini sufficiant.

COROLL. 3.

134. Magnitudo ergo harum virium non ex impenetrabilitate, quippe quae nullius quantitatis est capax, determinatur, sed ex mutatione status, quae effici debet, ne corpora se mutuo penetrent.

COROLL. 4.

135. Hae ergo vires, ex impenetrabilitate ortae, eatenus tantum se exerunt, quatenus penetrationi est occurrendum, et quantumvis magnis ad hoc viribus opus fuerit, eas impenetrabilitas semper suppeditabit, quandoquidem penetratio nullatenus contingere potest,

EXPLICATIO. 1.

136. Quando quodpiam corpus ab aliis impeditur, quo minus vel si quiescat, in quiete permaneat, vel si moveatur, uniformiter in directum progrediatur; tam ejus ipsius, quam illorum impenetrabilitas vires ad mutationem necessarias gignit, nam si vel illud vel haec essent penetrabilia, nullis opus esset viribus, ita ut hae vires non ex impenetrabilitate unius tantum corporis, sed duorum pluriumve conjunctim nascantur. Impenetrabilitas certe sine resistentia invincibili concipi nequit, ideoque jure pro fonte illarum virium, quibus penetratio avertitur, habetur. Quae ergo hactenus sunt tradita huc redeunt, ut corpora ob inertiam insitam in statu suo quietis vel motus aequabilis rectilinei tamdiu perseverent, quamdiu nulla penetratio est metuenda, simul ac vero statum suum continuare nequeunt, quin penetratio fieret, impenetrabilitas tantas suppeditat vires, quae ejusmodi mutationem in eorum statu producant, ut omnis penetratio avertatur. Quare cum mundus sit plenus corporibus, quorum status ita est diversus, ut si in eo quaeque vel per minimum temporis spatium manerent, ubique penetrationes essent secuturae, hinc uberrimus fons virium ad statum corporum continuo mutandum oritur. Quanquam ergo infinitam quasi copiam virium in mundo concedimus, easque adeo a corporibus oriri statuimus, ab eorum tamen opinione maxime abhorremus, qui corporibus

Digitized by Google

ribus conatum ſtatum ſuum continuo mutandi tribuunt, cum iſtae vires non directe ad ſtatum mutandum, ſed ad penetrationem avertendam tendant, quae niſi periclitaretur, nullae ejusmodi vires in mundo exiſterent.

EXPLICATIO. 2.

137. Iam quaeſtio hic oritur, num omnes plane vires, quarum effectus in mundo miramur, ex hoc fonte oriantur? hoc eſt, an ſtatus corporum a nullis aliis viribus praeter has, quas periculum penetrationis ſuppeditat, mutari poſſit? Ac primo quidem ad Mechanicam non pertinet definire, utrum ſpiritus in corpora agere eorumque ſtatum mutare valeant? interim in corporibus nihil plane invenimus, quod actioni ſpirituali adverſetur; atque actio in corpora non tam arduum opus videtur, ut ſoli omnipotentiae divini Numinis ſit tribuendum, cum adeo viliſſimis corporibus ſit concedendum. Quin potius fateri debemus, nullam nos perſpicere rationem, cur animis potentiam in corpora agendi denegemus, etiamſi modum, quo agant, minime aſſignare poſſimus. Verum an corpora alio inſuper modo in ſe mutuo agere valeant, praeter eum, quem declaravimus? id quidem negandum videtur. Si enim agerent, etiamſi nullum periculum penetrationis adeſſet, *in diſtans* agerent, neque pateret, quomodo conſervatio ſtatus inde turbari poſſet; deinde vero, quia illa actio non ab impenetrabilitate proficisceretur, perinde agere deberent, quamvis corpora eſſent penetrabilia, quomodo autem actio ſubſiſtere poſſet, non liquet. Ex quo maxime veriſimile videtur, corpora in ſe mutuo alias vires non exerere, niſi quibus penetratio avertatur, et cum hae vires minores eſſe nequeant, quam hic ſcopus exigit, ita etiam majores ſtatui non poſſunt, quam ſufficientes. Ceterum hic nihil certi ſtatuere licet, ſed contentos nos eſſe oportet, foecundum fontem virium in mundo operantium detexiſſe, ex quo ſimul actio corporum mutua, a plerisque Philoſophis vel negata vel craſſiſſimis tenebris involuta, ſatis luculenter perſpiciatur. Quantae autem quovis caſu ſint iſtae vires ab impenetrabilitate corporum profectae, et quomodo iis ſtatus corporum immutetur, definiri nequit, niſi ante in genere in actionem virium inquiſiverimus.

SCHOLION.

138. Perſpecta ergo virium origine, recte aſſumere poſſumus, dari in mundo vires, quibus eorum ſtatus mutetur. Ac de hujusmodi quidem viribus, quatenus in corpora agentes ſe mutuo in aequilibrio te-

Digitized by Google

nent, in Statica vel Dynamica tractari solet, ubi earum mensura, qua aliae aliis non solum sunt vel majores vel minores, sed etiam datam inter se rationem habere docentur. Referendae scilicet sunt vires ad genus quantitatum, cum ratione quantitatis inter se comparari possint: atque ex Statica intelligimus, quando duae vires inter se aequales, vel secundum datam rationem inaequales sint censendae. Quo igitur facilius earum effectum in statu corporum mutando exploremus, non solum a corpusculis infinite parvis, in quae agant, exordiri conveniet, quandoquidem hinc etiam tota motus tractatio est ducta: sed etiam actionem tantum momentaneam virium scrutabimur, ita ut quantum singulis temporis elementis efficiant, simus investigaturi, quoniam fieri posset, ut successu temporis quantitas virium mutaretur. At cum principia hinc pro corpusculis infinite parvis et pro temporis intervallo infinite parvo fuerint stabilita, haud difficile erit per integrationes ad motus corporum per finitum tempus mutatos progredi.

DEFINITIO. 14.

139. *Effectus alicujus vis, in dato corpusculo dato tempusculo productus*, vocatur id spatiolum, per quod vel corpusculum quiescens transfertur, vel si moveatur, ultra id spatium, quod ob inertiam esset percursurum, propellitur.

COROLL. 1.

140. Haec ergo effectus determinatio non est absoluta, sed ad certum corpus certumque tempus adstricta, quorum utrumque ut infinite parvum spectatur, ut hoc modo omnis variabilitas aliunde accessura tollatur.

COROLL. 2.

141. Si igitur posito corpusculo et tempusculo spatiolum fuerit idem, effectus quoque erit idem, unde et vis pro eadem est habenda, hocque sive corpusculum quiescat, sive jam moveatur.

COROLL. 3.

142. Scilicet si corpusculum movetur, vis eatenus tantum aestimatur, quatenus per certum spatiolum ultra id, quod motu jam insito percursurum esset, propellitur, vicissim enim ex quantitate hujus spatioli vis aestimabitur.

EXPLI-

Digitized by Google

EXPLICATIO.

143. Cum in Statica, unde virium menſuram haurimus, corpora, quibus applicantur, in quiete conſiderentur, nihil inde circa earum menſuram, quando in corpora mota agunt, definitur, ita ut iſta menſura in Mechanica nobis integra relinquatur. Concipiamus ergo primo punctum ſeu corpusculum in S quieſcens, quod a vi quadam $= p$ ſollicitetur in directione $S\sigma$, atque effectus in hoc conſiſtet, ut id dato tempusculo dt per certum quodpiam ſpatiolum $S\sigma = d\omega$ proferatur, quod quomodo pendeat tam a vi p quam a tempusculo dt, deinceps definiemus. Hic tantum obſervo, ſi idem corpusculum habeat motum, quo tempusculo dt deſcripturum eſſet ſpatium $Ss = ds$, illud tum ab aequali vi $= p$ ſollicitari eſſe cenſendum, quando eodem tempusculo dt ultra s per aequale ſpatiolum $s\sigma = d\omega$ profertur, ſiquidem vis p ſecundum ipſam motus directionem Ss urgeat. Sin autem vis in plagam contrariam urgeret, ab eaque corpusculum eodem tempusculo dt per aequale ſpatiolum $s\sigma = d\omega$ repelleretur, tum vis illi $= p$ aequalis eſſet cenſenda. Generatim autem, ſi corpusculum habens motum, quo tempusculo dt percurſurum eſſet ſpatium $Ss = ds$, ſollicitetur a vi quadam ſecundum directionem SV, hac efficietur, ut elapſo tempusculo dt corpusculum non in s ſed in σ reperiatur, ita ut quaſi ex s in σ per ſpatiolum $s\sigma$ directioni vis SV parallelum translatum concipi queat, etiam ſi revera ob actionem continuam ex S in σ per viam aequabilem pervenerit, ac tum demum iſta vis SV illi p, quae idem corpusculum quietum ſollicitabat, aequalis eſt cenſenda, cum hoc ſpatiolum $s\sigma$ aequale fuerit illi $S\sigma$ (fig. 10.)

Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 12.

Fig. 13.

EXPLICATIO. 2.

144. Pro viribus ergo, quibus corpora jam mota ſollicitantur, hanc demetiendi rationem ſtabilimus, ut eas aequales judicemus iis, quae in iisdem corporibus quieſcentibus eodem tempore eundem effectum eſſent praeſtaturae. Haec autem ratio non indiget probatione, quia definitioni innititur, nobisque adhuc liberum fuerat, eam conſtituere. Si enim pro motu quocunque ſpatiola $s\sigma$ (figg. 11, 12, 13), aequalia fuerint ſpatiolo $S\sigma$, per quod idem corpusculum quieſcens tempusculo eodem profertur a vi p; huic etiam illas vires aequales appellamus, quam libertatem rationi conſentaneam eo minus nobis quisquam adimere poteſt, cum haec appellatio quoque cum communi loquendi more conveniat. Neque enim ſtatuo, easdem impulſiones,

Digitized by Google

quas in mundo obſervamus, pares effectus in eodem corpore ſive moto ſive quieſcente producere, atque omnino, concedo, a flumine idem corpus, ſive moveatur ſive quieſcat, longe aliter impelli. Verum hoc ipſum exemplum noſtram menſurae rationem egregie confirmat: dum enim affirmamus, idem corpus a flumine aliter impelli, prout vel quieverit, vel fuerit motum, vires inaequales agnoſcimus, ac pro corpore moto vim praeciſe tantam aeſtimamus, quanta in corpore quieſcente eundem effectum eſſet productura. Hinc etiam, quando de corporibus in flumine motis agitur, pro quovis celeritatis gradu vis, quam flumen actu in corpus exerit, ſollicite determinatur, ac ſemper tanta ſtatuitur, quanta in eodem corpore, ſi quieſceret, eundem effectum produceret. Quare diviſio virium in abſolutas et relativas in ſuperioribus libris facta, proprie huc non pertinet, cum quovis caſu et pro quovis momento ea vis in calculum introduci debeat, quae corpus motum aeque, ac ſi quieſceret, impellit. In contemplatione autem virium ipſarum plurimum intereſt noſſe, utrum corpora mota aeque afficiant, ac quieſcentia, nec ne?

SCHOLION.

145. Quod ergo ad quantitatem virium corpuscula mota ſollicitantium attinet, eam ex effectu ſeu ſpatiolo in definitione deſcripto ita
Fig. 10. petimus, quaſi corpusculum quieſceret. Scilicet ſi corpusculum in S quieſcens a vi $= p$ tempusculo $= dt$ per ſpatiolum $S\sigma = d\omega$ protru-
Figg. 11, datur, idem corpusculum motum, quo tempusculo dt percurſurum eſ-
12, 13. ſet ſpatium $Ss \doteq ds$, tum ab aequali vi p urgeri cenſebitur, ſi ultra hoc ſpatium Ss inſuper per aequale ſpatiolum $s\sigma = d\omega$ ſecundum directionem vis proferatur, ita ut hic motus corpusculi nihil omnino in effectu vis mutet. Sin autem in figg. 11, 12, 13, ſpatiolum $s\sigma$ majus fuerit vel minus, quam ſpatiolum $S\sigma = d\omega$ (fig. 10), intelligemus, corpusculum quoque a vi majore vel minore impelli. Quare ſi potuerimus effectus quarumcunque virium in corpusculis quieſcentibus determinare, omnium quoque virium effectus in corpusculis motis aſſignare poterimus, dummodo quovis caſu vires, quibus corpuscula mota ſollicitantur, rite definiantur. Ubi quidem hoc perpetuo eſt tenendum, corpusculum aliquod motum a vi $= p$ ſollicitari eſſe cenſendum, quando effectus in eo productus aequalis eſt illi, quem vis $= p$ in eodem corpusculo quieſcente eodem tempore eſſet productura. Videamus ergo, quomodo in corpusculo quieſcente ſpatiolum $S\sigma = d\omega$ ſe

ſit

Digitized by Google

ſit habiturum, ſi ab aliis atque aliis viribus, quarum menſura Statica docet, ſollicitetur.

THEOREMA. 2.

146. Spatiola, per quae idem corpusculum quieſcens eodem tempusculo dt a diverſis viribus promovetur, ſunt ipſis viribus proportionalia.

DEMONSTRATIO.

Ponamus corpusculum a vi $= p$ tempusculo $= dt$ per ſpatiolum $= d\omega$ protrahi; ac ſi ſimul alia vis aequalis p ſecundum eandem directionem idem corpusculum ſollicitaret, ab ea quoque per aequale ſpatiolum $= d\omega$ protraheretur, quoniam hic effectus a priori, unde motus tantum infinite parvus efficitur, non turbabitur. Quare hoc corpusculum a vi $= 2p$ ſollicitatum tempusculo $= dt$ per ſpatiolum $= 2d\omega$ protrahetur. Simili modo ſi quotcunque vires aequales ipſi p, quarum numerus $= n$, ſimul ſecundum eandem directionem in idem corpusculum quieſcens agant per tempusculum dt, id propellent per ſpatiolum $= nd\omega$, qui ergo eſt effectus vis $= np$.

COROLL. 1.

147. Si ergo duo fuerint corpuscula aequalia quieſcentia, quorum alterum a vi $= p$, alterum a vi $= P$ urgetur, atque tempusculo $= dt$ illud promoveatur per ſpatiolum $= d\omega$, hoc vero per ſpatiolum $= d\Omega$, erit $d\omega : d\Omega = p : P$.

COROLL. 2.

148. Sunt igitur hi effectus, eodem tempusculo producti, ipſis viribus ſollicitantibus proportionales, ubi quidem eadem virium menſura uſurpatur, quae in Statica docetur.

SCHOLION. 1.

149. Fundamentum hujus demonſtrationis in hoc conſiſtit, quod vires tantum per infinite parvum tempusculum agere aſſumo, ita ut in corpuſculo motus tantum infinite parvus gignatur, qui pro nullo haberi poſſit. Cum enim evenire queat, ut impulſio, quae in corpusculum quieſcens vim $= p$ exerit, eadem in corpusculum motum aliam vim exerat, haec exceptio in noſtro Theoremate locum non habet. Etiamſi enim plures vires, ipſi p aequales, quaſi ſucceſſive in corpusculum agere

Digitized by Google

agere concipiamus, ſingulae in eo eundem effectum producent, ac ſi quieſceret; neque motus infinite parvus in earum actione quicquam mutabit. Verumtamen hinc omnis ſucceſſio, quae tantum mente eſt adminiſſa, removeri debet, ut tota vis tantum per tempusculum dt agere ſit cenſenda.

SCHOLION. 2.

150. Si quaeratur, cur vis determinata p in corpusculo dato per datum tempusculum dt determinatum effectum $d\omega$ producat? ratio in eo eſt poſita, quod in corpusculo certa quaedam facultas in quiete perſeverandi inſit, quae eſt ipſa ejus inertia. Talis autem facultas in quiete perſeverandi concipi non poteſt, ſine quadam reluctantia, qua motus productioni adverſetur, quae quo fuerit major vel minor, eo difficilius vel facilius actioni vis obſequetur. Quare cum haec facultas cum inertia conveniat, intelligitur, inertiam inter quantitates eſſe referendam, ita ut diverſorum corpusculorum inertia ratione quantitatis diverſa eſſe queat. Quam diverſitatem cum hactenus nondum ſpectaverimus, effectus virium in eodem vel aequalibus corpusculis, quae ſcilicet aequali inertia ſint praedita, ſumus ſcrutati. Nunc igitur ad corpuscula diverſa progreſſuri, ad menſuram inertiae deducemur, atque intelligemus, quomodo inertia in aliis major, in aliis minor ineſſe poſſit.

THEOREMA. 3.

151. Si aequales vires corpuscula inaequalia quieſcentia ſollicitent, effectus eodem tempusculo producti erunt reciproce inertiae corpusculorum proportionales.

DEMONSTRATIO.

Fig. 14. Concipiamus corpusculum A, quod quiescens a vi $= p$ tempusculo dt protrudatur per ſpatiolum $Ax = d\omega$; ſi jam aliud corpusculum B illi aequale a vi quoque aequali $= p$ ſecundum eandem directionem urgeatur, id ab ea eodem tempusculo dt protrudetur per aequale ſpatiolum $B\mathfrak{G} = d\omega$. Coaleſcant nunc haec duo corpuscula in unum, quod ergo a vi $= 2p$ tempusculo $= dt$ protrudetur per ſpatiolum $= d\omega$; ita ut vis duplicata $2p$ in corpusculo duplicato $2A$ eundem effectum producat, ac vis ſimplex p in corpusculo ſimplici A. Atque hinc intelligetur, ſi n corpuscula ipſi A aequalia coaleſcant, ut inde unum, quod ſit $= nA$, reſultet, hocque ſollicitetur a vi $= np$, id tempusculo

Digitized by Google

culo $= dt$ propulsum iri per spatiolum $= d\omega$. Cum autem corpusculum nA a vi $= np$ tempusculo dt propellatur per spatiolum $= d\omega$, per Theorema praecedens, idem corpusculum nA a vi $= p$ sollicitatum tempusculo dt promovebitur per spatiolum $= \frac{d\omega}{n}$: similique modo corpusculum mA ab eadem vi $= p$ sollicitatum pari tempusculo dt promovebitur per spatiolum $= \frac{d\omega}{m}$, unde patet haec spatiola, quibus effectus metimur, $\frac{d\omega}{n}$ et $\frac{d\omega}{m}$ esse inter se reciproce, ut corpuscula nA et mA, seu ut eorum inertiae.

EXPLICATIO.

152. Cum corpusculum A certam habeat inertiam, qua effectus vis id sollicitantis determinatur, duo ejusmodi corpuscula aequalia in unum coalescentia exhibebunt corpusculum dupla inertia praeditum, tria triplum, et ita porro. Ac vicissim id corpusculum duplo majorem inertiam habere intelligendum est, ad quod per datum spatiolum dato tempusculo propellendum requiritur vis dupla. Unde manifestum est, quomodo inertia ad genus quantitatum referatur, et quomodo in aliis corporibus major, in aliis minor esse possit. Omnia scilicet corpuscula, quae ab aequalibus viribus eodem tempusculo per aequalia spatiola promoventur, ratione inertiae inter se aequalia aestimantur, atque ex conjunctione hujusmodi corpusculorum quotcunque oriri possunt corpora, quorum inertiae quamcunque rationem inter se teneant. Quantitas ergo inertiae in determinatione effectus a viribus oriundi maximi est momenti, et hanc ob rem in Mechanica summo studio est perpendenda, ubi cum peculiaribus nominibus indicari soleat, ea in singulari definitione explicari conveniet.

DEFINITIO. 15.

153. *Massa* corporis vel *quantitas materiae* vocatur quantitas inertiae, quae in eo corpore inest, qua tam in statu suo perseverare, quam omni mutationi reluctari conatur.

COROLL. 1.

154. Massa ergo seu quantitas materiae corporum non ex eorum magnitudine, sed ex quantitate inertiae, qua in statu suo perseverare conantur, omnique mutationi reluctantur, aestimari debet.

Digitized by Google

COROLL. 2.

155. Ex inertia igitur quantitas materiae judicatur, atque id corpus plus materiae continere existimatur, non quod majus volumen occupat, sed ad quod dato modo movendum major vis requiritur.

COROLL. 3.

156. Praecedens ergo Theorema huc redit, ut, si duo fuerint corpuscula quiescentia, quorum massae sint A et B, quae ab aequalibus viribus sollicitentur, spatiola, per quae ea eodem tempusculo protrudantur, sint reciproce ut massae.

SCHOLION.

157. Consideratio ergo motus nos ad cognitionem plurium insignium proprietatum corporum manuduxit, quarum prima est eorum inertia, qua in eodem statu absoluto sive quietis sive motus uniformis rectilinei perseverare conantur. Ac primo quidem inertiam tantum in genere cognovimus, nunc autem luculenter eam esse quantitatem et mensurae capacem intelligimus, qua idem plane significetur, quod vulgo nimis vage nomine massae seu quantitatis materiae exprimi solet, cujus adeo nunc quidem distinctam notionem assecuti videmur. In corporibus igitur praeter extensionem aliquid inest, quod eorum quasi realitatem constituit, eorum scilicet inertia seu materia, quae necessario cum soliditate seu impenetrabilitate conjuncta videtur, quid enim praeter materiam impenetrabile esse possit, nullo modo intelligitur. Neque etiam materiam sine extensione concipere licet, interim tamen in dubio relinquitur, an ea ita necessario cum volumine sit connexa, ut corpora ejusdem molis parem etiam massam seu quantitatem materiae contineant. Nulla certe ratio hujusmodi aequalitatem suadet, atque experientiam consulentes deprehendimus, sub aequali volumine in aliis corporibus plus, in aliis minus materiae concludi. Quanquam enim objici solet, vel non totum volumen materia impleri, vel materiam in poris contentam non ad ipsum corpus pertinere, hinc tamen minime evincitur, omnes corporum particulas aeque magnas etiam pari inertia esse praeditas. Sed haec quaestio imprimis ardua huc non pertinet, etiamsi probabile videatur, duplicis saltem generis materias in mundo existere, in quarum altera pro aequali volumine massa multo sit major quam in altera.

THE-

Digitized by Google

THEOREMA. 4.

158. Si corpuscula ratione maſſae inaequalia quieſcant, atque a viribus quibuscunque ſingula ſollicitentur, erunt ſpatiola, per quae eodem tempusculo protrudentur, in ratione compoſita ex directa virium et inverſa maſſarum.

DEMONSTRATIO.

Sollicitetur corpusculum quieſcens, cujus maſſa eſt = A a vi = p, a qua tempusculo dt protrudatur per ſpatiolum = $d\omega$. Iam per Theor. 2. ſi idem corpusculum A ſollicitaretur ab alia vi = q, ab ea eodem tempusculo promoveretur per ſpatiolum = $\frac{qd\omega}{p}$; ſin autem aliud corpusculum quieſcens, cujus maſſa = B, a vi = q urgeretur, id ab ea eodem tempusculo dt promoveretur per ſpatiolum = $\frac{Aqd\omega}{Bp}$, per Theor. 3. Ergo ſi corpusculum quieſcens A a vi = p, et corpusculum quieſcens B a vi = q ſollicitetur, ſpatiola per quae ea eodem tempusculo dt proferentur, erunt ut $d\omega$ ad $\frac{Aqd\omega}{Bp}$ hoc eſt ut $\frac{p}{A}$ ad $\frac{q}{B}$.

COROLL. 1.

159. Si ergo ſpatiolum $d\omega$ innotuerit, per quod corpusculum, cujus maſſa = A, a vi = p ſollicitatum tempusculo dt protruditur, ſpatiolum, per quod aliud corpusculum, cujus maſſa = B a vi = q ſollicitatum eodem tempusculo dt propellitur, erit = $\frac{Aqd\omega}{Bp}$.

COROLL. 2.

160. Abſolute ergo loquendo erit ſpatiolum, per quod corpusculum tempusculo dt promovetur, ut vis ſollicitans diviſa per maſſam corpusculi: quod etiam de corpusculo moto valet, ſi ea, quae ſupra monuimus, hic probe obſerventur.

SCHOLION.

161. Quemadmodum igitur effectus virium corpuscula quaecunque ſollicitantium tam a quantitate virium, quam a maſſa corpusculorum pendeat, ſi quidem tempuscula fuerint aequalia, ita definivimus, ut nullum dubium ſupereſſe poſſit, quin regula hic tradita neceſſario ſit

Digitized by Google

vera. Comparationem hic quidem tantum inſtituimus, quae inter ſpatiola illa, et vires et maſſas intercedit, verum notandum eſt, inter hujusmodi quantitates heterogeneas nullam determinationem abſolutam conſtitui poſſe, neque hic aliter ad menſuras abſolutas pertingere licet, niſi ut effectus quidam in mundo obſervatus pro cognito aſſumatur, atque ad eum tanquam ad unitatem reliqui effectus omnes revocentur, quod quomodo commodisſime fieri queat, in ſequentibus fuſius oſtendemus. Ceterum hinc nondum patet, quomodo effectus virium ſe ſit habiturus, quando tempuscula fuerint inaequalia; neque enim licet hinc a tempusculo elapſo dt ad tempusculum ſequens dt progredi, quia corpusculum ob motum priori tempusculo conceptum jam ob inertiam ſequente tempusculo aliquod ſpatiolum conficeret, cui demum id, quod a vi producitur, eſſet addendum. Quare ne hinc noſtrae determinationes praecedentes turbarentur, tempuscula omnia inter ſe aequalia aſſumſimus, neque etiam temporis ratio haberi poteſt, niſi celeritas corpori jam jam impreſſa conſideretur, quam inveſtigationem ſequente problemate ſuſcipiemus. Hinc autem viciſſim ea, quae hactenus ſine reſpectu ad celeritatem habito ſunt prolata, illuſtrabuntur.

PROBLEMA. 9.

162. Si corpusculum celeritate quacunque moveatur, ſimulque a vi ſecundum motus ſui directionem ſollicitetur, definire mutationem momentaneam in ejus motu et celeritate productam.

SOLUTIO.

Fig. 15. Sit A maſſa corpusculi, quod moveatur ſecundum directionem AB celeritate $= v$, qua ob inertiam perpetuo uniformiter in directum eſſet progreſſurum, niſi a vi externa ſollicitaretur. Scilicet ſi tempore $= t$ deſcripſerit ſpatium $AS = s$, indeque tempusculo dt pergat per ſpatiolum $Ss = ds$, erit $\frac{ds}{dt}$ ejus celeritas in S, nempe $= v$, quae cum ſit conſtans, fiet $\frac{ddz}{dt^2} = 0$, ſi nulla affuerit vis. Ponamus autem, corpusculum dum ex S egreditur ſollicitari a vi $= p$ ſecundum ipſam motus directionem SB: atque evidens eſt, motum non amplius uniformem eſſe futurum, ſed acceleratum iri, ex quo formula $\frac{ddz}{dt^2}$ non erit nihilo aequalis, ſed valorem quendam habebit poſitivum, quoniam vis ſollicitans auget celeritatem, in directione nihil mutans. Verum quia

quia haec formula $\frac{dds}{dt^2}$ involvit illud ſpatiolum, per quod corpusculum ultra ſpatium motu inſito deſcriptum profertur, erit ea directe ut vis ſollicitans p et reciproce ut maſſa A, ſeu $\frac{dds}{dt^2}$ erit ut $\frac{p}{A}$. Abſoluta autem aequalitas conſtitui nequit, niſi omnes quantitates ad determinatas unitates reducantur; tantisper igitur liceat, hanc aequalitatem ita indefinite exhibere, ut ſit $\frac{dds}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}$, ubi λ denotat numerum per unitates infra ſtabiliendas determinandum. Effectus ergo vis ſollicitantis p in hoc conſiſtit, ut ſit $dds = \frac{\lambda p dt^2}{A}$: ſumto elemento dt conſtante. Et cum celeritas ſit $v = \frac{ds}{dt}$, erit $dds = dvdt$, ideoque $dv = \frac{\lambda p dt}{A}$; unde celeritatis incrementum innoteſcit, quod vis p in corpusculo A tempusculo dt producit, ſiquidem directio vis cum directione motus conveniat, ab eaque motus acceleretur.

COROLL. 1.

163. Effectus ergo vis ſollicitantis p in corpusculum, cujus maſſa $= A$ et quod ſecundum eandem directionem movetur celeritate $= v$, qua tempusculo dt conficeret ſpatiolum $= ds$, in hoc conſiſtit, ut ſit $\frac{dds}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}$: ſumto dt conſtante, ſeu $dv = \frac{\lambda p dt}{A}$.

COROLL. 2.

164. Viciſſim ergo ſi acceleratio motus ſit cognita, quae eſt vel $\frac{dds}{dt^2}$ vel $\frac{dv}{dt}$, vis ſollicitans aſſignari poteſt, eam producens, erit ſcilicet vis iſta $p = \frac{A}{\lambda} \cdot \frac{dds}{dt^2}$ vel $p = \frac{A}{\lambda} \cdot \frac{dv}{dt}$: quae ſecundum ipſam motus directionem urgere eſt cenſenda.

COROLL. 3.

165. Sin autem directio vis ſollicitantis p directioni motus fuerit oppoſita, ab ea motus tantumdem retardabitur, eritque $\frac{dds}{ds^2} = \frac{-\lambda p}{A}$

Digitized by Google

vel $\frac{dv}{dt} = \frac{-\lambda p}{A}$: vis scilicet respectu casus praecedentis tanquam negativa spectari potest.

EXPLICATIO.

166. Cum hic invenerimus $ddx = \frac{\lambda p dt^2}{A}$, ideoque corpusculum tempusculo dt spatiolum $dx+ddx$ percurrere sit censendum, cum motu insito tantum spatiolum dx confecturum fuisset, videtur ddx id ipsum esse spatiolum, quod ultra id, per quod motu insito ferretur, ob vim sollicitantem percurritur, ita ut $\frac{\lambda p dt^2}{A}$ esset id spatiolum $d\omega$ per quod corpusculum A quiescens a vi p tempusculo dt protrudi assumsimus. Verum observandum est, hic ddx exprimere excessum spatioli, tempusculo dt percursi, supra id quod tempusculo praecedente dt percursum fuisset eadem agente vi p. Quare si spatiolum praesente tempusculo dt percursum sit $dx+d\omega$, denotante dx spatiolum motu insito descriptum et $d\omega$ spatiolum a vi p adjectum; praecedente tempusculo dt, si ab eadem vi fuerit sollicitatum, tantum spatiolum $dx - d\omega$ confeciisset, minus scilicet, quam si nullam actionem fuisset passum. Cum igitur ddx exprimat differentiam inter haec duo spatiola $dx+d\omega$ et $dx-d\omega$, erit $ddx = 2d\omega$, ideoque $d\omega = \frac{1}{2} ddx = \frac{\lambda p dt^2}{2A}$, unde patet spatiolum $d\omega$, per quod corpusculum A quiescens a vi p tempusculo dt propellitur, duplo minus esse quam nostrum ddx. In solutione quidem id non aequale sed tantum proportionale assumsi, ita ut hinc ei nihil roboris deesse sit putandum. Interim hoc adhuc alio modo ostendisse, operae erit pretium.

PROBLEMA. 10.

167. Data acceleratione, quae corpusculo moto A a data vi p secundum directionem motus sollicitante tempusculo dt inducitur, definire spatiolum $d\omega$, per quod idem corpusculum A quiescens ab aequali vi p sollicitatum eodem tempusculo dt protruderetur.

SOLUTIO.

Ob datam acceleration em habemus ex superioribus $ddx = \frac{\lambda p dt^2}{A}$ sumto elemento dt constante. Concipiamus jam vim sollicitantem p eandem

Digitized by Google

eandem manere, sive corpusculum celerius sive tardius moveatur, ita ut quantitas p pro constante haberi possit; vel potius determinemus hinc motum per tempus aliquod t, quod tamen ipsum adhuc sit infinite parvum, ita ut dubium nullum supersit, quin vis p interea maneat constans. Cum igitur habeamus $\frac{ddx}{dt} = \frac{\lambda p\,dt}{A}$ erit integrando $\frac{dx}{dt} = C + \frac{\lambda pt}{A}$, seu $dx = C\,dt + \frac{\lambda ptdt}{A}$, quae denuo integrata dat:

$$x = C\,t + \frac{\lambda p\,t\,t}{2A};$$

quod est spatium tempore t confectum, cujus pars Ct denotat spatium, quod corpusculum A solo motu insito percursurum fuisset, si a nulla vi sollicitaretur; pars autem $\frac{\lambda ptt}{2A}$ est ejus augmentum ab actione vis insuper adjectum. Statuatur jam totum tempus t infinite parvum, et loco t scribatur dt, atque $\frac{\lambda p\,dt^2}{2A}$ exprimet spatiolum $d\omega$, per quod corpusculum A ultra id, quod motu insito percurreret, tempusculo dt a vi p propelleretur; cui cum aequale sit id spatiolum $d\omega$, per quod idem corpusculum A quiescens eodem tempusculo dt ab aequali vi p protruderetur, habebimus $d\omega = \frac{\lambda p\,dt^2}{2A}$, seu $d\omega = \frac{1}{2}\,ddx$, uti jam ante innuimus.

COROLL. 1.

168. Spatiolum ergo, per quod corpus A quiescens tempusculo infinite parvo dt a vi p urgetur, est differentiale secundi gradus seu infinities minus est spatio, quod celeritate quacunque finita eodem tempusculo describeret.

COROLL. 2.

169. Hoc porro spatiolum $d\omega = \frac{\lambda p\,dt^2}{2A}$ est dimidium differentio-differentialis ddx, quod eodem tempusculo dt ab eadem vi p in eodem corpusculo A utcunque moto producitur.

COROLL. 3.

170. Hinc jam cognoscimus, istud spatiolum $d\omega$, quod supra vi sollici-

ſollicitanti p directe et maſſae A reciproce proportionale oſtendimus, inſuper ſequi rationem duplicatam tempusculi dt.

SCHOLION.

171. Ex his ergo valemus definire effectus virium in corpuscula utcunque mota, dummodo directio vis ſollicitantis cum directione motus conveniat, ſeu ei fuerit contraria. Supereſt ergo, ut inquiramus, quomodo is ſe ſit habiturus, quando directio vis ad motus directionem eſt obliqua, quae inveſtigatio facillime inſtituetur, motum corpusculi ſecundum praecepta ſupra tradita ſecundum duas vel tres directiones fixas reſolvendo; etſi enim haec reſolutio tantum eſt idealis, tamen uti per ſe eſt veritati conſentanea, ita etiam ad actionem virium feliciſſimo ſucceſſu accomodatur, atque hoc pacto totum negotium per eandem formulam abſolvetur. Quanquam enim a viribus obliquis non ſolum celeritas corpusculi ſed etiam directio immutatur, tamen haec poſterior mutatio ſimul in mutatione motuum lateralium comprehendetur, ita ut peculiaribus formulis pro inflexione directionis plane non ſit opus. Quomodo igitur his caſibus calculum inſtrui oporteat, oſtendamus.

PROBLEMA. 11.

Fig. 16. 172. Si corpusculum, dum data celeritate ſecundum directionem Ss movetur, a vi quadam ſecundum directionem Sp ſollicitetur, definire ejus effectum in motu corporis dato tempusculo dt productum.

SOLUTIO.

Sit A maſſa corpusculi, quod motu inſito percurreret ſpatiolum $Ss = ds$ tempusculo dt, ita ut ejus celeritas in S ſit $= \frac{ds}{dt}$: ſollicitetur autem interea ſecundum directionem Sp vi $= p$, atque hujus vis effectus in hoc conſiſtet, ut elapſo tempusculo dt non in s ſed σ reperiatur, translatumque ſit inſuper per ſpatiolum $s\sigma = d\omega = \frac{\lambda p dt^2}{2A}$, directioni vis Sp parallelum. Ad quem effectum commodius repraeſentandum reſolvatur motus ſecundum binas directiones Sp et Sq quaſcunque, quarum altera Sp conveniat cum directione vis, ita ut ſi nulla vis adeſſet, corpusculum deſcriberet ſecundum directionem Sp ſpatiolum $Sp = dx$ et ſecundum directionem Sq ſpatiolum $Sq = dy$, completo parallelogrammo $Spsq$. Cum autem accedente vi p elapſo tempusculo dt in σ reperiatur, ducta $\sigma\pi$ ipſi sp parallela, motus idem erit, ac ſi ſecundum directionem Sp deſcripſiſſet ſpatium $S\pi =$

Digitized by Google

$S\pi = dx + d\omega$, secundum directionem vero Sq spatium Sq ut ante. A vi ergo p tantum motus lateralis secundum directionem Sp, qua ipsa vis p agit, afficitur, altero motu laterali secundum Sq manente immutato, atque motus secundum Sp ita accelerabitur, ut sit $ddx = 2d\omega$, seu $ddx = \frac{\lambda p dt^2}{A}$. Quare si motus secundum binas vel etiam ternas directiones resolvatur, quarum una cum directione vis Sp conveniat, hic motus solus a vi afficietur perinde, ac si corpusculum revera secundum hanc directionem moveretur, reliquique motus laterales nihil omnino ab illa vi patientur.

COROLL. 1.

173. Quemadmodum ergo, facta hac motus resolutione, si nulla adesset vis sollicitans, foret $\frac{ddx}{dt^2} = 0$ et $\frac{ddy}{dt^2} = 0$, ita accedente vi p secundum directionem Sp sollicitante erit $\frac{ddx}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}$, manente $\frac{ddy}{dt^2} = 0$.

COROLL. 2.

174. Simili modo si motus per Sz in ternos motus resolvatur, et elementa per eos seorsim descripta tempusculo dt sint dx, dy, et dz, quorum primum dx in directione vis sollicitantis p sit sumtum, motus his tribus formulis continebitur:

$$\frac{ddx}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}, \quad \frac{ddy}{dt^2} = 0, \quad \text{et} \quad \frac{ddz}{dt^2} = 0.$$

COROLL. 3.

175. Hinc etiam colligitur, si corpusculum A simul tribus viribus p, q, et r sollicitetur, secundum ternas illas directiones, in quibus elementa dx, dy, et dz assumuntur, motum corporis per has formulas determinatum iri:

$$\frac{ddx}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}, \quad \frac{ddy}{dt^2} = \frac{\lambda q}{A} \text{ et } \frac{ddz}{dt^2} = \frac{\lambda r}{A}.$$

SCHOLION. 1.

176. Quando motus corpusculi, uti supra docuimus, secundum ternas directiones quascunque fixas resolvitur, a quibuscunque viribus corpusculum sollicitetur, perturbatio motus facile hujusmodi formulis determinari potest. Vires enim sollicitantes omnes secundum has easdem ternas directiones resolvantur, unde resultent istae vires p, q, r, Fig. 4.

Digitized by Google

quarum prima p urgeat secundum directionem OA, in qua elementum dx, secunda secundum directionem OB, in qua elementum dy, et tertia secundum directionem OC, in qua elementum dz capitur, tendantque singulae vires ad motus secundum istas directiones accelerandos. Quo facto motus ita perturbabitur, ut posito elemento temporis dt constante futurum sit

$$\text{I. } \frac{ddx}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A}; \quad \text{II. } \frac{ddy}{dt^2} = \frac{\lambda q}{A}; \quad \text{III. } \frac{ddz}{dt^2} = \frac{\lambda r}{A}.$$

ubi notandum, si quae harum virium in plagam oppositam urgeat, eam negative sumi debere, ita ut motus lateralis ei respondens retardetur. Atque hujusmodi ternis formulis perturbatio omnium motuum, quomodocunque etiam corpusculum a viribus sollicitetur, includi poterit, quae cum sint similes inter se, universa Mechanica unico adeo principio inniti est censenda.

SCHOLION. 2.

177. Quin etiam hoc unicum principium complectitur axiomata praecedentis capitis pro motu spontaneo, seu casu, quo vires sollicitantes evanescunt: tum enim nostrae formulae declarant motum aequabilem rectilineum. Totius ergo Mechanicae fundamentum hac una propositione includitur:

Si corpusculum cujus massa $= A$ sollicitetur a vi $= p$; ac per motus resolutionem in directione hujus vis, tempusculo dt conficiat spatiolum ds, celeritate $\frac{ds}{dt} = v$, erit

$$\frac{dds}{dt^2} = \frac{\lambda p}{A} \quad \text{seu} \quad dv = \frac{\lambda p\, dt}{A}.$$

Vel *augmentum celeritatis, secundum directionem vis sollicitantis acceptum, est directe ut vis sollicitans ducta in tempusculum, et reciproce ut massa corpusculi.*

Iam quaestio agitari solet, utrum hoc unicum principium, cui tota Mechanica atque adeo universa Motus scientia superstruitur, sit necessario, an tantum contingenter verum? Cujus decisio ex hactenus demonstratis haud difficilis videtur. Ubicunque enim corpora existunt, aliae certe leges in eorum motu locum habere nequeunt; omnesque aliae formulae praeter $\frac{pdt}{A}$, quibus quis incrementum celeritatis proportionale statuere voluerit, manifestas contradictiones essent implicaturae. Quare nullo modo dubitare licet, quin hoc principium inter

Digitized by Google

ter veritates neceſſarias ſit referendum. Atque non ſolum ſuper terra, ubi ejus veritatem experimentis comprobare licet, ſed etiam in planetis cunctisque adeo corporibus coeleſtibus audacter pronunciare poſſumus, omnes motus, quicunque ibi fuerint, per hoc unicum principium dirigi ac temperari. Quaeſtio autem haec de neceſſitate et contingentia non tam de iſto principio, quam de aliquot aliis regulis, quae ſub nomine legum motus circumferuntur, moveri ſolet. Verum quatenus hae leges rite ex noſtro principio conſequuntur, aeque erunt pro neceſſariis habendae: quae deinde ad certa corporum genera, veluti elaſtica, non-elaſtica, et fluida aſtringuntur, eae conceſſis talibus corporibus pariter non verae eſſe non poſſunt, dummodo ex noſtro principio recte ſint deductae.

SCHOLION. 3.

178. In ſuperioribus de Mechanica Libris equidem principia hujus ſcientiae jam ita conſtitueram, ut eorum certitudo extra omnem dubitationem eſſet poſita: hic autem viſum eſt, ea alio modo ex natura corporum accuratius perpenſa derivare, atque ad unicum principium derivare, ex quo deinceps omnia quae ad motum pertinent facilius deduci poſſent. Quanquam autem omnia, quae ad motum corpuſculorum infinite parvorum ſeu quaſi punctorum ſpectant, ibi jam fuſius ſum perſecutus, tamen quemadmodum eadem ex iſto unico principio ſint repetenda, breviter expoſuiſſe juvabit, quae quidem ita pertractabo, ut via ad motus corporum finitorum ſcrutandos planior reddatur. Imprimis autem, cum hic tantum rationem ſeu proportionalitatem inter diverſas quantitates notitiam motus ingredientes, quae per ſe ſunt heterogeneae, definiverim, quae ad menſuras abſolutas revocari nequeunt, niſi motus quidam pro cognito aſſumatur; hic omnino neceſſe eſt, antequam ulterius progrediamur, motum quendam cognitum, cujusmodi eſt lapſus gravium, ſtudioſius evolvere, indeque menſuras abſolutas ſtabilire, quibus deinceps commode uti queamus. Etſi vero aſſumtio talis motus ab arbitrio noſtro pendet, et ad experientiam deducitur, tamen hinc neceſſitati principii noſtri nihil detrahitur, cum arbitrarium tantum ſe ad menſuras abſolutas extendat, haeque ab unitatibus certis omnino arbitrariis pendeant.

Digitized by Google

CAPUT IV.

DE MENSURIS ABSOLUTIS EX LAPSU GRAVIUM PETITIS.

DEFINITIO. 16.

179. *Gravitas* est vis, qua omnia corpora circa terrae superficiem deorsum urgentur; et vis, qua quodvis corpus ob gravitatem deorsum sollicitatur, ejus *pondus* vocatur.

COROLL. 1.

180. Gravitas ergo est causa externa, quae corpora terrestria deorsum pellit; neque igitur ipsis corporibus tanquam proprietas quaedam tribui potest.

COROLL. 2.

181. Corpus itaque circa superficiem terrae dimissum, etiamsi quieverit, ad motum deorsum incitatur, ac tamdiu labetur, donec obstacula lapsum arcentia inveniat.

COROLL. 3.

182. Quamdiu autem lapsus impeditur, sive corpus objecto immobili incumbat, sive sit suspensum, ejus pondus se per pressionem exerit.

EXPLICATIO.

183. Quotidiana experientia abunde testatur, omnia corpora, quae sub sensus cadunt, esse gravia: ac si quae potius levia videntur, dum sursum nituntur, causa aeri est tribuenda, quo sublato etiam levissima corpora aeque promte delabuntur, atque gravissima. Hic autem cogitationem ab omnibus obstaculis, quae lapsui corporum se opponere solent, abstrahimus. Experimentis autem in subsidium vocatis discimus, remotis omnibus motus obstaculis, primo omnia corpora aeque celeriter delabi, et secundo sive quiescant sive jam moveantur pari vi deorsum urgeri. Haec ergo duo phaenomena tanquam cognita assumo, etsi ampliorem motus notitiam requirant; cum hic tantum fixas mensuras stabilire sit propositum; undecunque enim nobis innotuerint, ad hunc scopum nihil interest.

SCHOLION.

184. Gravitatem esse vim externam, quae in corpora extrinsecus agat,

Digitized by Google

agat, eaque deorsum impellat, etiam ii agnoscunt, qui ejus causam in attractione ponunt. Corpora enim non proprio quodam instinctu terram versus urgeri, sed a vi terrae attractrice attrahi statuunt. Rem scilicet ita concipiunt, quasi terra quaquaversus vires emitteret, quae corpora ambientia complexae terram versus impellant; neque vero hanc virium emissionem ope medii interjecti fieri putant, sed eam pariter locum habere volunt, etiamsi omnis materia inter terram et corpora tolleretur. Foret ergo gravitas vis immaterialis in corpora agens, verum cum terra ita conjuncta, ut hac sublata simul evanesceret; perinde igitur esset, ac si spiritus quidam corpora deorsum concitaret; quomodo enim aliter vis sese a terra per longinquas distantias sine adminiculo cujusquam materiae interjacentis propagare possit, nullo modo intelligere licet. Finge enim duo corpora A et B ad magnam distantiam a se invicem remota, inter quae nulla plane materia existat, atque circa corpus A nihil omnino aderit, quod ad corpus B pertineat; neque quicquam in corpore A mutabitur, etiamsi corpus B prorsus tollatur, ex quo hujusmodi emissio virium rationi contraria videtur. Quin potius veritati consentaneum est, vim gravitatis ab actione cujuspiam materiae subtilis sensus nostros effugiente oriri; etiamsi enim modum, quo talis vis produceretur, luculenter monstrare non liceret, tamen ad hujusmodi qualitates occultas confugere minime deceret. Verum in fluidis ejusmodi vires oriri posse, in Hydrodynamica docetur. Quando autem fautores attractionis dicunt, a Deo Telluri vim attractivam esse inditam, nihil aliud dicunt, nisi corpora ab Ipso Deo immediate terram versus impelli. Perpendamus ergo in genere descensum corpusculi a gravitate deorsum sollicitati.

PROBLEMA. 12.

185. Si corpusculum continuo deorsum sollicitetur a vi constante, motumque a quiete incipiat, ad datum tempus altitudinem confectam, et celeritatem quam acquisiverit, determinare.

SOLUTIO.

Sit A massa corpusculi, quod primum in A quieverit, unde continuo deorsum urgeatur a vi constante $= p$, cujus actione remotis omnibus obstaculis per lineam rectam verticalem AG descendet. Pervenerit ergo elapso tempore $= t$ in S, confecta altitudine $AS = s$; ac sumto temporis elemento dt constante, ejus motus hac aequatione definietur Fig. 17.

$ddt = \frac{\lambda p dt^2}{A}$, seu $\frac{ddt}{dt} = \frac{\lambda p dt}{A}$, cujus integrale est $\frac{ds}{dt} = \frac{\lambda pt}{A} +$ Const. At $\frac{ds}{dt}$ exprimit celeritatem in S, quae cum in A ubi $t = 0$ per hypothesin fuerit nulla, constans integratione ingressa evanescit, ita ut habeatur celeritas $\frac{ds}{dt} = \frac{\lambda pt}{A}$. Porro per dt multiplicando fit $ds = \frac{\lambda pt dt}{A}$, quae denuo integrata dat $s = \frac{\lambda ptt}{2A}$, quoniam posito tempore $t = 0$, altitudo $AS = s$ evanescere debet. Elapso ergo tempore t corpusculum descendit per altitudinem $AS = s = \frac{\lambda ptt}{2A}$, ibique in S acquisivit celeritatem $\frac{ds}{dt} = \frac{\lambda pt}{A}$.

COROLL. 1.

186. Altitudo ergo lapsu confecta proportionalis est quadrato temporis, celeritas vero acquisita ipsi tempori; utrinque autem accedit ratio directa vis sollicitantis p et inversa massae A.

COROLL. 2.

187. Celeritas in S acquisita $\frac{ds}{dt}$ tanta est, qua si corpus uniformiter moveretur, eodem tempore t conficeret spatium $= \frac{tds}{dt} = \frac{\lambda ptt}{A}$, quod ergo est duplum altitudinis descriptae $s = \frac{\lambda ptt}{2A}$.

COROLL. 3.

188. Cum omnia corpora remotis obstaculis aeque celeriter descendant, uti experientia testatur, necesse est, ut $\frac{\lambda p}{A}$ seu $\frac{p}{A}$ sit quantitas constans. Quare vis quodlibet corpus deorsum sollicitans p seu ejus pondus ad ejus massam A eandem tenet rationem.

EXPLICATIO.

189. Quando ergo quaestio est de lapsu corporum gravium, littera p exprimet corporis pondus, cujus distinctam habemus ideam, cum adeo

Digitized by Google

adeo menſurae ponderum ſint notiſſimae, littera A vero ejusdem corporis maſſam denotat, cujus cognitio per ſe occultior ex hoc ipſo ſatis clare percipitur, quod ſit ponderi proportionalis. Deinde temporis t etiam claram habemus notionem, cum ejus quantitatem per menſuras certiſſimas, veluti minuta ſecunda, vel minuta prima, vel horas exprimere valeamus. Altitudo autem s, cum ſit linea recta, per menſuras geometricas definitur. Verum littera λ, qua porportionalitas determinatur, per ſe definitum valorem non recipit, ſed prout reliquae quantitates ad alias atque alias menſuras ceu unitates referuntur, ita etiam illi alii atque alii valores tribui debent. Statim autem ac reliquas quantitates p, A, t et s per determinatas menſuras exprimimus, littera λ determinatum valorem adipiſcitur, qui ita comparatus eſſe debet, ut pro unico caſu veritatem exhibeat, tum enim perpetuo eundem valorem retinebit, quamdiu ſcilicet iisdem menſuris utemur. Hic autem valor ex experientia peti debet, cum etiam menſurae aſſumtae experientiae innitantur; hinc vero diſcimus, quanta ſit altitudo, per quam corpus grave dato tempore delabitur, unde litterae λ talis valor tribui debebit, ut formula noſtra pro altitudine inventa $s = \frac{\lambda ptt}{2A}$, ſi ad iſtum caſum accommodetur, hanc ipſam altitudinem, quam experientia declarat, exhibeat.

SCHOLION.

190. Omnia ergo huc redeunt, ut pro omnibus quantitatibus in noſtras formulas ingredientibus menſuras certas ſtabiliamus, quibus in poſterum conſtanter utamur, ſi quidem omnium motuum phaenomena per menſuras cognitas exprimere velimus. Sunt autem quinque genera quantitatum, quibus omnis motus determinatio continetur.

1°. Spatium percurſum, quod cum ſit linea ideoque quantitas geometrica, ejus menſura nulli dubio eſt ſubjecta.

2°. Tempus, cujus menſura cum ſit notiſſima, cardo rei in hoc verſatur, quantum tempus pro unitate aſſumere velimus.

3°. Celeritas, cujus cognitio planior eſſe nequit, quam ſi ſpatium aſſignare valeamus, quod ea celeritas dato tempore uniformiter eſſet percurſura.

4°. Vis ſollicitans ad menſuras cognitas erit revocanda.

5°. Maſſa corporum motorum in calculum ingreditur, cujus quantitas, quomodo aeſtimari debeat, quoque erit ſtatuendum.

Quorum quinque quantitatum generum cum primum nulla difficultate

Digitized by Google

cultate laboret, quomodo quatuor reliqua per menſuras cognitas aptiſſime in calculum introducantur, iisque convenienter littera λ definiatur, in ſequentibus hypotheſibus ſtabiliamus.

HYPOTHESIS. 1.

191. *Vires ſollicitantes per pondera illis aequalia conſtanter exprimamus.*

EXPLICATIO.

192. Haec virium expreſſio per pondera nullam habet difficultatem, cum enim pondus cujusque corporis ſit vis, qua id deorſum ſollicitatur, vires ſollicitantes et pondera ſunt quantitates inter ſe homogeneae; et a quacunque vi aliquod corpus ſollicitetur, ſemper corpus concipere licet, quod in ſuperficie terrae poſitum pari vi deorſum ſollicitaretur; hujusque corporis pondus juſtam illius vis menſuram exhibebit. Et quando quaeſtio eſt de tanta vi, ut nullum corpus circa terrae ſuperficiem exiſtere poſſit, quod aequale pondus haberet, ſufficiet noſſe, quoties illa vis major ſit, quam pondus modici corporis in terrae ſuperficie exiſtentis; ſi quidem hinc quantitas illius vis aeque certe definiri poterit. Cum autem nunc quidem compertum ſit, eadem corpora in omnibus terrae regionibus non paribus viribus deorſum impelli, certa quaedam terrae regio ad hanc menſuram eligi debet, ad quam etiam reliquae menſurae deinceps exponendae accommodentur. Nihil enim intereſt, quamnam regionem adhibeamus, dummodo in eadem experimenta, quibus ſequentes menſurae innituntur, capiantur.

HYPOTHESIS. 2.

193. *Maſſam cujusque corporis per pondus exprimamus, quod idem in regione terrae conſtitutum eſſet habiturum.*

EXPLICATIO.

194. Ratio hujus menſurae in hoc eſt ſita, quod pondera corporum maſſis eorum ſint proportionalia; quare pondus cujusque corporis juſtam maſſae ejus menſuram praebere eſt cenſendum. Quando autem quaeſtio eſt de maſſis corporum extra terram verſantium, ea ſaltem mente in terram, et eam quidem ejus regionem, unde virium menſuras hauſimus, ſunt transferenda. Hinc maſſa cujuscunque corporis nobis menſurabitur pondere, quod idem corpus, ſi in illa regione eſſet collocatum, haberet. Si de corporibus quaereretur, quae ob magnitudinem a memorata regione capi non poſſent, ea per partes eſſent conſideranda; vel adeo ſufficiet rationem noſſe, quam maſſa corporis propoſiti teneat

Digitized by Google

teneat ad maſſam alicujus dati corporis in ea regione exiſtentis. Hoc modo vires et maſſae ad quantitates homogeneas ſunt perductae, cum ambo per pondera ſimus expreſſuri; et quoniam in noſtris formulis perpetuo vires per maſſas diviſae occurrunt, perinde eſt quanam unitate in ponderibus dimetiendis utamur, ſive libra ſive uncia; ſemper enim quotus ex diviſione vis cujuspiam per maſſam reſultans numero abſoluto exprimetur. Atque caſu quidem gravitatis, cum tam vis ſollicitans p quam maſſa corporis A per ejus pondus exprimatur, erit $\frac{p}{A} = 1$, unde elapſo tempore t grave deſcendit per altitudinem $s = \frac{1}{2} \lambda tt$, et acquirit celeritatem $\frac{ds}{dt} = \lambda t$, qua corpus uniformiter latum tempore t percurret ſpatium $= \lambda tt = 2s$.

HYPOTHESIS. 3.

194. *In dimetiendis temporibus perpetuo minutum ſecundum pro unitate aſſumamus.*

EXPLICATIO. 2.

Quod minutum ſecundum ſit pars ſexagies ſexagies vigeſima quarta diei naturalis, ſatis notum eſt, cum dies in 24 horas, una hora in 60 minuta prima, et unum minutum primum in 60 minuta ſecunda dividi ſoleat. Diem autem hic aſſumo medium ſolarem, quo ſol ſecundum tempus medium circa terram revolvi cenſetur. Quod tempus ſi forte non per omnia ſecula ejusdem durationis videatur, ſufficit ejus quantitatem pro data quadam aetate noſſe, et ea quidem, unde menſura maſſarum ex corporum ponderibus petitur. Quare ſi tempus quodpiam littera t deſignemus, haec littera erit numerus abſolutus indicans, quot minuta ſecunda in tempore illo contineantur. Eſt autem haec temporis menſura commodiſſima, cum in omnibus experimentis tempora in minutis ſecundis notari ſoleant; fractiones etiam nimis frequentes hoc modo evitabimus, quae occurrerent, ſi majus temporis ſpatium pro unitate aſſumeremus.

HYPOTHESIS. 4.

196. *Celeritatem commodiſſime metiemur per ſpatium, quod corpus ea celeritate uniformiter motum ſingulis minutis ſecundis percurret.*

EXPLICATIO.

Celeritatem ſane clarius non cognoſcimus, quam ſi ſpatium aſſignare valuerimus, quod corpus ea celeritate uniformiter latum uno

Digitized by Google

minuto secundo percurret: ita si dicam, globum ex tormento explosum tantam habere celeritatem, qua uno minuto secundo spatium 1000 pedum percurreret, nemo non adaequatam hujus celeritatis ideam habebit. Hoc ergo modo celeritates et spatia percursa per quantitates homogeneas, lineas scilicet, exprimentur, et cum tam tempora, quam vires ad massas applicatae, numeris absolutis exhibeantur, in formulis nostris duplicis tantum generis quantitates relinquentur, alterae lineae geometricae, alterae numeri absoluti.

HYPOTHESIS. 5.

197. *Denotet in posterum nobis perpetuo littera g altitudinem, per quam grave uno minuto secundo libere delabitur.*

EXPLICATIO.

198. Per observationes et experimenta summo studio in hunc finem instituta compertum est, corpus grave de quiete libere descendens primo minuto secundo delabi per altitudinem $15\frac{1}{6}$ pedum Rhenanorum, ita ut adhibita talium pedum mensura esset $g = 15\frac{1}{6}$. Sed quia gravitas non ubique terrarum eadem deprehenditur, haec quantitas non satis est fixa. Hinc supra jam monui, certam in terra regionem esse eligendam, quorsum tam vires quam massae per pondera experimendae referantur; hac autem regione constituta ibidem altitudo g, ex qua grave uno minuto secundo libere descendit, per experimenta accurate definiatur. Adjicere possem aetatem, unde simul mensura minutorum secundorum desumatur, si quis putet, labentibus saeculis dierum mediorum durationem alterari. Verum quaecunque regio ad hoc institutum eligatur perinde est, et dum omnes hactenus commemoratae mensurae eo redigantur, conclusiones denique consentire debent; unde patet, has mensuras ad arbitrium nostrum constitutas ipsa Mechanicae principia non afficere, nihilque eo arbitrarii induci, cum iis tantum id efficiatur, ut ad conclusiones in mensuris cognitis expressas perveniamus.

THEOREMA. 5.

199. Omnibus quantitatibus secundum Hypotheses modo traditas ad mensuras revocatis, pro littera λ in formulis superioribus assumi debet dupla altitudo g, per quam grave uno minuto secundo delabitur.

DEMONSTRATIO.

Pro lapsu gravium enim, si secundum nostras hypotheses vis p et massa A exprimatur, erit $\frac{p}{A} = 1$, et altitudo, per quam tempore t de-

Fig. 17.

labitur

labitur fiet AS $= s = \frac{1}{2}\lambda tt$. Hinc porro tempore t in minutis secundis expresso si statuatur $t = 1$, pro s prodire debet altitudo illa g, per quam grave uno minuto secundo delabi est assumtum, unde cum fiat $g = \frac{1}{2}\lambda$ evidens est, statui debere $\lambda = 2g$. Tum vero celeritas in fine minuti secundi acquisita erit $\frac{ds}{dt} = \lambda t = \lambda = 2g$, Haec scilicet celeritas tanta erit, ut corpus ea uniformiter latum singulis minutis secundis percurreret spatium $= 2g$, prorsus ut nostra recepta celeritatem mensurandi ratio exigit.

COROLL. 1.

200. Denotat ergo λ non numerum, sed linaem, quae cum spatio percurso s est homogenea, dum reliquae quantitates t et $\frac{p}{A}$ numeris absolutis experimentur.

COROLL. 2.

201. Si ergo corpusculum quiescens, cujus massa $= A$, a vi $= p$ sollicitatur, ab ea tempusculo dt protrudetur per spatiolum $= \frac{gpdt^2}{A}$; adhibendo scilicet perpetuo mensuras praescriptas.

COROLL. 3.

202. Ac si corpusculum A jam movetur, et a vi $= p$ sollicitatur, tum, resolutione motus instituta, ejus motus lateralis, quo secundum directionem vis sollicitantis fertur, et tempusculo dt spatiolum $= dx$ conficit, ita variabitur, ut sit $ddx = \frac{2gpdt^2}{A}$, et $\frac{ddx}{dt} = \frac{2gpdt}{A}$, ubi $\frac{ddx}{dt}$ est incrementum celeritatis secundum hanc directionem.

COROLL. 4.

203. Si porro hinc celeritas motus lateralis secundum hanc directionem colligatur, quae est $\frac{dx}{dt}$, ea secundum nostram receptam mensuram ita exprimetur, ut indicet spatium, quod corpus ista celeritate uniformiter motum uno minuto secundo esset percursurum.

SCHOLION.

204. Talibus ergo unitatibus et mensuris, quales descripsimus, adhibitis, si pro λ scribatur $2g$, ex formulis nostris deinceps omnes motus ad mensuras absolutas facillime revocabimus: haecque ratio mul-

to commodior videtur, quam illa, qua antehac fueram usus, ubi celeritates per radicem quadratam ex altitudinibus, per quas grave labendo pares acquireret celeritates, expresseram; quem in finem loco celeritatum altitudines ipsis debitas in calculum introduxeram. Verum ex altitudine celeritati debita ipsa celeritas non tam perspicue cognoscitur, sed calculo quodam opus est, ut ad mensuras solitas reducatur. Deinde etiam temporis ratio peculiari calculo eget, quo nova quaedam unitas in calculum induci debet, ut tempus in minutis secundis eliciatur. Has ergo ambages tam ratione celeritatum quam temporum penitus evitabimus, si praescriptis mensuris utamur: totum autem discrimen in hoc est positum, quod ante in formulis generalibus littera λ fractionem absolutam $\frac{1}{2}$ significaverat, hic autem pro ea linea $= 2g$ scribatur. Unde si quis priorem modum secutus calculum pro quopiam motu definiendo instituerit, ejus calculus facile ad hunc modum reducetur, indeque promtissime omnes mensurae absolutae innotescent. Hinc etiam homogeneitas in aequationibus motum complectentibus facilius perspicitur, cum tantum spatia percursa et littera g sint quantitates lineares et quasi unius dimensionis, cujus generis quoque sunt celeritates, si forte in calculum introducantur: tempora autem t cum fractionibus $\frac{p}{A}$ huic similibus numeris absolutis exprimantur, qui nullam dimensionem constituere sunt censendi. In calculo autem, ad modum ante usurpatum instituto, tam celeritates quam tempora per radices quadratas ex quantitatibus linearibus exprimebantur, quae adeo dimidiam tantum dimensionem constituere sunt existimanda. Repudiato ergo isto superiori modo ad mensuras absolutas perveniendi hunc novum modum utpote multo faciliorem et simpliciorem amplectamur, et in sequentibus constanter retineamus.

CAPUT V.

DE MOTU ABSOLUTO CORPUSCULORUM A VIRIBVS QVIBVSCVNQVE ACTORVM.

PROBLEMA. 13.

205. Si corpusculum a viribus ita sollicitetur, ut motum suum in eodem plano absolvat, definire tam spatium percursum, quam ad quodvis tempus ejus locum et celeritatem.

SOLV-

Digitized by Google

SOLUTIO.

Ut motus fiat in eodem plano, tam directiones virium, quibus continuo sollicitatur, quam directio motus primo impressi, in eodem plano sitae sint necesse est, quod planum ipsa tabula referatur. In quo ad lubitum assumantur binae directrices OA et OB ad calculi commoditatem inter se normales, sitque ESF spatium a corpusculo descriptum, in quo pervenerit elapso tempore t, quod in minutis secundis exprimatur, in punctum S, unde ad OA demisso perpendiculo SX sint coordinatae $OX = x$ et $XS = y$, posito ipso spatio percurso $ES = s$, ut sit $ds = \sqrt{(dx^2+dy^2)}$. Sit jam massa corpusculi $= A$, quae scilicet ejus pondus indicaret, si in regione terrae ad mensuras absolutas electa versaretur: et quibuscunque viribus in S sollicitetur, eas per resolutionem staticam ad duas revocare licet, secundum directiones SP et SQ directricibus parallelas. Sit ergo vis $SP = P$ et vis $SQ = Q$, ambae in ponderibus ipsis aequalibus datae. His positis, si temporis elementum dt constans assumatur, motusque pariter secundum directiones SP et SQ resolutus intelligatur, determinatio motus his duabus formulis continebitur: Fig. 18.

$$ddx = \frac{2gPdt^2}{A} \text{ et } ddy = \frac{2gQdt^2}{A}.$$

Ubi, quod perpetuo tenendum, g denotat altitudinem, per quam grave in regione terrae memorata uno minuto secundo delabitur. Hinc erit celeritas motus lateralis secundum $SP = \frac{dx}{dt} = \frac{2g}{A}\int P dt$ et secundum $SQ = \frac{dy}{dt} = \frac{2g}{A}\int Q dt$. Quodsi jam celeritas vera in S ponatur $= v$, ob $v = \frac{ds}{dt}$, et $ds^2 = dx^2+dy^2$, derivabitur inde haec aequatio:

$$dx\,ddx + dy\,ddy = ds\,dds = \frac{2gdt^2}{A}(Pdx+Qdy).$$

ex qua cum sit $ds = vdt$ et $dds = dvdt$, elicitur:

$$vdv = \frac{2g}{A}(Pdx+Qdy).$$

hinc que $vv = \frac{4g}{A}\int(Pdx+Qdy)$.

Porro posito $dy = pdx$, ut sit $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$, erit $ddy = pddx + dpdx = \frac{2gQdt^2}{A} = \frac{2gPpdt^2}{A} + dpdx$, ideoque $dp = \frac{2gdt^2}{Adx}(Q-Pp) = \frac{2gdt^2}{Adx^2}(Qdx - Pdy)$. At ob $ds = vdt = \frac{dx\sqrt{(1+pp)}}{}$

$dx\gamma(1+pp)$ erit $\frac{dt}{dx} = \frac{\gamma(1+pp)}{v}$, hincque $dp = \frac{2g(1+pp)}{Avv}(Qdx-Pdy)$. Verum curvae ESF, quatenus verſus OA concava ſpectatur, radius osculi eſt $= -\frac{dx(1+pp)\gamma(1+pp)}{dp} = -\frac{ds(1+pp)}{dp}$, qui ſi vocetur $= r$, ob $dp = -\frac{ds(1+pp)}{r}$ habebitur:

$$-\frac{ds}{r} = \frac{2g(Qdx-Pdy)}{Avv} \text{ ſeu } \frac{Pdy-Qdx}{ds} = \frac{Avv}{2gr}.$$

COROLL. 1.

206. Si ergo loco temporis t introducatur celeritas v, motus his duabus aequationibus exprimetur:

$Avdv = 2g(Pdx+Qdy)$ et $Avvds = 2gr(Pdy - Qdx)$

quae commodius adhibentur, ſi forte vires P et Q a celeritate corporis pendeant.

COROLL. 2.

207. Hic notandum eſt, formulam $\frac{Pdx+Qdy}{ds}$ exprimere vim tangentialem, at $\frac{Pdy-Qdx}{ds}$ vim normalem, quarum illa ſi dicatur $= T$ haec vero $= N$, habebimus

$Avdv = 2gTds$ et $Avv = 2gNr$

quae conveniunt cum formulis ſuperiori libro traditis.

COROLL. 3.

208. His autem introductis menſuris effectus vis tangentialis T in hoc conſiſtit, ut ſit $T = \frac{Avdv}{2gds}$. Vis autem normalis effectus in hoc, ut ſit $N = \frac{Avv}{2gr}$. Seu poſito $dy = pdx$ ob $r = -\frac{ds(1+pp)}{dp}$ erit $N = -\frac{Avvdp}{2gds(1+pp)}$, ſi quidem vim normalem verſus axem OA vergere ſumamus.

EXEMPLUM.

209. Sollicitetur corpusculum continuo ſecundum directionem BO vi conſtante et ejus ponderi A aequali, ut habeatur caſus corporis ſupra terram projecti. Erit ergo vis $P = 0$, et vis $Q = -A$, unde habemus has aequationes:

$ddx = 0$ et $ddy = -2gdt^2$

Ponamus

Digitized by Google

Ponamus corpusculum initio in O ita esse projectum, ut fuerit ejus celeritas $= c$, et directio fecerit cum recta OA, quae horizontalis singatur, angulum $= \zeta$, ita ut initio ejus celeritas secundum OA fuerit $= c \cos \zeta$ et secundum OB $= c \sin \zeta$. His positis, prior aequatio dabit $\frac{dx}{dt} = c \cos \zeta$, altera vero $\frac{dy}{dt} = c \sin \zeta - 2gt$, quoniam posito $t = 0$, formulae $\frac{dx}{dt}$ et $\frac{dy}{dt}$ dare debent celeritates initiales. Porro autem integrando, quia posito $t = 0$ tam x quam y evanescere debet, fiet

$$x = ct \cos \zeta \text{ et } y = ct \sin \zeta - gtt$$

seu $-4gy = 4ggtt - 4cgt \sin \zeta$ hincque

$$cc \sin \zeta^2 - 4gy = (2gt - c \sin \zeta)^2 = (c \sin \zeta - \frac{2gx}{c \cos \zeta})^2$$

unde patet curvam esse parabolam, hac aequatione contentam

$$(\frac{cc \sin \zeta \cos \zeta}{2g} - x)^2 = \frac{cc \cos \zeta^2}{g} (\frac{cc \sin \zeta^2}{4g} - y)$$

cujus parameter $= \frac{cc \cos \zeta^2}{g}$; et axis verticalis a puncto O distans intervallo $= \frac{cc \sin \zeta \cos \zeta}{2g}$, atque verticis supra OA elevatio $= \frac{cc \sin \zeta^2}{4g}$. Deinde ob

$$\frac{ds}{dt} = r(cc - 4cgt \sin \zeta + 4ggtt) = v$$

fiet celeritas in S nempe $v = r(cc - 4gy)$. Ac denique facto $y = 0$ reperitur longitudo jactus $= \frac{cc \sin \zeta \cos \zeta}{g}$.

SCHOLION.

210. Aliis quaestionibus huc pertinentibus evolvendis hic non immoror, cum totum hoc argumentum jam fusius sim persecutus. Notetur autem, hic agi de motu absoluto eoque libero; etsi enim motum gravium hinc deduxi, qui cum ad terram referatur, utique est respectivus, atque a motu absoluto plurimum discrepans, tamen in sequentibus ostendetur, eum tanquam absolutum spectari posse. Cum enim omnia corpora terrestria similibus viribus urgeantur atque ipsa terra, his efficitur, ut ea respectu terrae perinde moveantur, ac si terra quiesceret, eaeque vires abessent, id quod capite sequente luculenter ostendetur. Praeterea vero haec intelliganda sunt de motu libero, ita ut extrinsecus nihil obstet, quo minus corpusculum actioni virium obsequatur, quem

quem motum probe discerni convenit a motu coacto, quo corpusculum quasi canali inclusum aliter nisi secundum ductum canalis moveri nequit, cujusmodi motus in libro secundo sum contemplatus. Hic vero unicum adjiciam problema circa canalem in eodem plano formatum, ubi quidem ab omni frictione mentem abstraho, quo facilius perspiciatur, quomodo hujusmodi problemata ope hujus novae methodi resolvi, simulque pressio corpusculi in latera tubi definiri debeat.

PROBLEMA. 14.

211. Si corpusculum canali in eodem plano formato fuerit inclusum, simulque a viribus quibuscunque sollicitetur, determinare tam ejus motum in canali, quam pressionem quam in canalem exerit.

SOLUTIO.

Fig. 18. Figura ergo canalis ESF ut data spectatur, quae ad binas directrices OA et OB inter se normales referatur, ut ante. Scilicet si elapso tempore t corpusculum pervenerit in S, sit $OX = x$, $XS = y$, arcus $ES = s$: vires autem sollicitantes ad easdem directiones revocatae sint $SP = P$ et $SQ = Q$, existente corpusculi massa $= A$. Iam quatenus canalis inflectit directionem, quam corpusculum per se esset secuturum, in id vires exerit etiamnum incognitas, quae ad easdem directiones reductae sint secundum $SP = X$ et secundum $SQ = Y$; de quibus autem hoc constat, motum corpusculi ab iis neque accelerari neque retardari. Cum nunc sint vires secundum $SP = P + X$ et secundum $SQ = Q + Y$ posita celeritate in $S = v$, et radio osculi $= r$, habebimus ex §. 206. has aequationes:

$$Avdv = 2g((P+X)dx + (Q+Y)dy)$$
$$Avvds = 2gr((P+X)dy - (Q+Y)dx)$$

Sed quia vires X et Y nihil conferunt ad celeritatis incrementum dv, erit $Xdx + Ydy = 0$, ex altera autem aequatione pro harum virium cognitione elicitur.

$$\frac{Xdy - Ydx}{ds} = \frac{Avv}{2gr} - \frac{Pdy + Qdx}{ds}.$$

Primo igitur motus per canalem determinatur hac aequatione: $Avdv = 2g(Pdx + Qdy)$, unde celeritas corpusculi v in quovis loco S cognoscitur. Deinde ipse canalis ejusmodi vires X et Y secundum directiones SP et SQ exerit, ut sit

$$\frac{Xdx + Ydy}{ds} = 0 \text{ et } \frac{Xdy - Ydx}{ds} = \frac{Avv}{2gr} - \frac{Pdy + Qdx}{ds}.$$

Scilicet si hae vires ad directionem canalis Ss et normalis SN reducantur, inde oritur secundum directionem canalis vis nulla, et secundum

dum normalem SN vis quae est $= \frac{Avv}{2gr} - \frac{Pdy + Qdx}{ds}$, atque tanta vi vicissim corpusculum urget canalem secundum directionem oppositam Sn, quae est pressio quaesita.

COROLL. 1.

212. Si ergo corpusculum, dum per canalem movetur, a nullis viribus externis P et Q sollicitatur, motus ejus ob $Avdv = 0$ erit uniformis. Tum vero ubique canalem premet normaliter vi $= \frac{Avv}{2gr}$, secundum directionem Sn positioni radii osculi oppositam.

COROLL. 2.

213. Vis haec, qua canalis premitur, $\frac{Avv}{2gr}$ vocatur *vis centrifuga* inde orta, quod corpusculum contra instinctum inertiae in linea curva progredi cogitur, estque in ratione composita directa massae A, quadrati celeritatis v, et reciproca radii osculi r.

COROLL. 3.

214. Si corpusculum praeterea sollicitetur a vi tangentiali secundum $Ss = T$ et normali secundum $SN = N$, erit primo $Avdv = 2g\,T\,ds$, deinde canalis premitur secundum directionem Sn vi $= \frac{Avv}{2gr} - N$.

EXEMPLUM.

215. Si corpusculum a gravitate sollicitatum per arcum circularem OS ascendere cogatur, cujus centrum B, radius $OB = b$, qui sit verticalis et recta OA horizontalis, celeritas autem in O fuerit $= c$, erit vis $P = 0$ et vis $Q = -A$, atque $r = -b$; unde pro motu corporis habetur: $Avdv = -2Agdy$ seu $vdv = -2gdy$: ut sit $vv = cc - 4gy$, et celeritas evanescat in D, ubi $y = \frac{cc}{4g}$, vis autem, qua canalis premitur secundum SB, erit $= -\frac{A(cc-4gy)}{2gb} - \frac{Adx}{ds}$. Tum vero ob $xx + (b-y)^2 = bb$ erit $x = \sqrt{(2by - yy)}$, $dx = \frac{bdy - ydy}{\sqrt{(2by-yy)}}$ et $ds = \frac{bdy}{\sqrt{(2by-yy)}}$, hincque pressio secundum SB $= -\frac{Acc}{2bg} + \frac{2Ay}{b} - \frac{A(b-y)}{b} = -A + \frac{3Ay}{b} - \frac{Acc}{2gb}$, quae quia est negativa pres- Fig. 19.

Digitized by Google

fio in canalem aget secundum SN, eritque $= A\left(1 + \frac{cc}{2bg} - \frac{3y}{b}\right)$. Cum autem sit $v = \sqrt{(cc - 4gy)}$, erit elementum temporis $dt = \frac{ds}{v} = \frac{bdy}{\sqrt{(cc-4gy)(2by-yy)}}$, vel ob $y = \frac{cc-vv}{4g}$ et $dy = -\frac{vdv}{2g}$ erit $dt = -\frac{2bdv}{\sqrt{(cc-vv)(8bg-cc+vv)}}$.

Si celeritas initialis c sit quasi infinite parva prae b, quia v excedere nequit c, erit proxime $dt = -\frac{dv}{\sqrt{(cc-vv)}} \cdot \sqrt{\frac{b}{2g}}$, et integrando $t = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{2g}} \cdot A\cos\frac{v}{c}$. Unde si π sit semicircumferentia circuli, cujus radius $= 1$, erit tempus totius ascensus in D, quoad celeritas v evanescat, $= \frac{\pi\sqrt{b}}{2\sqrt{2g}}$, quod tempus *semioscillatio* vocatur. Quare ut tempus integrae oscillationis $\frac{\pi\sqrt{b}}{\sqrt{2g}}$ sit unius minuti secundi, seu $= 1$, radius BO $= b$ capi debet $= \frac{2g}{\pi\pi}$, quae est longitudo penduli simplicis singulis minutis secundis oscillantis. Quare si $g =$ 15, 625 ped. Rhen. erit longitudo istius penduli $= 3$, 166287 ped. Rhen.

SCHOLION.

216. Non opus est ut moneam, canalem ideo hic tantum esse assumtum, ut motus secundum datam lineam cogatur; id autem pluribus modis veluti pendulis effici potest, cujusmodi casum in praecedente exemplo evolvere visum est. Ceterum Problemata huc pertinentia in secundo Mechanicae Libro satis prolixe pertractavi. Cum autem ibi hoc desiderari possit, quod methodum, qua nunc quidem corporum coelestium motus ad calculum revocari solent, et quam deinceps demum usurpare coepi, non exposuerim, operae pretium erit, eam hic accuratius explicare. Pertinet autem ad probl. 13. ab eoque tantum hoc differt, quod motus non per coordinatas, sed per distantias a puncto fixo et angulos circa id descriptos definiatur. Quatenus ergo hic motus in plano absolvitur, praecepta eum secundum hanc methodum investigandi tradam, postea idem pro motu non in eodem plano facto ostensurus.

PROBLEMA. 15.

Fig. 20. 217. Si corpusculum libere moveatur in plano, in quo perpetuo duabus sollicitetur viribus, altera ad punctum quoddam fixum O tendente,

Digitized by Google

dente, alterius vero directione ad illam existente normali; ad quodvis tempus distantiam corpusculi S a puncto fixo O et angulum AOS definire.

SOLUTIO.

Elapso tempore t corpusculum, cujus massa $= A$, pervenerit ex A in S, ponaturque distantia $OS = u$, et angulus $AOS = \varphi$. In S autem sollicitetur primo a vi secundum SO pellente, quae sit $= V$, deinde vero a vi secundum directionem SV ad OS normali urgente, quae sit $= S$. Quem casum quo facilius ad probl. 13. reducere possimus, demisso ex S ad fixam OA perpendiculo SX introducamus coordinatas $OX = x$ et $XS = y$, erit $x = u \cos\varphi$ et $y = u \sin\varphi$. Tum vero binas vires V et S ad easdem directiones SP et SQ revocemus, habebimusque vim $SP = -V\cos\varphi - S\sin\varphi$, et vim $SQ = -V\sin\varphi + S\cos\varphi$ quas supra vocavimus P et Q. Quocirca nanciscemur has duas aequationes:

$$ddx = -\frac{2g\,dt^2}{A}(V\cos\varphi + S\sin\varphi)$$

$$ddy = -\frac{2g\,dt^2}{A}(V\sin\varphi - S\cos\varphi)$$

ex quarum combinatione deducimus

$$ddx\cos\varphi + ddy\sin\varphi = -\frac{2gV\,dt^2}{A}$$

$$ddx\sin\varphi - ddy\cos\varphi = -\frac{2gS\,dt^2}{A}$$

Cum autem sit $x = u\cos\varphi$ et $y = u\sin\varphi$, erit

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = u \text{ et } x\sin\varphi - y\cos\varphi = 0,$$

unde differentiando:

$$dx\cos\varphi + dy\sin\varphi = du \text{ et } dx\sin\varphi - dy\cos\varphi + u\,d\varphi = 0$$

seu $dx\sin\varphi - dy\cos\varphi = -u\,d\varphi$

denuoque differentiando:

$$ddx\cos\varphi + ddy\sin\varphi + u\,d\varphi^2 = ddu$$

$$ddx\sin\varphi - ddy\cos\varphi + du\,d\varphi = -du\,d\varphi - u\,dd\varphi$$

Quibus valoribus substitutis, adipiscemur pro motus determinatione has duas aequationes.

I. $$ddu - u\,d\varphi^2 + \frac{2gV\,dt^2}{A} = 0$$

II. $$u\,dd\varphi + 2du\,d\varphi - \frac{2gS\,dt^2}{A} = 0$$

Digitized by Google

COROLL. 1.

218. Posterior aequatio per u multiplicata per integrationem reducitur ad hanc $uud\varphi = \frac{2gdt}{A}\int Sudt$, ubi notandum est, $\frac{1}{2}uud\varphi$ exprimere elementum areae AOS, unde haec area erit $= \frac{g}{A}\int dt\int Sudt$. Evanescente ergo vi laterali SV = S, haec area AOS est ipsi tempori t proportionalis, quomodocunque fuerit comparata altera vis V versus punctum O sollicitans.

COROLL. 2.

219. Si prior aequatio per du, posterior per $ud\varphi$ multiplicetur, aggregatum fiet

$$dud\,du + ud\,ud\varphi^2 + uu\,d\varphi\,dd\varphi = -\frac{2gVdt^2du}{A} + \frac{2gSudt^2d\varphi}{A}$$

unde integrando elicitur

$$du^2 + uud\varphi^2 = \frac{4gdt^2}{A}\int(Sud\varphi - Vdu)$$

ubi $\int(du^2 + uud\varphi^2)$ exprimit elementum arcus AS, ita ut $\frac{du^2+uud\varphi^2}{dt^2}$ sit quadratum celeritatis in S.

COROLL. 3.

220. Si secunda multiplicetur per $2u^3d\varphi$, ob dt constans reperitur integrale:

$$u^4d\varphi^2 = \frac{4gdt^2}{A}\int Su^3d\varphi.$$

unde per praecedentem eruimus:

$$uudu^2 = \frac{4gdt^2}{A}(uu\int Sud\varphi - \int Su^3d\varphi - uu\int Vdu)$$

seu $uudu^2 = \frac{4gdt^2}{A}(2\int udu\int Sud\varphi - uu\int Vdu)$

ubi notandum, quod elementum temporis dt extra signa integralia reperiatur.

COROLL. 4.

221. Si S = 0, qui est casus virium centripetarum, erit $uud\varphi = ffdt$, et $ud\varphi = \frac{fdt}{u}$, quo valore in coroll. 2. substituto fit

$$du^2 = -\frac{f4dt^2}{uu} - \frac{4gdt^2}{A}\int Vdu + udt^2$$

ideoque

Digitized by Google

ideoque $dt = \frac{u\,du}{\sqrt{(ccuu - ff - 4guu\int V\,du : A)}}$

et $d\varphi = \frac{ff\,du}{u\sqrt{(ccuu - ff - 4guu\int V\,du : A)}}$.

SCHOLION.

222. Usus harum formularum est amplissimus in Theoria Astronomiae, ex iisque determinari solent longitudo, anomalia et distantia planetae ad certum punctum sollicitati. Verum hic non est locus haec fusius prosequi, cum ad Astronomiam pertineant. Sufficiat mirum hic methodum ejusmodi problemata tractandi in genere explicasse; progrediamur ergo ad motus non in eodem plano factos expendendos.

PROBLEMA. 16.

223. Si corpusculum libere moveatur a viribus quicuscunque sollicitatum, determinare ejus motum per ternas coordinatas inter se normales.

SOLUTIO.

Constitutis ternis directricibus OA, OB et OC ad se invicem nor- Fig. 21.
malibus, moveatur corpusculum, cujus massa $= A$ in linea ESF, et elapso tempore t pervenerit in S, unde ad planum AOB demisso perpendiculo SY, ex Y ad OA agatur normalis YX, ut habeantur tres coordinatae inter se normales et directricibus parallelae, quae vocentur $OA = x$ $XY = y$ et $YS = z$, spatium autem jam percursum ES dicatur $= s$, ut sit $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$ et celeritas in $S = \frac{ds}{dt}$, quae ponatur $= v$. Iam a quibuscunque viribus corpusculum in S sollicitetur, eas reducere licet ad easdem ternas directiones. Sollicitetur ergo ab his viribus $SP = P$; $SQ = Q$ et $SR = R$, quarum effectus per superiora determinabuntur per tres sequentes aequationes:

$$ddx = \frac{2gP\,dt^2}{A}; \quad ddy = \frac{2gQ\,dt^2}{A} \text{ et } ddz = \frac{2gR\,dt^2}{A}$$

ubi quidem elementum dt sumtum est constans. Prout ergo vires P, Q, R, a coordinatis x, y, z, vel etiam a celeritate $\frac{ds}{dt} = v$ pendeant, ex Analysi subsidia resolutionis erunt petenda. Interim notasse juvabit, cum sit $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, et $vv = \frac{ds^2}{dt^2}$, ideoque $vdv = \frac{ds\,ddx}{dt^2} = \frac{dx\,ddx + dy\,ddy + dz\,ddz}{dt^2}$, fore:

Digitized by Google

$$v\,dv = \frac{2g}{A}(P\,dx + Q\,dy + R\,dz).$$

qua acceleratio corpusculi definitur. Pro curva autem invenienda ponatur $dy = p\,dx$ et $dz = q\,dx$, ut sit $ds = dx\sqrt{(1+pp+qq)}$ et $v = \frac{dx}{dt}\sqrt{(1+pp+qq)}$: Hinc ob $ddy = p\,ddx + dp\,dx$ et $ddz = q\,ddx + dq\,dx$, si loco ddx valor $\frac{2gP\,dt^2}{A}$ substituatur, reperitur:

$$dp\,dx = \frac{2g\,dt^2}{A}(Q - Pp) \text{ et } dq\,dx = \frac{2g\,dt^2}{A}(R - Pq).$$

Quare si hic pro dt^2 scribatur $\frac{dx^2(1+pp+qq)}{vv}$, erit

$$dp = \frac{2g\,dx(1+pp+qq)}{Avv}(Q - Pp)$$

$$dq = \frac{2g\,dx(1+pp+qq)}{Avv}(R - Pq)$$

seu $Q\,dx - P\,dy = \frac{Avv\,dp}{2g(1+pp+qq)}$

et $R\,dx - P\,dz = \frac{Avv\,dq}{2g(1+pp+qq)}$.

At si pro p et q restituantur valores $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$, fiet

$$Q\,dx - P\,dy = \frac{Avv(dx\,ddy - dy\,ddx)}{2g\,ds^2}$$

$$R\,dx - P\,dz = \frac{Avv(dx\,ddz - dz\,ddx)}{2g\,ds^2},$$

quae invicem divisae praebent.

$$P(dz\,ddy - dy\,ddz) + Q(dx\,ddz - dz\,ddx) + R(dy\,ddx - dx\,ddy) = 0$$

COROLL. 1.

224. Celeritas igitur in quovis curvae puncto determinatur hac aequatione differentiali

$$A\,v\,dv = 2g(P\,dx + Q\,dy + R\,dz)$$

ubi $\frac{P\,dx + Q\,dy + R\,dz}{ds}$ designat vim tangentialem ex viribus sollicitantibus ortam.

COROLL. 2.

225. Pro curva autem definienda binae ex his tribus aequationibus sufficiunt:

$$2g\,ds^2(Q\,dx - P\,dy) = Avv(dx\,ddy - dy\,ddx) = Avv\,dx^2\,d.\frac{dy}{dx}$$

$$2g\,ds^2(P\,dz - R\,dx) = Avv(dz\,ddx - dx\,ddz) = Avv\,dz^2\,d.\frac{dx}{dz}$$

$2g\,ds^2$

Digitized by Google

$$2gds^2\,(Rdy - Qdz) = Avv\,(dyddz - dzddy) = Avvdy^2\,d.\frac{dz}{dy}$$

binae enim ſimul tertiam involvunt. Tum vero hinc conſideratio differentialis conſtantis exceſſit.

COROLL. 3.

226. Ultima aequatio, a celeritate immunis, etſi differentialia ſecundi gradus continet, tamen non ad differentiale dt conſtans aſſumtum eſt adſtricta, ita enim poteſt repraeſentari.

$$Pdz^2\,d.\frac{dy}{dz} + Qdx^2\,d.\frac{dz}{dx} + Rdy^2\,d.\frac{dx}{dy} = 0$$

SCHOLION.

227. Ternae vires P, Q, R, quibus corpusculum in S ſollicitari ponimus, reducuntur ad unam, quae eſt $= \sqrt{(PP + QQ + RR)}$, ac ſi ea ponatur $= V$, ejus directio inclinatur ad SP angulo cujus coſinus eſt $= \frac{P}{V}$, ad SQ angulo cujus coſinus eſt $= \frac{Q}{V}$, et ad SR angulo cujus coſinus eſt $= \frac{R}{V}$. Tum ſi directio iſtius vis V cum directione motus Ss faciat angulum $= \omega$, erit vis accelerans ſeu ſecundum Ss ſollicitans $= V\,cof\,\omega$, quae cum ſit $= \frac{Pdx + Qdy + Rdz}{ds}$, erit $cof\,\omega = \frac{Pdx + Qdy + Rdz}{Vds}$, unde vis normalis colligitur $= V\,ſi\,\omega$, cujus poſi- Fig. 22.
tio ope trigonometriae Sphaericae commodiſſime repraeſentatur. Concipiatur S ut centrum ſphaerae, unde ad ſuperficiem porrigantur rectae SP, SQ et SR, ut ſint arcus PQ, PR, et QR quadrantes; directio motus tranſeat per s, et media directio virium per V, eritque

$$cof\,Ps = \frac{dx}{ds};\quad cof\,Qs = \frac{dy}{ds};\quad cof\,Rs = \frac{dz}{ds}$$

$$cof\,PV = \frac{P}{V};\quad cof\,QV = \frac{Q}{V};\quad cof\,RV = \frac{R}{V}$$

ac praeterea $Vs = \omega$ ſeu $cof\,\omega = \frac{Pdx + Qdy + Rdz}{Vds}$.

Cognito angulo ω, capiatur s VN $=$ quadranti, erit recta ex centro S per N ducta directio vis normalis: et puncti N poſitio ita ex ejus diſtantiis a punctis P, Q, R definitur, ut ſit

$$cof\,PN = \frac{P}{V\,ſi\,\omega} - \frac{dx\,cof\,\omega}{ds\,ſi\,\omega};\quad cof\,QN = \frac{Q}{V\,ſi\,\omega} - \frac{dy\,cof\,\omega}{ds\,ſi\,\omega}\ \text{et}$$

$$cof\,RN = \frac{P}{V\,ſi\,\omega} - \frac{dz\,cof\,\omega}{ds\,ſi\,\omega}.$$

Hine

Digitized by Google

Hinc igitur cum infinitae dentur rectae normales ad directionem motus Ss, inter eas determinatur illa, secundum quam agit vis normalis, et quae directionem motus incurvat, ita ut radius curvedinis in ipsam rectam SN incidat, qui erit $= \frac{Avv}{2gV\int\omega}$ (207).

PROBLEMA. 17.

Fig. 21. 228. Si corpusculum, cujus massa $= A$, in tubo seu canali moveatur, neque ab ullis viribus sollicitetur, determinare ejus motum, et pressionem, quam ubique in tubum exeret.

SOLUTIO.

Sit ESF figura tubi, in quo corpusculum moveatur, in quo elapso tempore t pertigerit ad S confecto spatio $ES = s$. Locus autem S ut ante referatur ad ternas directiones fixas OA, OB, OC inter se normales, quibus coordinatae parallelae vocentur $OX = x$, $XY = y$ et $YS = z$. Iam quia corpusculum cogitur ubique tubi directionem sequi, ipse tubus vires in id necessarias exeret, quae autem ita erunt comparatae, ut inde celeritas nullam mutationem patiatur. Erit ergo celeritas constans, quae sit $= c$, unde fit $\frac{ds}{dt} = c$ et $s = ct$. Revocentur vires a tubo exertae ad easdem ternas directiones, sintque $SP = X$, $SQ = Y$ et $SR = Z$, et ob celeritatem immutabilem $Xdx + Ydy + Zdz = 0$. Deinde quia $dt = \frac{ds}{c}$, loco dt constans erit elementum ds, ex quo formulae pricipales erunt

$Accddx = 2gXds^2$; $Accddy = 2gYds^2$ et $Accddz = 2gZds^2$ existente $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$. Tota ergo vis, quam tubus in corpusculum exercet, fiet

$$V(X^2 + Y^2 + Z^2) = \frac{AccV(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}{2gds^2} = V,$$

cujus directio inclinata erit ad rectam SP angulo cujus cosinus $= \frac{X}{V} = \frac{ddx}{V(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}$, ad SQ angulo cujus cosinus $= \frac{Y}{V} = \frac{ddy}{V(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}$ et ad SR angulo cujus cosinus $= \frac{Z}{V} = \frac{ddz}{V(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}$. Huic autem vi aequalis et contraria est pressio, quam corpusculum vicissim in tubum exerit.

CO-

Digitized by Google

COROLL. 1.

229. Si radius osculi curvae in S ponatur $= r$, ob vim normalem $= V$ et celeritatem $= c$ erit $r = \frac{dcc}{2gV}$, ideoque

$$r = \frac{ds^2}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}$$, sumto ds constante.

COROLL. 2.

230. Radii osculi autem positio cum directione vis V, qua corpusculum a tubo urgetur, congruit, inclinabitur igitur is ad rectam SP angulo, cujus cosinus $= \frac{ddx}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}$, ad SQ angulo, cujus cosinus $= \frac{ddy}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}$ et ad SR angulo, cujus cosinus est $= \frac{ddz}{\sqrt{(ddx^2 + ddy^2 + ddz^2)}}$.

SCHOLION.

231. Posset hic etiam motus expendi, quando corpusculum non in linea data, sed tantum in data superficie progredi cogitur, sed quia hoc argumentum copiose jam est tractatum in II. Libro Mech. ne hic nimis sim prolixus, id non attingam. Praesertim cum pateat, totum negotium huc redire, ut directio vis, quam superficies in corpusculum exerit, sit ad ipsam superficiem normalis: Quare ex aequatione superficiei proposita determinetur positio normalis, seu ejus inclinatio ad ternas directiones SP, SQ et SR, quae cum positione vis V ante definita congruere debebit. Atque hinc nova colligetur aequatio inter coordinatas x, y, z, quae cum priori data conjuncta definiet viam in superficie percursam, quam esse inter suos terminos brevissimam per se est perspicuum. Revertor ergo ad motum liberum, ac docebo, quomodo motus non in eodem plano factos per angulos ad certum punctum fixum relatos definiri conveniat, ea scilicet ratione, quam supra probl. 5 (70) exposui. Quod quia in Astronomia Theoretica maximam affert utilitatem, neque haec motuum evolutio in praecedentibus libris est explicata, ei sequens problema destinemus.

PROBLEMA. 18.

Tab. III. Fig. 23.

232. Si corpusculum partim ad punctum fixum O partim ab aliis quibuscunque viribus sollicitetur, definire ejus motum respectu ejus puncti.

SOLUTIO.

Constituto plano, quod sit planum tabulae, per punctum fixum O transeunte, ad quod motus referatur, in eoque sumta directrice fixa OA, pervenerit corpusculum elapso tempore t in S, unde primo in planum demittatur perpendiculum SY, et ex Y in rectam OA normalis YX, ut habeantur coordinatae orthogonales $OX = x$, $XY = y$, $YS = z$. Cum jam corpusculum in S primo a vi secundum SO sollicitetur, ea resolvatur in directiones YO et SY: reliquae vero vires cum ad easdem directiones, tum ad YV in plano tabulae ad OY normalem revocentur, ita ut omnino tres habeantur vires, quarum prima sit secundum $YO = V$, altera secundum $YV = S$, et tertia secundum $SR = R$. Quae vires cum sint cognitae, ad directiones coordinatarum reducantur, sicque posito angulo $AOY = \varphi$ obtinebuntur hae vires:

vis secundum $XO = V \cos\varphi + S \sin\varphi = -P$
vis secundum $YX = V \sin\varphi - S \cos\varphi = -Q$
vis secundum $SR = R$

quarum effectus per tres sequentes formulas exprimetur.

$$A\,ddx = -2g\,dt^2\,(V\cos\varphi + S\sin\varphi)$$
$$A\,ddy = -2g\,dt^2\,(V\sin\varphi - S\cos\varphi)$$
$$A\,ddz = -2gR\,dt^2$$ posita massa corpusculi $= A$.

Vocetur porro distantia $OY = u$, et ob $x = u\cos\varphi$ et $y = u\sin\varphi$, binae priores aequationes uti supra (217) ad has duas redigentur.

I. $$dd u - u\,d\varphi^2 + \frac{2gV\,dt^2}{A} = 0$$

II. $$u\,dd\varphi + 2\,du\,d\varphi - \frac{2gS\,dt^2}{A} = 0.$$

Ponatur nunc angulus $SOY = \psi$, qui corpusculi latitudo vocatur, dum angulus $AOY = \varphi$ est ejus longitudo; erit $SY = z = u\,tang\,\psi$. At pro hoc angulo ψ commodius inveniendo sit OT linea nodorum, angulus $AOT = \omega$ et inclinatio plani per O et directionem motus in S ducti ad planum assumtum $= \varrho$, erit $TOY = \varphi - \omega$, hinc ductis YN et SN ad OT normalibus, fiet $ON = u\cos(\varphi - \omega)$, et $YN = u\sin(\varphi - \omega)$, ideoque $YS = u\sin(\varphi - \omega)\,tang\,\varrho = z$, hincque $tang\,\psi = \sin(\varphi - \omega)\,tang\,\varrho$, et uti supra (70).

$$\frac{d\omega}{tang\,(\varphi - \omega)} = \frac{d\varrho}{\sin\varrho\cos\varrho} = d.l\,tang\,\varrho$$

Quare cum sit $d\varrho = \frac{d\omega \sin\varrho\cos\varrho}{tang\,(\varphi - \omega)}$, erit

$dz =$

Digitized by Google

$$dz = du\,sf(\varphi-\omega)\,tang\,\varrho + u\,(d\varphi-d\omega)\,cof(\varphi-\omega)\,tang\,\varrho + u\,sf(\varphi-\omega).\,\frac{d\omega\,tang\,\varrho}{tang\,(\varphi-\omega)}$$

seu $dz = (du\,sf(\varphi-\omega) + u\,d\varphi\,cof(\varphi-\omega))\,tang\,\varrho$

qui valor denuo differentiatus dat:

$$ddz = (ddu\,sf(\varphi-\omega) + du\,(2d\varphi-d\omega)\,cof(\varphi-\omega) + u\,dd\varphi\,cof(\varphi-\omega) - u\,d\varphi\,(d\varphi-d\omega)\,sf(\varphi-\omega))\,tang\,\varrho + (du\,sf(\varphi-\omega) + u\,d\varphi\,cof(\varphi-\omega))\,\frac{d\omega\,tang\,\varrho}{tang\,(\varphi-\omega)}.$$

sive

$$ddz = (ddu\,sf(\varphi-\omega) + 2du\,d\varphi\,cof(\varphi-\omega) + u\,dd\varphi\,cof(\varphi-\omega) - u\,d\varphi^2\,sf(\varphi-\omega) + \frac{u\,d\varphi\,d\omega}{sf(\varphi-\omega)})\,tang\,\varrho$$

Cum igitur sit

$$ddu - u\,d\varphi^2 = -\frac{2gV\,dt^2}{A} \text{ et } u\,dd\varphi + 2du\,d\varphi = \frac{2gS\,dt^2}{A}$$

obtinebitur

$$ddz = (\frac{-2gV\,dt^2}{A}\,sf(\varphi-\omega) + \frac{2gS\,dt^2}{A}\,cof(\varphi-\omega) + \frac{u\,d\varphi\,d\omega}{sf(\varphi-\omega)})\,tang\,\varrho.$$

Quare ob $ddz = \frac{2gR\,dt^2}{A}$ erit

$$\frac{u\,d\varphi\,d\omega}{sf(\varphi-\omega)} = \frac{2g\,dt^2}{A}\,(V\,sf(\varphi-\omega) - S\,cof(\varphi-\omega) + R\,cot\,\varrho)$$

seu $d\omega = \frac{2g\,dt^2\,sf(\varphi-\omega)}{A\,u\,d\varphi}\,(V\,sf(\varphi-\omega) - S\,cof(\varphi-\omega) + R\,cot\,\varrho)$

et $d.\,l\,tang\,\varrho = \frac{2g\,dt^2\,cof(\varphi-\omega)}{A\,u\,d\varphi}\,(V\,sf(\varphi-\omega) - S\,cof(\varphi-\omega) + R\,cot\,\varrho)$

Inventae ergo sunt quatuor aequationes, quibus problematis solutio continetur.

COROLL. 1.

233. Cum igitur ad datum tempus t assignari debeant hae quatuor quantitates u, φ, ω et ϱ, nacti sumus primo has duas aequationes differentio-differentiales

$$ddu - ud\varphi^2 + \frac{2gVdt^2}{A} = 0 \text{ et } udd\varphi + 2dud\varphi - \frac{2gSdt^2}{A} = 0$$

deinde has duas ſimpliciter differentiales

$$d\omega = \frac{2gdt^2 fi(\varphi-\omega)}{Aud\varphi}(V fi(\varphi-\omega) - S cof(\varphi-\omega) + R cot \varrho)$$

$$\text{et } d.l tang \varrho = \frac{d\omega}{tang(\varphi-\omega)} \text{ ſeu } d. tang \varrho = \frac{d\omega tang \varrho}{tang(\varphi-\omega)}.$$

COROLL. 2.

234. Inventis autem his valoribus colligetur tam angulus SOY $= \psi$ *latitudo* dictus; quam diſtantia vera SO, ex his formulis, $tang \psi = fi(\varphi-\omega) tang \varrho$ et $OS = \frac{u}{cof \psi}$, ubi u dici ſolet *diſtantia curtata*.

COROLL. 3.

235. Si fuerit $fi(\varphi-\omega) = 0$, hoc eſt, ſi corpuſculum per planum aſſumtum tranſit, ſupra jam vidimus, fore $d\omega = 0$; at nunc patet, tam lineam nodorum, quam inclinationem, nullam mutationem pati, ſi fuerit:

$$V fi(\varphi-\omega) - S cof(\varphi-\omega) + R cot \varrho = 0$$

COROLL. 4.

236. Eſt vero $V fi(\varphi-\omega) - S cof(\varphi-\omega) = -Q cof\omega + P fi\omega$, atque introductis primitivis viribus P, Q, R erit

$$V fi(\varphi-\omega) - S cof(\varphi-\omega) + R cot \varrho = P fi\omega - Q cof\omega + R cot \varrho.$$

atque haec eſt quaſi vis, tam locum lineae nodorum quam inclinationem immutans.

SCHOLION.

237. Imprimis hic notari meretur, quod variatio momentanea in ſitu lineae nodorum et inclinatione, ſatis concinna hac methodo exprimi potuerit, unde in Aſtronomiam Theoreticam inſignia commoda redundant. Ex hoc fonte à Cel. Mayero Prof. Goetting. incredibili ſtudio deductae ſunt Tabulae Lunares excellentiſſimae, quibus Aſtronomia fere ad ſummum faſtigium evecta eſt cenſenda. Cum autem motus lunae, qui hac methodo definitur, neutiquam ſit abſolutus, ſed ad centrum

Digitized by Google

trum terrae relatus, in hac inveſtigatione ſimul motus terrae ratio eſt habenda; quare ut hac methodo uti queamus, praecepta tradi conveniet, quorum ope motus reſpectivos ad calculum revocare liceat, ſiquidem motus ejus corporis, cujus reſpectu aliorum corporum motus aeſtimantur, fuerit cognitus. Quod argumentum cum non ſatis dilucide in ſuperioribus Mechanicae Libris ſit expoſitum, hic majori cura illud pertractabo; quo facto ad motus corporum finitorum, quos ibi nondum attigeram, feliciori cum ſucceſſu progredi licebit.

CAPUT VI.

DE MOTU RESPECTIVO CORPUSCULORUM A VIRIBUS QUIBUSCUNQUE SOLLICITATORUM.

THEOREMA. 6.

238. Si corpusculum A a viribus quibuscunque ſollicitetur; ejus motus reſpectu puncti O, quod uniformiter in directum fertur, per easdem vires determinabitur. Fig. 24.

DEMONSTRATIO.

Tempusculo *dt* feratur corpusculum A ob motum inſitum per ſpatium A*a*, ob vires autem ſollicitantes detorqueatur per ſpatiolum *ab*, ita ut *ab* ſit effectus virium tempusculo *dt* in corpusculo A productus. Interea autem punctum O progrediatur per ſpatium O*o*, ita ut elapſo tempusculo *dt* hoc punctum ſit in *o*, cum ante fuiſſet in O, corpusculum autem in *b*, cum ante fuiſſet in A. Iam ex O ducatur Oα ipſi *oa* aequalis et parallela, itemque $\alpha\zeta$ aequalis et parallela ipſi *ab*; atque reſpectu puncti O corpusculum videbitur ex A in *b* perveniſſe eodem tempusculo *dt*, qui motus ita ſe habebit, ac ſi ob motum inſitum deſcripſiſſet ſpatium Aα, ſimulque ex α detorqueretur per ſpatiolum $\alpha\zeta$. Scilicet ſi corpusculum a nullis viribus ſollicitaretur, ac per A*a* aequabiliter in directum moveretur, etiam motus reſpectivus foret aequabilis rectilineus per Aα, uti ſupra oſtendimus. Nunc autem ob vires ſollicitantes, in motu abſoluto producitur ſpatiolum *ab*, in reſpectivo autem ſpatiolum $\alpha\zeta$, quod cum illi ſit parallelum et aequale, motus reſpectivus ab iisdem viribus turbatur

batur ac motus absolutus. Hinc si punctum O uniformiter in directum feratur, ejus respectu motus corpusculi A, a quibuscunque viribus sollicitetur, perinde se habebit, ac si punctum O quiesceret, corpusculumque ab iisdem viribus sollicitaretur.

COROLL. 1.

239. Si ergo vires noverimus, quibus corpusculum A sollicitatur, ex iis per praecepta ante tradita non solum ejus motum absolutum, sed etiam respectivum ad punctum O, quod uniformiter in directum progreditur, relatum definire valemus.

COROLL. 2.

240. Atque adeo eaedem formulae differentio - differentiales tam motum absolutum quam respectivum determinabunt: discrimen tantum in integratione cernetur, quae utroque casu rite ad statum initialem est accommodanda.

COROLL. 3.

241. Sive ergo punctum O, cujus respectu motus aestimatur, quiescat, sive moveatur uniformiter in directum, investigatio motus perinde se habet. Scilicet uti effectus inertiae hoc casu non mutatur, ita etiam effectus virium idem manet.

EXPLICATIO. 1.

242 Dum punctum et corpusculum ex *o* et *b* in O et ☾ mente transferuntur, efficiendum est ut ☾ respectu O eundem situm teneat, ac *b* respectu O, quod cum O et *o* ut puncta spectentur, rem minime determinare videtur, quandoquidem, ut supra innuimus, sola distantia *ob* et O☾ situm respectivum contineret. Verum stabilito jam spatio absoluto plagas seu directiones fixas assumere licet, ita ut O☾ non solum ipsi *ob* aequalis sed etiam in eandem plagam directa statui debeat, id quod evenit, si O☾ ipsi *ob* aequalis ac parallela accipiatur. Res eodem redit, si secundum prima praecepta loco puncti O corpus extensum assumatur, in quo tria vel quatuor puncta fixa concipere liceat: tum autem hoc corpus O, cujus respectu motus alterius aestimatur, ita secundum O*o* moveri est censendum, ut singula ejus puncta paribus celeritatibus secundum directiones inter se parallelas ferantur. Tum enim quem situm tenuerit corpusculum *b* respectu quatuor punctorum in corpore *o* assumtorum, eundem situm tenebit corpusculum in ☾ translatum respectu eorundem quatuor punctorum, dum corpus adhuc est

Digitized by Google

est in O. His notatis manifestum est, motum corpusculi absolutum, quo ex A in *b* transfertur, dum punctum O in *o* progreditur, convenire cum motu respectivo, quo ex A in ζ transfertur. Quod etsi hic tantum de temporis elemento *dt* est ostensum, quoniam idem de omnibus temporis elementis simili modo ostenditur, recte affirmamus in genere, totum motum respectivum hic definitum motui absoluto respondere.

SCHOLION.

243. Quae hic de motu respectivo corpusculi A respectu puncti O sunt tradita ac porro tradentur, alias et potissimum in Astronomia sub titulo *motus apparentis* proponi solent. In puncto scilicet O, cujus respectu motus corpusculi A aestimatur, spectator constituitur, et quaestio ita proponitur, quomodo huic spectatori motus corpusculi sit appariturus. Nam spectator, quomodocunque punctum O, quod est ejus statio, moveatur, motum suum non sentire censetur, ita ut se constanter in eodem loco O persistere arbitretur. Quare cum nunc vidisset corpusculum in A, elapso autem tempusculo *dt* in ζ, corpusculum ipsi interea ex A in ζ translatum videbitur, cum tamen revera ex A in *b* pervenerit; dicitur ergo translatio ex A in ζ *motus apparens*. In casu ergo nostri Theorematis spectator uniformiter in directum promoveri assumitur, atque demonstravimus, motum apparentem corpusculi A per praecepta Mechanica definitum iri, si corpusculum ab iisdem viribus, quae actu in id agunt, sollicitari statuatur. Eaedem nimirum formulae differentio-differentiales tam motum apparentem, quam motum verum exprimunt: pro motu autem apparente ita integrari debent, ut initio vel aliquo tempore dato cum motu apparente conveniant. Totum ergo discrimen demum in integratione se exerit.

EXPLICATIO. 2.

244. Vires motum respectivum turbantes propterea illis, quae motum absolutum afficiebant, aequales esse debent, quia effectus seu spatiola *ab* et *a*ζ aequalia deprehendimus. Atque haec virium aequalitas in calculo facile observatur, si ad genus virium absolutarum pertineant, quae perinde in corpusculum motum agunt atque quiescens: sin autem corpusculum A ab ejusmodi viribus sollicitetur, quae ab ejus celeritate pendent, cujusmodi est resistentia fluidorum, quantitas earum virium ex celeritate corpusculi vera, quam in motu absoluto habet, est petenda, eademque in motu respectivo adhibenda. Veluti si corpusculum A in fluido moveretur, resistentia seu vis, quam ab eo patitur,

Digitized by Google

patitur, pendebit ab ejus celeritate absoluta, qua spatiolum Aa percurrit, eademque vis in calculum pro motu respectivo introduci debet; atque insignis error committeretur, si resistentiam ex celeritate motus respectivi, qua spatiolum $A\alpha$ conficitur, definire vellemus. Quem errorem ut evitemus, ipsum fluidum, quatenus absolute quiescit, pro motu respectivo quasi motu aequali et opposito ei, quo punctum O movetur, ferretur, contemplari debemus; tum enim fluidum hoc motu praeditum aeque afficiet corpusculum motu respectivo per $A\alpha$ progrediens, atque fluidum quiescens afficit corpusculum motu absoluto per Aa latum. Perpetuo autem quoties de motu respectiva quaestio est, non solum corpusculum A, sed totum quasi spatium cum omnibus corporibus, quae in id agere queant, motu aequali et contrario ei, quem punctum O habet, moveri est concipiendum, quandoquidem hoc motu ficto punctum O ad quietem redigitur.

THEOREMA. 7.

Fig. 25. 245. Si duo corpora A et B utcunque moveantur a viribus quibuscunque sollicitata, iisque eodem momento insuper motus aequales secundum eandem directionem imprimantur, motum inter se eundem conservabunt.

DEMONSTRATIO.

Exprimat recta Aa motum corporis A, seu sit spatium ab eo tempusculo dt descriptum; similique modo corpus B tantam habeat celeritatem, qua eodem tempusculo dt describeret spatium Bb: a viribus sollicitantibus autem illud ex a in m, hoc vero ex b in n deflectatur, ita ut nunc elapso tempore dt recta mn referat situm relativum, qui ante recta AB referebatur. Incipiente autem tempusculo dt subito utrique corpori motus aequalis secundum eandem directionem imprimatur, quo solo corpus A in p et B in q tempusculo dt transferretur, ita ut rectae Ap et Bq futurae sint aequales ac parallelae. Accedente autem motu jam insito, si parallelogramma $Aa\alpha p$ et $Bb\mathfrak{C}q$ compleantur, diagonales $A\alpha$ et $B\mathfrak{C}$ spatia referent, quae corpora ob utrumque motum tempusculo dt essent percursura. Iam ob rectas $a\alpha$ et $b\mathfrak{C}$ aequales et parallelas, etiam ab et $\alpha\mathfrak{C}$ erunt aequales et parallelae, ita ut situs relativus $\alpha\mathfrak{C}$ post novum motum impressum conveniat cum situ relativo ab. Capiatur porro $\alpha\mu$ aequalis et parallela ipsi am, et $\mathfrak{C}\nu$ aequalis et parallela ipsi bn, et cum μ et ν nunc sint loca corporum, accedentibus viribus sollicitantibus, erit quoque $\mu\nu$ aequalis et parallela ipsi

ipsi *mn*. Quare manentibus iisdem viribus sollicitantibus motus impressus nihil mutat in situ et motu relativo amborum corporum.

COROLL. 1.

246. Hoc etiam ad plura patet corpora: quotcunque enim fuerint, si singulis simul motus aequales et paralleli imprimantur, motus eorum relativus inter se non mutabitur, a quibuscunque etiam viribus singula sollicitentur.

COROLL. 2.

247. Motus hic de novo impressus eodem redit, ac si totum spatium cum corporibus motu illo novo abriperetur uniformiter in directum. Compositio enim motus hic adhibita cum translatione spatii convenit.

SCHOLION. 1.

248. Hic non tam de vera motus impressione sermo est, quae utique sine notabili concussione fieri non posset, quam de motu, quem corporibus mente tantum imprimi concipimus. Neque enim quae in isto capite traduntur, ad veras mutationes in motu factas sunt referenda, cum institutum nostrum hic sit motus quoscunque absolutos ad respectivos reducere, ita ut formulae tantum ostendant motum respectivum, absoluto nullam plane mutationem passo. Atque hinc etiam istud Theorema ex praecedente ita demonstrari potest: concipiatur praeter corpora A et B punctum O, quod secundum directionem Oo parallelam illi, secundum quam corporibus novus motus imprimitur, uniformiter moveatur eadem celeritate, ita ut tempusculo dt percursurum esset spatium $Oo = Ap = Bq$ his parallelum, sed contra directum. Quoniam igitur ante demonstravimus, motum respectivum corporum A et B respectu puncti O iisdem viribus atque absolutum determinari, evidens est hunc motum respectivum obtineri, si toti spatio cum corporibus motus aequalis et contrarius ei, quo punctum O movetur, imprimatur. Hoc autem modo punctum O ad quietem redigitur, corporibus A et B autem ipse ille motus secundum Ap et Bq imprimitur: et quia ea respectu puncti O eundem motum retinent, etiam inter se eundem motum relativum conservabunt.

SCHOLION. 2.

249. Quaestio de motu quocunque respectivo seu apparente per calculum determinando eo redit, ut definiatur primo, qualis motus

Digitized by Google

corpori insuper mente saltem imprimi debeat, deinde a qualibus viribus praeter eas, quibus actu urgetur, sollicitari sit intelligendum, ut si hic motus tanquam absolutus tractetur, et per formulas supra traditas exprimatur, ipse motus respectivus, qui desideratur, sit proditurus. Evidens enim est, semper tam in motu insito, quam in viribus sollicitantibus ejusmodi mutationem concipi posse; ut motus hoc modo mutatus cum respectivo quem quaerimus conveniat. Totum ergo hoc negotium duplici mutatione, altera in motu insito, altera in viribus sollicitantibus facta absolvitur, quae autem utraque mente tantum instituitur; unde nulla difficultas ex eo nasci potest, quemadmodum corporibus A et B motus illi secundum Ap, et Bq, praeter eos motus, quibus jam feruntur, imprimi debeant. Sufficit enim declarasse, hanc impressionem ita esse intelligendam, ut corpus A celeritate Aa latum, si ipsi insuper celeritas Ap tribuatur, motu per diagonalem $A\alpha$ expresso progredi sit censendum: Haec scilicet motus impressio seu potius additio conformis est regulis supra datis circa resolutionem motus in duos tresve laterales, quae etiam mente tantum instituitur. Talis motus impressio etiam ita referri solet, ut totum spatium cum corporibus in eo contentis motu quodam abripi concipiatur. Atque in priori quidem Theoremate vidimus, si punctum, cujus respectu motum aestimari oporteat, uniformiter in directum progrediatur, pro motu respectivo definiendo nihil in viribus sollicitantibus esse mutandum, sed tantum motum insitum ita mutari debere, ut insuper imprimatur motus aequalis et contrarius ei, quo punctum illud moveatur.

THEOREMA. 8.

Fig. 26. 250. Si corpuscula A, B, C, uteumque moveantur a viribus quibuscunque sollicitata, eaque insuper secundum directiones parallelas a viribus ipsorum massis proportionalibus sollicitentur, eorum situs relativus non turbabitur.

DEMONSTRATIO.

Fuerint nunc corpuscula in A, B, C, quae tam ob motum insitum quam vires sollicitantes tempusculo dt pervenirent in a, b, c, quibus punctis jam eorum situs relativus definitur. Concipiamus autem ea interea praeter istas vires solliciſari singula secundum directiones parallelas $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ a viribus, quae sint ipsorum massis proportionales, eaque jam non in a, b, c, reperientur, sed in α, β, γ, ita ut spatiola $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ futura sint inter se parallela et aequalia: atque

Digitized by Google

atque evidens est, punctorum α, $\mathfrak{C}$, γ situm relativum inter se eundem fore ac punctorum a, b, c ubi essent futura, si hae novae vires non accessissent.

COROLL. 1.

251. Si ergo corpuscula A, B, C, quovis instanti praeter vires quibus actu urgentur, a viribus ipsorum massis proportionalibus secundum directiones inter se parallelas sollicitentur, ad quodvis tempus eundem inter se situm relativum tenebunt, ac si istae novae vires abfuissent.

COROLL. 2.

252. Motus igitur solis ac planetarum relativus inter se non immutatur, si singula haec corpora praeter vires, quibus actu sollicitantur, a novis viribus ipsorum massis proportionalibus impelli concipiantur secundum directiones inter se parallelas.

COROLL. 3.

253. Si istae vires adjectae ita assumantur, ut ea, quae in corpusculum A agit, aequalis sit et contraria ei, qua actu sollicitatur, hujus motus non immutabitur: quod si singulis momentis fieri concipiamus, corpusculum A in statu suo permanebit, et uniformiter in directum promovebitur.

EXPLICATIO.

254. Dubium hinc oriri potest, an etsi puncta α et $\mathfrak{C}$ eundem situm inter se teneant ac puncta a et b, deinceps non alius situs relativus sit proditurus? Ad quod diluendum seponamus primo vires, quibus haec corpuscula actu sollicitantur, ac remotis etiam viribus adjectis sequenti tempusculo corpuscula pervenirent in a' et b', ut esset $aa' = A\alpha$ et $bb' = B\beta$; sin autem hae vires pro tempusculo praecedente dt admittantur, pervenient in α' et $\mathfrak{C}'$, ut sit $\alpha\alpha' = A\alpha$ et $\mathfrak{C}\mathfrak{C}' = B\mathfrak{C}$, sicque erit $b'\mathfrak{C}'$ aequalis et parallela ipsi $a'\alpha'$, ita ut situs relativus punctorum α', $\mathfrak{C}'$ idem sit qui punctorum a', b'. Recte quidem hic objiceretur, spatiola $\alpha\alpha'$ et $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ perperam ipsis $A\alpha$ et $B\mathfrak{C}$ aequalia assumi, cum ob actionem virium celeritates sint mutatae, sed quia mutatio utrinque est similis, nihilominus spatiola $a'\alpha'$ et $b'\mathfrak{C}'$ inter se manebunt aequalia et parallela, id quod sufficit, etiamsi non sint ipsorum $a\alpha$ et $b\mathfrak{C}$ praecise dupla. Quaecunque autem vires per alterum hoc tem-

tempusculum dt in ambo corpuscula agant, prius A aeque ex a' detorquebitur, atque ex a', et posterius B aeque ex $\mathfrak{C}'$ atque ex b': sicque etiam sive novae vires massis proportionales accesserint sive secus, idem adhuc situs relativus conservabitur. Ponamus enim, a viribus propriis corpusculum A ex a' in m transferri, idemque ex a' in μ, transferetur, ut sit $a'm$ aequale et parallelum ipsi $a'\mu$; simili modo si corpusculum B a propriis viribus ex b' in n transfertur, idem ex $\mathfrak{C}'$ in ν transferetur, ut sit $\mathfrak{C}'\nu$ aequale et parallelum ipsi $b'n$. Cum igitur puncta μ et ν eundem situm relativum teneant, quem puncta m et n, patet etiam, temporis successu a viribus illis insuper adjectis situm relativum non mutari.

PROBLEMA. 19.

Fig. 25. 255. Si corpusculum B moveatur utcumque a viribus sollicitatum, ejus respectu determinare motum respectivum corpusculi A, quod etiam a viribus quibuscunque sollicitatum utcumque moveatur.

SOLUTIO.

Imprimatur initio utrique corpori motus aequalis et contrarius ei, quo tunc corpusculum B fertur, ac primo saltem momento corpusculum in quietem redigetur: ambo autem corpora motu relativo inter se perinde incedent, ac si iste motus communis illis non fuisset impressus: quin etiam cum tantum in statu initiali haec mutatio sit facta, utriusque motus subsequens iisdem formulis exprimetur. Corpusculum vero B, quatenus actioni virium est subjectum, deinceps quidem movebitur; verum si id continuo insuper a viribus his contrariis et aequalibus agitur, concipiamus, ut illarum effectus destruatur, id perpetuo in quiete perseverabit. Quare ne motus relativus turbetur, concipiamus etiam corpusculo A singulis temporis momentis similes vires applicari, quae scilicet sint contrariae illis, quibus corpusculum B sollicitatur, ad easque se habeant ut massa A ad massam B. Hoc modo corpusculum B plane ad quietem redigetur, motu alterius A respectu hujus non mutato, eritque ergo iste motus ipsius A ejus motus respectivus, qualis spectatori in B constituto esset appariturus. Ad hunc igitur motum respectivum per calculum determinandum, corpusculum A a duplicis generis viribus sollicitari est considerandum, primo scilicet ab iis ipsis viribus, quibus revera sollicitatur: deinde vires, quibus corpusculum B sollicitatur, in ratione massarum B ad A augeantur vel minuantur, atque secundum directiones contrarias corpusculo A insuper applicatae intelligantur. Ex his viribus motus corpusculi A, quasi esset absolutus, per praecepta

ante

Digitized by Google

ante exposita determinetur, atque obtinebitur ejus motus respectivus quaesitus.

COROLL. 1.

256. Si ergo elapso tempore t corpusculum A sollicitetur a vi $= P$, corpusculum B vero a vi $= Q$, hinc capiatur vis $= \frac{AQ}{B}$, quae insuper corpusculo A applicetur in directione contraria ei, qua vis Q in corpusculum B agit.

COROLL. 2.

257. Quodsi ex his viribus, corpusculo A quovis tempore applicatis, formulae differentio-differentiales ejus motum definientes colligantur, integratio ad statum initialem, qui ut cognitus spectatur, est accommodanda, dum scilicet constantes per integrationes ingressae ex hoc statu determinantur.

SCHOLION. 1.

258. Ope hujus regulae motus lunae, qualis ex centro terrae spectaretur, definiri solet; etsi enim corpora coelestia ob vastam magnitudinem hinc excludi videntur, tamen infra docebitur, ea perinde moveri, ac si eorum massae in cujusque centro gravitatis essent collectae, ita ut instar punctorum considerari possint. Ad motum ergo hunc lunae apparentem definiendum, non sufficit vires nosse, quibus luna continuo sollicitatur, sed etiam vires diligenter sunt inquirendae, quarum actioni ipsa terra subjicitur. Has vires deinde in ratione massae terrae ad massam lunae diminui oportet, haeque insuper lunae in directionibus contrariis iis, quibus in terram agunt, applicatae concipi debent; atque ex his viribus junctim sumtis motus lunae respectivus, qualis spectatori in centro terrae constituto esset appariturus, determinari debet. Simili modo si centrum solis non quiescat, motusque planetarum primariorum respectu centri solis sit definiendus, omnes vires, quas Sol subit, praecepto modo insuper in planetas transferri debent. Unde patet, usum hujus problematis per universam Astronomiam Theoreticam esse amplissimum: verum etiam inde in investigationem aliorum motuum, ubi saepenumero motus respectivos nosse expedit, maxima subsidia redundant.

Digitized by Google

SCHOLION. 2.

259. Atque haec ſunt, quibus ea, quae in ſuperioribus libris de motu punctorum expoſui, partim illuſtranda partim ſupplenda ſunt viſa, ubi equidem non ſolum motus principia clarius expoſuiſſe et confirmaſſe videor, ſed etiam eorum applicationem ad quosvis caſus non mediocriter ſublevavi, reductionemque ad menſuras abſolutas faciliorem reddidi. Tum vero etiam doctrinam de motu reſpectivo, in illis libris fere penitus neglectam, hic diligentius exponendam putavi, quoniam ea etiam in ſequentibus uberrimum uſum praeſtabit. Progredior itaque ad eas Mechanicae partes, quas in illis libris plane non attigeram, ac primo quidem occurrunt corpora rigida, quorum figura nullius mutationis eſt capax, quorum motus evolvi oportebit, tam quando ſibi ſunt relicta, quam a viribus quibuscunque ſollicitata. Tum vero demum licebit has inveſtigationes ad motus corporum flexibilium, elaſticorum atque adeo fluidorum proſequi: quorſum etiam referri debent motus ex concurſu plurium corporum cujusque indolis oriundi. Quae diverſa genera ſi perpendamus, intelligemus in Mechanica ampliſſimum campum aperiri noſtris ſtudiis, cujus cultura largiſſimam meſſem polliceatur.

TRA-

Digitized by Google

TRACTATUS
DE
MOTU CORPORUM
RIGIDORUM.

Digitized by Google

Digitized by Google

CAPUT I.

DE MOTU PROGRESSIVO CORPORUM RIGIDORUM.

DEFINITIO. 1.

260. *Corpus rigidum* vocatur, cujus figura nullam mutationem patitur; ſeu cujus ſingula elementa conſtanter easdem inter ſe diſtantias conſervant.

COROLL. 1.

261. Cognito ergo loco quaternorum punctorum corporis rigidi, ejus ſitus innoteſcit, cum inde omnium reliquorum punctorum loca determinentur: dummodo quatuor illa puncta non ſint in eodem plano.

COROLL. 2.

262. plerumque etiam ad ſitum corporis rigidi cognoſcendum ſufficit poſitionem trium ejus punctorum noſſe, dummodo non ſint in directum ſita: quanquam enim hoc modo duplex relinquitur ſitus, ſaepiſſime uter locum habeat, aliunde patet.

EXPLICATIO.

263. Corpora rigida non ita definio, ut eorum figura nullam plane mutationem pati poſſit; quandoquidem conſtat, nulla in mundo dari corpora tam dura, quorum figurae alterandae nullae omnino vires pares exiſtant, cum etiam duriſſimus adamas diffringi queat. Ad claſſem ergo corporum rigidorum ea omnia refero corpora, quae dum moventur, actu nullam mutationem in figura ſua patiuntur, ſeu quae vires, quarum actionem revera ſubeunt, ſine ulla figurae ſuae muta-

Digitized by Google

tione ſuſtinere valeant, etiamſi majoribus viribus non reſiſterent. Ita in corporibus, quorum motus hic contemplari inſtitui, ejusmodi ſtructuram partiumque nexum ſtatuo, qui a viribus ea actu ſollicitantibus turbari nequeat, id minime curans, quando ab aliis viribus afficerentur. Hinc ad vires ſollicitantes hic potiſſimum erit attendendum, quarum reſpectu corpora pro rigidis erunt habenda, quorum compages earum actioni ſatis reſiſtat, etiamſi eadem reſpectu aliarum virium minime pro rigidis eſſent habenda. Fieri itaque poterit, ut corpora admodum mollia ac debilia nobis ſint rigida, alia vero per ſe multo duriora hinc excludi debeant. Quare dum motus hujusmodi corporum inveſtigamus, in vires, quibus eorum compages partiumque connexio afficitur, ſedulo inquiri conveniet, ut intelligamus, quanta firmitate ſit opus, ut figura conſervetur. Corpus igitur ut rigidum ſpectabimus, quando nexus inter ejus partes ſatis eſt firmus, ut ne duo quidem elementa a viribus, quas actu ſuſtinet, vel propius ad ſe invicem cogi, vel longius a ſe invicem divelli queant.

SCHOLION.

264. Corpus ergo rigidum alium motum recipere nequit, niſi quo omnia ejus puncta easdem perpetuo inter ſe diſtantias conſervant: nihilo vero minus tale corpus infinitorum motuum eſt capax, dum enim adeo unum aliquod ejus punctum quieſcit, aliud per circumferentiam ſphaerae circumferri poteſt, et quomodocunque hoc moveatur, tertium aliquod punctum ſive celerius ſive tardius moveri poteſt, ut tamen ab illis duobus debitas diſtantias ſervet. Ex quo intelligitur, ſi nullum punctum quieſcat, adhuc multo majorem fore motuum multiplicitatem, qui quidem in corpore ineſſe poſſint: cognito autem trium punctorum non in directum ſitorum motu, reliquorum omnium hoc eſt motus totius corporis innoteſcit. Inter omnes autem hos motus is eſt ſimpliciſſimus, quo ſingula corporis puncta ſecundum directiones inter ſe parallelas paribus celeritatibus quovis temporis momento promoventur: tali enim motu ſitus relativus omnium particularum neutiquam turbatur. Atque hoc motus genus, quod in omnia corpora cadit, accuratius contemplemur.

DEFINITIO. 2.

265. *Motus progreſſivus* eſt, quo ſingula corporis puncta paribus celeritatibus ſecundum directiones inter ſe parallelas quovis temporis momento promoventur.

CO-

Digitized by Google

COROLL. 1.

266. Cognito ergo motu unici puncti omnium punctorum motus utpote illi aequalis innoteſcit: ſingula enim puncta quovis temporis momento ſecundum eandem directionem et eadem celeritate feruntur, atque illud punctum.

COROLL. 2.

267. Sive ergo unum aliquod punctum lineam rectam ſive curvam motu quocunque deſcribit, omnia plane puncta in aequalibus lineis, ſive rectis ſive curvis ſimili modo movebuntur.

COROLL. 3.

268. Tali motu, ſive ſit rectilineus ſive curvilineus, diſtantiae binorum quorumque punctorum corporis non mutantur. Quin etiam rectae bina quaeque puncta jungentes perpetuo ſibi manent parallelae.

SCHOLION.

269. Hic motus tanquam ſimpliciſſimus, et cujus omnia corpora ſunt capacia, primus ſe conſiderandum offert, eumque in motibus corporum coeleſtium primo animadvertimus. Dum enim ea ut puncta ſpectamus, calculum ita inſtituimus, quaſi ſolo motu progreſſivo per coelos ferrentur, ac deinceps demum ipſis inſuper motum gyratorium tribuimus: ubi quidem prior motus *periodicus*, poſterior *vertiginis* vocari ſolet. Quando autem corpori ſolum motum progreſſivum ſine ullo adjuncto gyratorio tribuimus, rem ita concipimus, ut rectae bina quaeque puncta corporis jungentes perpetuo ſibi parallelae ſeu easdem coeli plagas verſus directae maneant. At quoties haec conditio in quopiam motu locum non habet, illud corpus non motu progreſſivo ſolo ſeu puro moveri, ſed inſuper motus quidam gyratorius admiſceri cenſetur, cujusmodi admixtio quomodo fiat, infra fuſius exponetur. Ceterum hinc ſtatim patet, lunam, quoniam terrae ſemper fere eandem faciem obvertit, non motu progreſſivo puro promoveri, ſed ei motum quendam gyratorium admiſceri. Quae ergo hoc capite tradentur, de motu progreſſivo puro, etiamſi vox *puri* non adjicitur, intelligenda ſunt, quando enim gyratio quaedam ſuperadditur, motus in aliud genus tranſit.

THEOREMA. 1.

270. Corpus, cui ſemel fuerit impreſſus motus progreſſivus, ob inertiam perpetuo hoc motu uniformiter in directum progredi perget, niſi a cauſis externis turbetur.

Digitized by Google

DEMONSTRATIO.

Concipiatur corpus in minima elementa divisum, et cum singula aequales celeritates secundum directiones parallelas acceperunt, dum in statu suo perseverare conantur, situm relativum inter se non mutant. Omnia ergo simul motum suum uniformiter in directum prosequi possunt, sine ullo penetrationis periculo: hincque nulla nascetur vis, quae cujusquam elementi statum immutare tendat. Singula igitur elementa perinde motum suum continuabunt, ac si a se invicem essent soluta, nulloque nexu inter se cohaererent. Quare nisi externae causae accedant, corpus, quod semel acceperit motum progressivum, hoc motu perpetuo uniformiter in directum progredi perget.

COROLL. 1.

271. Quemadmodum ergo corpus finitum, si semel quieverit, quiescere pergit, ita si semel motum progressivum acceperit, eundem perpetuo conservat. Sicque perseverantia in eodem statu etiam ad corpora finitae magnitudinis patet, dummodo motus fuerit progressivus.

COROLL. 2.

272. Quia a continuatione hujus status partium corporis nexus nullam vim patitur, conservatio figurae etiam nullam firmitatem exigit; respectu ergo talis motus omnia corpora ut rigida considerari possunt.

COROLL. 3.

273. Inertia ergo est causa, quod omnia corpora, ne fluidis quidem exceptis, quorum particulae nullo vinculo inter se connectuntur, vel in eodem statu quietis, vel in eodem statu motus progressivi perseverent.

EXPLICATIO.

274. Veritas Theorematis hoc nititur fundamento, quod singula elementa motum suum libere prosequi possint, neque ullum impediat, quo minus reliqua in suo statu perseverent. Cujus ratio clarius percipietur, si casum contemplemur, quo corpori initio motus quidam gyratorius fuerit impressus, ita ut alia elementa celerius alia tardius moveri inceperint: tum enim si singula elementa suum quaeque motum continuarent, mox a se invicem separarentur ac dissiparentur, sicque corporis

Digitized by Google

corporis compages diſſolveretur. Hoc ergo caſu nexus particularum obſtaret, quo minus ſingula elementa motum inpreſſum proſequi poſſent. Quod cum non eveniat, ſi ſingulis elementis motus aequales ſecundum directiones parallelas fuerint impreſſi, quae eſt conditio motus progreſſivi, nulla etiam cauſa adeſt, cur cujusquam elementi ſtatus mutaretur. Quin etiam nullum elementum in motu ſuo mutationem pati poſſet, quin ſimul ſtatus reliquorum perturbaretur. Ex quo neceſſe eſt, ut corpus, quod ſemel hujusmodi motum progreſſivum acceperit, eodem motu perpetuo uniformiter in directum progredi debeat. Ubi imprimis notandum eſt, in tali motu compagem partium nullam vim ſuſtinere, ita ut etiamſi inter ſe omni nexu deſtituerentur, tamen easdem perpetuo diſtantias inter ſe eſſent conſervaturae. Quare cum nulla hinc gignatur vis figuram corporis mutare tendens, cui rigiditas reſiſtere debeat, omnia corpora reſpectu talis motus tanquam rigida ſpectari poſſunt.

THEOREMA. 2.

275. Si corporis motu progreſſivo lati ſingula elementa viribus, quae maſſis eorum ſint proportionales, ſecundum directiones inter ſe parallelas ſollicitentur, eorum ſitus relativus non mutabitur, et ſingula elementa motum quaeque ſuum libere continuabunt.

DEMONSTRATIO.

Quia vires ſingula elementa ſollicitantes ipſorum maſſis ſtatuuntur proportionales, effectus eodem temposculo producti erunt aequales, et quia directiones virium ſunt inter ſe parallelae, ab actione virium ſitus partium relativus non mutabitur, et ſingula elementa perinde movebuntur ſuis quaeque viribus obſequentia, ac ſi a ſe invicem eſſent diſſoluta. Omnia ſcilicet elementa quovis momento aequaliter movebuntur, ita ut motus totius corporis aequalis ſit futurus motui, quo quodque ejus elementum, ſi eſſet ſolitarium, moveretur; ideoque motus corporis erit progreſſivus.

COROLL. 1.

276. Neque ergo hoc caſu, etiamſi vires adſint ſollicitantes, compages partium ullam vim ſuſtinet. Ex quo ſi etiam corpus eſſet fluidum, ejusque partes nullo nexu invicem cohaererent, tamen figuram ſuam conſervaret, et pro rigido haberi poterit.

Digitized by Google

COROLL. 2.

277. Prout ergo vires singulis temporis momentis fuerint comparatae, singula corporis elementa in lineis vel rectis vel curvis movebuntur, ac, si unius motus erit determinatus, simul motus totius corporis innotescit.

COROLL. 3.

278. Corpus autem ab ejusmodi viribus sollicitari ponitur, quae in singula corporis elementa ita agunt, ut sint massis eorum proportionales, et secundum directiones inter se parallelas agant. Deinde requiritur, ut corpus initio vel fuerit in quiete, vel motum acceperit progressivum purum, quo singula ejus elementa celeritatibus aequalibus secundum eandem directionem moveri coeperint.

SCHOLION.

279. Si quis dubitet, an dentur ejusmodi vires, quae in singula corporis elementa ita agant, ut sint massis eorum proportionales, simulque ea secundum eandem directionem sollicitent? exemplum quidem gravitatis adduci posset, quae, ut jam supra notavimus, singula corporum elementa et quidem pro ratione massae afficit. Verum haec proprietas tantum in corporibus tam exiguae molis admitti potest, ut prae distantia a centro terrae pro nihilo haberi queat: si enim corpus insignem habeat molem, ejus elementa, quae a centro terrae magis minusve distant, inaequales actiones gravitatis subibunt; deinde etiam singularum virium directiones, quippe quae circa centrum terrae convergunt, non amplius pro parallelis haberi possunt. Sed hic minime de eo quaeritur, an ejusmodi vires, quales in Theoremate assumsimus, in mundo existant? sufficit enim, ejus veritatem pro talibus viribus etsi forte fictis agnovisse. Quod autem de his viribus demonstravimus, idem etiam de aliis, quae his aequivaleant, valebit; atque hinc erat exordiendum, si quidem effectum quarumcunque virium in corpora rigida agentium indagare velimus. Quales vero vires his assumtis aequivaleant, posito scilicet corpore rigido, in Statica docetur, unde investigatio unius vis illis aequivalentis est haurienda. Eatenus autem tantum reductio omnium istarum infinitarum virium ad unicam habet locum, quatenus corpus est rigidum, mutationique figurae resistit, si enim omnia ejus elementa a se invicem prorsus essent dissoluta, loco harum virium alias, quae ipsis perfecte aequivalerent, substituere non liceret. Nunc igitur ratio rigiditatis, seu

Digitized by Google

ſeu firmitatis, qua partes corporis invicem connectuntur, in computum ingredietur.

PROBLEMA 1.

280. Si corporis rigidi ſingula elementa ſecundum directiones inter ſe parallelas a viribus ſollicitentur, quae ſint ipſorum maſſis proportionales, invenire unicam vim omnibus illis viribus junctim ſumtis aequivalentem.

SOLUTIO.

Referatur corpus rigidum ad ternas directrices OA, OB, OC, inter ſe normales, et ſit in Z ejus elementum quodcunque, cujus maſſa ponatur $= dM$ vocata totius corporis maſſa $= M$. Statuantur pro puncto Z ternae coordinatae directricibus parallelae $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$. Sollicitentur ergo ſingula corporis elementa a viribus ipſorum maſſis proportionalibus ſecundum directiones directrici OC parallelas, ita ut elementum dM in Z ſollicitetur in directione Zv, vi $= \lambda dM$. Quia omnes iſtae vires ſunt inter ſe parallelae, vis omnibus aequivalens eandem tenebit directionem eritque ſummae omnium aequalis, ita ut ſit $= \lambda M$. Deſignet recta GV ipſi OC parallela hanc vim aequivalentem $= \lambda M$, cujus poſitio ex puncto G, ubi ea per planum AOB tranſit, innoteſcet. Ductis ergo inde rectis GE et GF directricibus OB et OA parallelis, vocetur $OE = e$ et $OF = f$, atque ex Statica conſtat, momentum vis GV reſpectu cujusvis axis aequale eſſe debere momentis ſingularium virium reſpectu ejusdem axis ſimul ſumtis. Iam reſpectu axis OA vis $Zv = \lambda dM$ momentum eſt $\lambda y dM$ omniumque momentorum ſumma $= \lambda \int y dM$, quae aequalis eſſe debet momento vis GV, quod eſt $= \lambda M f$, unde fit $f = OF = GE = \frac{\int y dM}{M}$. Fig. 27.

Simili modo reſpectu axis OB erit vis $Zv = \lambda dM$ momentum $= \lambda x dM$, ejusque integrale $= \lambda \int x dM$, quod aequale eſſe debet momento vis $GV = \lambda M$ reſpectu ejusdem axis, quod eſt $= \lambda M e$, unde fit $e = OE = GF = \frac{\int x dM}{M}$. Atque his formulis vera poſitio vis aequivalentis GV determinatur, cujus quantitas eſt $= \lambda M$, directio parallela directrici OC, ac diſtat a plano AOC intervallo $GE = \frac{\int y dM}{M}$, a plano autem BOC intervallo $GF = \frac{\int x dM}{M}$. Sicque una habetur vis

GV =

Digitized by Google

$GV = \lambda M$ omnibus viribus elementaribus Σv aequivalens, si modo corpus fuerit rigidum, uti in Statica assumitur.

COROLL. 1.

281. Dum ergo vires elementares Σv sint massulis proportionales et inter se parallelae, vis omnibus aequivalens GV eandem habet positionem, sive illae vires sint majores sive minores, littera enim λ non ingreditur in distantias GE et GF.

COROLL. 2.

282. Quia vis aequivalentis $GV = \lambda M$ directio est rectae OC parallela, si modo unicum punctum veluti I constaret, per quod transeat, ejus positio perfecte determinaretur. Ex formulis autem pro GE et GF inventis patet, directionem GV per centrum gravitatis corporis transire.

COROLL. 3.

283. Vis igitur $GV = \lambda M$ totum corpus, si modo motu progressivo puro feratur, perinde afficiet, ac vis quaelibet elementaris $\Sigma v = \lambda dM$ elementum corporis dM: totiusque corporis motus manebit progressivus, dum singula ejus elementa pari motu proferentur.

SCHOLION.

284. Quoniam, si singulae vires elementares sunt directrici OC parallelae, media directio GV distat a plano AOC intervallo $GE = \frac{\int y\,dM}{M}$, et a plano BOC intervallo $GF = \frac{\int x\,dM}{M}$: ita si vires elementares massulis quoque elementorum proportionales sint parallelae directrici OB, media directio eidem erit parallela, et a plano BOC distabit intervallo $= \frac{\int x\,dM}{M}$, et a plano AOB intervallo $= \frac{\int z\,dM}{M}$. Simili modo si vires elementares essent parallelae directrici OA, media directio eidem foret parallela, et a plano AOB distaret intervallo $= \frac{\int z\,dM}{M}$, et a plano AOC intervallo $= \frac{\int y\,dM}{M}$. Quare cum hae mediae directiones omnes tam a plano AOB, quam AOC et BOC aequis intervallis distent,

Digitized by Google

ſtent, eae ſe in communi puncto ſecabunt: quod punctum ſi ſit I, erit ejus ſitus ita comparatus, ut ſit:

$$OE = \frac{\int x\,dM}{M}; \quad EG = \frac{\int y\,dM}{M}; \quad GI = \frac{\int z\,dM}{M}.$$

Puncto ergo hoc I ſemel invento, ſi ſingula corporis elementa a viribus ipſorum maſſis proportionalibus ſecundum directionem communem quamcunque ſollicitentur, vis illis omnibus aequivalens per hoc punctum I tranſibit. Et quia vis aequivalens ſummae omnium virium elementarium eſt aequalis, et eandem directionem tenet, ejus poſitio per punctum I perfecte determinatur. Convenit autem hoc punctum cum eo, quod vulgo *centrum gravitatis* vocatur, cujus convenientiae ratio manifeſta eſt, quoniam ſingula elementa maſſis proportionaliter gravia, et directiones gravitatis inter ſe parallelae aſſumuntur. Quoniam vero haec hypotheſis veritati adverſatur, et punctum I minime a gravitate pendet, ſed in omnibus corporibus locum habet, id alio nomine appellari praeſtabit.

DEFINITIO. 3.

285. *Centrum maſſae* ſeu *centrum inertiae* eſt punctum in quovis corpore, circa quod ejus maſſa ſeu inertia quaquaverſus aequaliter eſt diſtributa ſecundum aequalitatem momentorum.

EXPLICATIO.

286. Centrum maſſae ſeu inertiae idem eſt punctum, quod vulgo centrum gravitatis vocatur: cum autem hoc punctum ita omnibus corporibus ſit eſſentiale, ut iis ob inertiam ſolam conveniat, gravitas autem pro vi extrinſecus in corpora agente ſit habenda: malui ei nomen centri maſſae ſeu inertiae tribuere, ut intelligatur, id per ſolam inertiam determinari. Quod autem de aequali diſtributione maſſae circa hoc centrum commemoravi, minus facile explicatur. Optima explicatio ſine dubio ex regula, qua hoc centrum invenitur, eſt petenda. Scilicet referatur corpus ad ternas directrices OA, OB, OC inter ſe normales, quibus parallelae conſtituantur coordinatae, tam pro quovis corporis elemento, quam pro centro inertiae I, quod quaeritur. Sit maſſa totius corporis $= M$, cujus quodpiam elementum conſideretur in Z ejus maſſula poſita $= dM$, ac vocatis coordinatis $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, ſitus centri inertiae I ita determinatur, ut ſit $OE = \frac{\int x\,dM}{M}$;

$EG = \frac{\int y\,dM}{M}$ et $GI = \frac{\int z\,dM}{M}$, his integralibus per totum corpus extenſis.

Quod ſi ergo punctum O in ipſo centro inertiae I capiatur, haec tria integralia $\int x\,dM$, $\int y\,dM$, et $\int z\,dM$ evaneſcent, unde hanc centri inertiae indolem diſcimus, ut ſi corpus ſecetur plano quocunque per centrum inertiae tranſeunte, ſingula elementa corporis per diſtantias ab hoc plano multiplicata utrinque eandem ſummam producant. Atque ita intelligenda ſunt, quae de aequali materiae diſtributione circa centrum maſſae ſeu inertiae ſecundum aequalitatem momentorum ſunt dicta.

COROLL. 1.

287. Si ergo ſingula corporis elementa ſecundum eandem directionem a viribus ipſorum maſſulis proportionalibus ſollicitentur, iis una vis ſummae omnium aequalis et parallela, atque in centro inertiae applicata aequivalebit, ſi quidem corpus fuerit rigidum.

COROLL. 2.

288. Ac viciſſim ſi corpori rigido in centro inertiae applicata fuerit vis quaecunque, ea quaſi per omnia corporis elementa maſſis proportionaliter diſtributa conſiderari poterit. Atque ob aequivalentiam effectus in motu turbando erunt aequales.

SCHOLION.

289. Quodſi ergo corpus rigidum a vi ſollicitetur, cujus directio tranſeat per ejus centrum inertiae, illi ſi quieverit motus progreſſivus imprimetur, ſin autem jam motu progreſſivo feratur, ejus quidem vel celeritas vel directio vel utraque mutabitur, verum tamen ita ut motus maneat progreſſivus. Hoc eſt, ſi in corpore ductas concipiamus lineas rectas quascunque, eae durante motu perpetuo ſibi manebunt parallelae, quod eſt criterium motus progreſſivi. Quomodo ergo hujusmodi motum corporis rigidi determinari conveniet, in ſequente problemate videamus. Interim cavendum eſt, ne aequivalentia virium hic monſtrata ad corpora non rigida extendatur, quandoquidem fundamentum ejus, quod in aequilibrio vectis eſt poſitum, corrueret, ſi vectis a viribus poſſet inflecti. Quocirca hic corpora tam rigida aſſumo, ut a viribus ſollicitantibus nullam mutationem in figura ſua patiantur; ac deinceps inveſtigabo, quam firma eorum compages eſſe debeat, ut actionem virium ſine ulla figurae mutatione ſuſtinere valeant.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA. 2.

290. Si corpus rigidum, quod initio vel quieverit, vel motum progressivum acceperit, continuo sollicitetur a viribus, quarum media directio per ejus centrum inertiae transeat; ejus motum determinare.

SOLUTIO.

Quia vis, qua corpus sollicitatur, vel si plures fuerint, earum media directio perpetuo per ejus centrum inertiae transit, motus quomodocunque tam ratione celeritatis quam directionis mutabitur, tamen usque manebit progressivus. Ad eum ergo cognoscendum sufficit, motum unici cujusdam ejus puncti definivisse: quam enim positionem corpus initio respectu hujus puncti tenuerit, eam deinceps perpetuo servabit, si quidem uti assumimus, initio vel quieverit, vel motum progressivum purum acceperit. Quaeri igitur potissimum conveniet motum ejus centri inertiae, quoniam vis sollicitans tanquam ei applicata concipi potest. Sit itaque massa corporis $= M$, et elapso tempore $= t$ sollicitetur a vi $= V$, seu si a pluribus simul sollicitetur, sit V vis iis omnibus aequivalens, directionem habens, per centrum inertiae transeuntem. Quodsi jam in hoc centro elementum corporis, cujus massula sit $= iM$, denotante i fractionem infinite parvam, concipiatur, ea a simili particula iV totius vis sollicitari est censenda. Verum ex doctrina sollicitationum ante tradita patet, massam iM a vi iV perinde affici, ac massam M a vi V, quoniam ratio tantum massae ad vim in calculum ingreditur. Rem ergo ita concipere licet, ac si tota corporis massa M in ejus centro inertiae collecta, eique vis tota V applicata esset; ex quo problematis hujus solutio a superioribus de motu puncti datis non discrepabit. Scilicet ut rem generalissime complectamur, referamus motum ad ternas directrices OA, OB et OC, inter se normales, elapsoque tempore t pervenerit centrum inertiae in S, coordinatis existentibus $OX = x$, $XY = y$ et $YS = z$. Deinde vis sollicitans V pariter secundum has tres directiones resolvatur, unde orientur vires secundum $SP = P$; secundum $SQ = Q$ et secundum $SR = R$. Hinc sumto elemento temporis dt constante totus motus his tribus formulis determinabitur: Fig. 21.

$$Mddx = 2gPdt^2 \; ; \; Mddy = 2gQdt^2 \; ; \; Mddz = 2gRdt^2$$

quae quomodo quovis casu sint tractandae, jam supra est expositum.

COROLL. 1.

291. Casu ergo, quo corpus rigidum motu progressivo profertur, ideoque media directio virium sollicitantium per ejus centrum inertiae

Digitized by Google

transit; totam corporis massam tanquam in centro inertiae collectam eique vim aequivalentem applicatam concipere licet.

COROLL. 2.

292. Cum ad datum tempus locus centri inertiae fuerit inventus, etiam totius corporis situs innotescet, quippe qui respectu centri inertiae idem erit perpetuo, qui fuerat initio: eaedem enim corporis partes semper ad easdem mundi plagas spectabunt.

COROLL. 3.

293. Inventa porro ad quodpiam tempus celeritate centri inertiae, simul omnia corporis puncta pari celeritate movebuntur, omniumque directiones inter se erunt parallelae: ita ut totius corporis motus ex motu centri inertiae perfecte cognoscatur.

SCHOLION. 1.

294. Omnia ergo, quae de motu libero punctorum seu corpusculorum infinite parvorum in superioribus libris sunt tradita, etiam pro motu corporum rigidorum progressivo valent, ideoque cum in se nimis sterilia videantur, nunc amplissimum usum habebunt, cum eo universum genus motuum progressivorum sit referendum. Quoties nimirum corpora rigida motu progressivo incedunt, quod fit, si virium sollicitantium media directio per eorum centrum inertiae transit, eaque initio vel quieverint, vel motu progressivo fuerint impulsa, eorum motus per Theoriam motus punctorum jam cumulate expositam determinari poterit; unde hanc tractationem fusius persequi superfluum foret. Hinc autem statim diximus, si virium corpora coelestia sollicitantium media directio per eorum centrum inertiae transeat, eaque semel motu progressivo puro ingredi coepissent, ea perpetuo talem motum esse conservatura, neque unquam motum vertiginis esse adeptura. Quare cum motu vertiginis gyrari observentur, necesse est, ut ipsis talis motus jam ab initio fuerit impressus, vel ut media directio non perpetuo per eorum centrum inertiae transeat, quod posterius in luna evenire merito supicamur.

SCHOLION. 2.

295. Ne autem, dum corpora talibus viribus sollicitata moventur, in figura sua mutationem patiantur, eorum compagem satis firmam esse oportet, quare quantam vim ea sustineat, erit definiendum. Ac primo

Digitized by Google

mo quidem jam animadvertimus, si singulis corporis elementis vires ipsorum massulis proportionales secundum eandem directionem essent applicatae, compagem corporis nullam plane vim sustinere, sed figuram, etiamsi partes a se invicem penitus essent dissolutae, conservatum iri. Quas autem vires nunc ostendimus illis aequivalere, id tantum ratione motus est intelligendum, et quatenus ab illis sunt diversae, eatenus etiam figuram mutare tendent; quod ne eveniat, compagem satis firmam esse oportet. Ex quo jam perspicuum est, judicium, quanta compagis firmitate opus sit, eo reduci, ut vires, quibus corpus actu sollicitatur, cum viribus illis elementaribus, quibus aequivalent, comparentur, quoniam quo magis ab iis fuerint diversae, eo plus conferent ad compagem destruendam. Quare quo clarius hoc argumentum evolvere queamus, vires illas, etiamsi ratione motus aequipolleant, sollicite a se invicem distingui conveniet, quem in finem sequentem definitionem praemitto.

DEFINITIO. 4.

296. *Vires elementares* sunt vires, quae singulis corporis elementis seorsim applicatae in iis eandem status mutationem producerent, quam eadem in motu corporis revera subeunt.

EXPLICATIO.

297. Has vires elementares sollicite distingui convenit a viribus corpus actu sollicitantibus. Cum enim cognovimus motum corporis a viribus sollicitantibus productum, dispiciendum est, quantum cujusvis elementi status turbetur: tum singula elementa quasi seorsim existerent considerentur, facileque ex praecedentibus vires definientur, quae iis applicatae eandem status mutationem producerent; atque istae vires junctim sumtae sunt eae, quas in posterum sub nomine virium elementarium sum complexurus. Ex quo quidem statim liquet, has vires elementares junctim sumtas esse aequivalentes viribus actu sollicitantibus, quoniam ambae in motu corporis eandem mutationem pariunt. Nempe si elementum corporis, cujus massula sit dM, motu vel vero vel resoluto secundum quandam directionem, in qua tempusculo dt spatiolum dx describat, ita acceleretur, ut sumto dt constante incrementum spatioli dx prodeat ddx: tum vis secundum eandem directionem urgens erit $= \frac{dMddx}{2gdt^2}$. Unde si motus elementi secundum binas vel ternas directiones fuerit resolutus, vis elementaris ejus statum per-

turbans colligetur, ſicque innoteſcent vires elementares pro quavis motus mutatione.

COROLL. 1.

298. Vires ergo elementares ſimul ſumtae viribus actu ſollicitantibus aequivalent, ac praeterea ita ſunt comparatae, ut ab iis compages corporis nullam vim patiatur; propterea quod ab iis ſingula elementa, perinde quaſi ſola adeſſent, afficiuntur.

COROLL. 2.

299. In motu igitur progreſſivo vires elementares ſunt eae vires, quae ſingulis elementis eandem motus mutationem inducunt, quam totum corpus a viribus ſollicitantibus patitur.

PROBLEMA. 3.

300. Si corpus a viribus quibuscunque ſollicitatum, quarum media directio per ejus centrum inertiae tranſit, motu progreſſivo libere moveatur, determinare vires, quas ejus compages ſuſtinet, ne ſolvatur.

SOLUTIO.

Fig. 28. Ad datum tempus ſollicitetur corpus a viribus EP et FQ, quibus aequivaleat vis IV = V per centrum inertiae I tranſiens, quae, ſi maſſa corporis fuerit = M, in toto corpore eundem effectum producet, atque in elemento ejus quocunque M, cujus maſſa ſit dM, produceret vis $Mm = \frac{V\,dM}{M}$, cujus directio Mm illi IV eſſet parallela: ſicque Mm exhibebit vim elementarem. Cum igitur quaeratur, quantam vim ſuſtineat compages corporis, a viribus EP et FQ actu ſollicitantibus, ſeu quam fortis ea eſſe debeat, ut figura nullam mutationem patiatur? quoniam corpus in motu verſatur, ejusmodi ſtatus quietis ſeu aequilibrii aſſignari debet, in quo figura corporis pari virium actioni eſſet ſubjecta. Ad talem autem ſtatum perveniemus, ſi corpori mente ſaltem ejusmodi motum et vires tribuamus, unde compages nullam vim ſuſtineat, ipſum autem corpus ad perfectam quietem redigatur. Quemcunque autem corpus habuerit motum, ipſi primo aequalis et contrarius imprimatur, ut hoc ſaltem inſtanti corpus in quiete exiſtat: hoc vero motu fictitio nulla vis compagi corporis infertur. Nunc autem praeterea motus a viribus ſollicitantibus penitus tolli debet,

Digitized by Google

bet, per ejusmodi vires, quae compagem non afficiant, quod fit, si singulis elementis vires elementaribus aequales et contrariae applicatae concipiantur: elemento nempe dM in M existenti vis $Mv = \frac{V\,dM}{M}$, cujusmodi vires singulis elementis applicatae sunt intelligendae: hocque modo corpus in statum quietis reducitur. Quamobrem corpus a viribus EP et FQ, quibus aequivalet vis IV = V per centrum inertiae transiens, sollicitatum, quomodocunque motu progressivo feratur, ratione compagis perinde afficietur, ac si quiesceret, eique praeter vires actu sollicitantes EP et FQ applicatae essent in singulis elementis vires viribus elementaribus aequales et contrariae. In hoc statu aequilibrii haud difficile erit judicare, quam valide partes corporis inter se esse debeant connexae, ut earum compages ab istis viribus non turbetur.

COROLL. 1.

301. Vires igitur, quibus compages corporis resistere debet, sunt 1°, vires corpus actu sollicitantes, et 2°, vires elementares contrario modo applicatae: quae contraria applicatio si signo negationis exprimatur, vires sollicitantes demtis viribus elementaribus dabunt vires compagem afficientes.

COROLL. 2.

302. Cum hic de motu corporum rigidorum sit sermo, structura corporum tam firma sit necesse est, ut his viribus compagem afficientibus resistere valeat. Ac nisi ad hoc satis roboris haberet, motus huc non pertineret.

SCHOLION. 1.

303. Regula, quam hic invenimus pro viribus compagem corporis afficientibus determinandis latissime patet, atque ex principio Metaphysico, quod causa semper aequalis sit effectui pleno, deduci potuisset, si modo hoc principium recte intelligatur; plerumque enim nimis vage proponi solet, quam ut inde quicquam tuto concludi queat. Hic autem vires actu sollicitantes vicem causae gerunt, quam littera V designemus; deinde effectus est duplex, alter quo motus corporis afficitur, cujus loco assumi debent vires elementares mutationem motus immediate efficientes, quas vires simul littera T denotemus. Alter vero effectus in conatu structuram corporis turbandi consistit, cujus loco sumi debent vires compagem afficientes, quas litera S notemus.

Digitized by Google

notemus. Cum igitur a causa V producatur effectus $= T + S$, censeri debet $V = T + S$, unde colligitur $S = V - T$, prorsus uti invenimus. Verum in tanta rerum metaphysicarum caligine malim demonstrationem allatam adhibere ad principium metaphysicum illustrandum.

SCHOLION. 2.

304. Sufficiat autem hic nobis, eas vires assignasse, quas compages corporum rigidorum sustinere debet: quomodo enim his viribus resistat, id pendet a structura corporum, et modo quo partes inter se cohaerent, et quasi glutine quodam connectuntur. Quae cohaesionis ratio cum in diversis corporum generibus plurimum discrepet, ad Physicam potius quam Mechanicam referenda videtur. Interim fatendum est, hoc argumentum adhuc parum esse cultum, ac principia, quibus firmitas corporum innititur, plerumque penitus nobis esse incognita; quae doctrina utique mereretur, ut omni studio investigaretur. Verum hoc minime ad praesens institutum pertinet, in quo tantum assumimus corpora, quorum motum consideramus, sufficienti gradu rigoris esse praedita, ut a viribus, quibus afficiuntur, nullam mutationem in figura patiantur, minime curantes, quomodo structura et cohaesio partium sit comparata. Ceterum satis verisimile videtur, nullam partium connexionem tam esse robustam, quae actioni talium virium, etiamsi sint minimae, non aliquantillum cedant: quemadmodum nullum est dubium, quin corpora etiam durissima in mutua collisione sibi quasdam impressiones inducant, etsi eae plerumque sensus nostros effugiant. Quae sententia si vera esset, nulla plane corpora pro rigidis haberi possent, nisi quae nullas omnino vires compagem turbare conantes sustinerent: cum etiam a minimis viribus mutatio quaedam in figura produceretur. Verum utrum corpora talia rigida, qualia hic assumo, in mundo existant, nec ne? haec quaestio praesentem tractationem non tangit, cum in omnibus disciplinis liceat objecta non existentia contemplari, quo facilius deinceps ad existentia transitus pateat. Neque enim in Mechanica in motum corporum non rigidorum inquirere licet, nisi ante doctrina de motu rigidorum fuerit constituta. Interim tamen negari nequit, quin ejusmodi dentur corpora, quae viribus tantopere resistant, ut mutatio in eorum figura orta plane sit imperceptibilis, atque hoc plerumque sufficit, ut talia corpora pro perfecte rigidis habere possimus.

PROBLEMA. 4.

305. Si corpus rigidum quiescens a vi, cujus directio per ejus centrum

Digitized by Google

centrum inertiae transit, sollicitetur, determinare spatiolum, per quod tempusculo minimo protrudetur, simulque celeritatem, quam acquiret.

SOLUTIO.

Quia tempus ut minimum assumitur, vis interea ut constans et eandem directionem servans considerari potest. Sit igitur massa corporis rigidi $= M$, cui applicata sit vis $= V$, cujus directio IV per centrum inertiae I transeat. In hac ergo directione IV punctum I promovebitur, totumque corpus simílem motum progressivum adipiscetur. Ponamus id elapso tempore t, quod ut minimum spectetur, translatum fuisse per spatium $Ii = x$, et in i jam celeritatem acquisivisse $= v$, erit sumto elemento dt constante $Mddx = 2gVdt^2$, seu $\frac{ddx}{dt} = \frac{2gVdt}{M}$, unde ob vim V constantem elicitur $\frac{dx}{dt} = \frac{2gVt}{M}$; ubi cum $\frac{dx}{dt}$ celeritatem v exprimat, quae per hypothesin evanescit posito $t = 0$, additione constantis non est opus. Hinc habetur elapso tempore t celeritas $v = \frac{2gVt}{M}$: deinde ob $dx = \frac{2gVtdt}{M}$, elicitur spatiolum tempore t confectum $Ii = x = \frac{gVtt}{M}$. Fig. 28.

COROLL. 1.

306. Est ergo spatiolum Ii, per quod corpus tempusculo t protruditur, ut quadratum temporis, celeritas vero acquisita v ipsam temporis rationem sequitur. Tum vero est $2x = vt$, seu celeritate acquisita v eodem tempore t duplum spatium $2x$ percurri potest.

COROLL. 2.

307. Haec eadem quoque valent pro tempore quantumvis magno t, dummodo interea vis V perpetuo eandem quantitatem et directionem retineat; corpusque initio quieverit.

SCHOLION.

308. Motus corporum rigidorum perinde ac corpusculorum infinite parvorum duplici modo est tractandus, prout fuerit vel liber, vel ob extrema impedimenta restrictus. Atque hoc quidem caput ad mo-

Digitized by Google

tum liberum pertinet, quandoquidem extrinsecus nihil obstare assumimus, quo minus corpus sollicitationi virium obsequatur: verumtamen minimam tantum ejus partem complectitur, dum corpus libere motum, praeter motum progressivum purum, quem hic sum contemplatus, infinitis modis motus gyratorios recipere potest: a cujusmodi motu complicato evolvendo, et quomodo is a viribus quibuscunque perturbetur, adhuc longissime absumus. Neque hanc investigationem suscipere licet, ante quam motus gyratorios circa axes fixos expediverimus; hinc enim demum ad motus gyratorios circa axes mobiles, ac porro ad motus liberos in genere, progredi licebit. Quare relicto quasi ordine naturae, nunc corpora rigida extrinsecus ita restricta contemplabor, ut certum tantum genus motus recipere possint, quod fit, dum ab aliqua causa externa duo corporis puncta fixa retinentur Facile enim patet, si tria puncta corporis rigidi non in directum sita fixa seu immota manerent, totum corpus nullius motus capax esse futurum: quando autem duo tantum puncta fixa tenentur, circa ea tanquam circa axem motu gyratorio revolvi poterit, qui motus quomodo sit comparatus et a viribus sollicitantibus afficiatur, jam indagabimus: ubi quidem insuper definiri conveniet, cum quantam vim illa puncta fixa sustineant, tum vero etiam quantum compages corporis afficiatur.

CAPUT II.

DE MOTU GYRATORIO CIRCA AXEM FIXUM A NULLIS VIRIBUS TURBATO.

DEFINITIO. 5.

309. Motus *gyratorius* dicitur, quo corpus rigidum circa lineam rectam cum ipso firmiter connexam movetur, quae linea recta *axis gyrationis* vocatur.

COROLL. 1.

310. In motu ergo gyratorio axis gyrationis quiescit, seu singula puncta in eo sita manent immota; reliqua vero corporis puncta eo celerius moventur, quo longius ab axe gyrationis distent.

COROLL. 2.

311. Quia singula corporis puncta ab axe easdem perpetuo servant distantias, moveri nequeunt, nisi in arcubus circularibus, quorum centra

Digitized by Google

tra in axe gyrationis sunt sita. Scilicet recta a quovis corporis puncto ad axem normaliter ducta erit radius circuli, in cujus peripheria hoc punctum movetur.

COROLL. 3.

312. Quoniam omnia corporis puncta tam inter se quam ab axe perpetuo easdem servant distantias, singula puncta eodem tempore per similes arcus progrediantur necesse est, ex quo eorum celeritates eodem tempore erunt inter se ut eorum distantiae ab axe.

COROLL. 4.

213. Cum axis gyrationis maneat in quiete, si unici praeterea corporis puncti situs fuerit cognitus, ex eo totius corporis situs innotescet: ac si unici puncti celeritatem noverimus, omnium punctorum celeritates assignare poterimus.

EXPLICATIO.

314. Gyratione motus corporis ita restringitur, ut duo ejus quaedam puncta maneant immota: concipiantur enim corpori ABCD in punctis E et F duo styli infigi, ac tam firmiter retineri, ut nequaquam dimoveri queant; atque his stylis non obstantibus corpus adhuc duplici modo moveri poterit, prout in figura puncta A, B, C vel sursum vel deorsum aguntur, quae diversitas ita commodissime innui solet, dum corpus vel in hunc *sensum* vel in oppositum gyrari dicitur. Praeterea vero motus in utrumque sensum factus infinitis modis pro ratione celeritatis variari potest; cognita autem celeritate motus nondum innotescit, nisi declaretur, in utrum sensum motus fiat. At statim ac puncta E et F in quiete retinentur, singula puncta inter ea in directum interjacentia quoque quiescent, eritque propterea recta EF axis gyrationis. Tum si *m* sit particula corporis quaecunque, indeque ad axem EF normalis ducatur *mn*, qua tanquam radio in plano ad EF normali circulus concipiatur descriptus, haec particula *m* aliter nisi in peripheria hujus circuli moveri nequit, eritque semper celeritas puncti *m* distantiae *mn* proportionalis. Fig. 29.

SCHOLION.

315. Voce *sensus* hic utor gallicum idioma imitatus, quoniam vox *plaga*, qua alii uti solent, discrimen non satis indicare videtur. Concipiatur enim axis gyrationis plano tabulae in O normaliter insistere, ad Tab. IV. Fig. 30.

Digitized by Google

quem ex corporis punctis A, B, C actae sint normales AO, BO, CO: jam duplex motus corpori imprimi potest, alter quo puncta A, B, C per arcus Aa, Bb, Cc, alter autem, quo eadem puncta per arcus $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ procedunt. Priori casu congrue dici nequit, motum fieri in plagam Aa, quippe quod de punctis B et C, quorum motus in alias plagas dirigitur, non esset verum. Plaga scilicet directionem quandam fixam innuit, quae in motu circulari non habet locum; unde ob defectum aptioris vocabuli in tali motu quasi duos sensus statuamus, sibi oppositos, ita ut motus circularis per arcus Aa, Bb, Cc in hunc sensum, alter per arcus $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ in sensum oppositum fieri sit dicendus.

DEFINITIO. 6.

316. Celeritas *angularis* in motu gyratorio est celeritas ejus puncti, cujus distantia ab axe gyrationis unitate exprimitur.

COROLL. 1.

317. Ex celeritate ergo cujusque puncti cognoscetur celeritas angularis, si ea per distantiam puncti illius ab axe gyrationis dividatur; quoniam in motu gyratorio celeritates sunt distantiis ab axe proportionales.

COROLL. 2.

318. Si ergo puncti, quod ab axe gyrationis distat intervallo $= x$, celeritas sit $= v$, erit $\frac{v}{x}$ celeritas angularis. Pro alia enim distantia y foret celeritas $= \frac{yv}{x}$, ac sumta hac distantia $y = 1$, erit ea $= \frac{v}{x}$, quae est celeritas angularis.

COROLL. 3.

319. Hinc vicissim cognita celeritate angulari, quae sit $= y$, in distantia quacunque x erit celeritas, qua ibi fit gyratio, $= yx$: celeritas scilicet angularis, per distantiam quamcunque ab axe gyrationis multiplicata, dat celeritatem veram pro ea distantia.

EXPLICATIO.

320. Cum in motu gyratorio puncta corporis pro diversa ab axe distantia diversa celeritate ferantur, quo omnes has celeritates diversas simul

Digitized by Google

simul in calculo complecti queamus, earum loco celeritatem angularem, quae pro omnibus distantiis est eadem, in calculum introducamus; prodit enim ea, si angulus tempusculo quodam confectus per ipsum tempusculum dividatur, ita ut omnibus distantiis sit communis. Namque si in distantia $= x$ ab axe gyrationis celeritas fuerit $= v$, tempusculo dt absolvetur ea arculus $= vdt$, qui per radium x divisus dat angulum interea confectum $= \frac{vdt}{x}$: hic autem iterum per tempus dt divisus producit $\frac{v}{x}$, hoc est celeritatem angularem. Perinde igitur est, quonam modo celeritatem angularem definire velimus, sive sit celeritas distantiae $= 1$ conveniens, sive celeritas cuicunque distantiae respondens per hanc ipsam distantiam divisa, sive angulus elementaris divisus per tempusculum, quo absolvitur; siquidem hi tres modi inter se conveniunt Primus quidem naturae rei est maxime conformis, cum eo vera celeritas indicetur, atque distantiam illam fixam, cui respondet, ob similem rationem unitate insignimus, qua in mensura angulorum radius circuli, ad quem referuntur, unitate exprimi solet; ut nimirum anguli et arcus ad communem mensuram revocentur.

THEOREMA. 3.

321. Si corpus rigidum circa axem fixum moveri coeperit, motum suum gyratorium perpetuo eadem celeritate angulari continuabit, nisi a viribus externis turbetur.

DEMONSTRATIO.

Sit EF axis gyrationis, circa quem corpus rigidum moveri coeperit, celeritate angulari $= c$, quae scilicet respondeat distantiae ab axe $= 1$. Quaevis ergo particula m ab axe distans intervallo $mn = x$, habuit celeritatem $= cx$ in eundem sensum. Quoniam corpus cum axe quasi unum constituit corpus rigidum, particula m cum axe EF ita colligata est intelligenda, ut ab eo constanter eandem servet distantiam $mn = x$. Consideremus hanc particulam solam, tanquam filo mn cum axe connexam, atque supra vidimus, eam motu accepto uniformiter in peripheria circuli esse gyraturam. Quod cum de omnibus elementis seorsim sumtis valeat, videndum est, num singula motum suum prosequi possint, ut sibi mutuo non sint impedimento. Verum perspicuum est, etiamsi singula a se invicem essent dissoluta, dum fuerint Fig. 29.

Digitized by Google

cum axe filorum ope connexa, tamen singula in motu suo ita perseverare posse, ut perpetuo easdem inter se distantias servent, corpusque suam retineat figuram. Quare etiam eorum nexus mutuus non obstabit, quo minus singula elementa motum suum prosequantur: consequenter totum corpus motum gyratorium impressum ita continuabit, ut uniformiter circa axem eadem perpetuo celeritate angulari revolvatur.

COROLL. 1.

322. Posita ergo celeritate angulari c, ut in distantia $= x$ ab axe sit celeritas $= cx$, si haec celeritas ponatur $= v$, erit $c = \frac{v}{x}$. Quare cum x et v sint lineae, celeritas angularis c numero absoluto exprimitur.

COROLL. 2.

323. Ex celeritate angulari c colligitur tempus t, quo gyratio fit per datum angulum Φ: cum enim motus sit uniformis, erit $c = \frac{\Phi}{t}$, ideoque $t = \frac{\Phi}{c}$: unde patet celeritatem angularem c dare angulum, qui uno minuto secundo absolvitur.

COROLL. 3.

324. Quare si $1 : \pi$ denotet rationem diametri ad peripheriam, ut sit 2π peripheria circuli, cujus radius est $= 1$, tempus unius revolutionis, quo corpus in pristinum situm revertitur est $= \frac{2\pi}{c}$ min. sec.

COROLL. 4.

325. Quoniam tempora perpetuo in minutis secundis exprimere instituimus, si celeritas angularis sit $= c$, tempore t corpus motu gyratorio absolvet angulum $= ct$.

SCHOLION.

326. Ea igitur pro mensuris absolutis distinctam noticnem celeritatis angularis, quippe quae exprimitur angulo, qui eo motu gyratorio, si esset uniformis, intervallo unius minuti secundi conficeretur. Congruit ea cum supra stabilito modo omnia, quae ad motum pertinent, ad mensuras absolutas revocandi: cujus fundamentum in eo constat, ut tempora perpetuo in minutis secundis exprimamus: tum vero celeri-

Digitized by Google

celeritatem quamque per ſpatium, quod corpus ea celeritate latum uniformiter intervallo unius minuti ſecundi percurreret, indicamus, unde utique clariſſima celeritatis idea obtinetur. Quemadmodum ergo celeritas in genere eſt ſpatium uno minuto ſecundo confectum, ita celeritas angularis eſt angulus uno minuto ſecundo confectus, ſi ſcilicet motus eſſet uniformis. Quodſi motus gyratorius non fuerit uniformis, ita ut quovis momento celeritas angularis ſit diverſa, ſimili modo pro quovis inſtanti ea exprimetur angulo, quem corpus, ſi eo motu gyratorio uniformiter revolveretur, uno minuto ſecundo eſſet deſcripturum. Ex hoc autem Theoremate motus gyratorius uniformis perfecte cognoſcitur, quo omne corpus rigidum, niſi a viribus externis ſollicitetur, feratur neceſſe eſt; unde patet, principium aequabilitatis motus inertia innixum etiam ad motum gyratorium corporum rigidorum extendi, dummodo axis gyrationis ſit fixus. Quare inveſtigari conveniet, quanta vi opus ſit ad axem in ſitu ſuo fixo conſervandum.

PROBLEMA. 5.

327. Si corpus rigidum circa axem fixum uniformiter gyretur, definire vires, quas axis ſuſtinet, ſeu quae adhiberi debent, ut axis in ſuo ſitu conſervetur.

SOLUTIO.

Conſideretur corpus iterum in ſua elementa diviſum, quae ſingula cum axe gyrationis ope filorum ſint connexa, et quoniam quodlibet elementum m in circulo circumfertur, cujus radius eſt ejus diſtantia mn ab axe EF, ob vim centrifugam ſupra definitam (213), filum tendet, tantaque vi axem in directione nm ſollicitabit. Ad quam calculo exprimendam ſit dM maſſula hujus elementi, ejusque ab axe gyrationis EF diſtantia $mn = x$, ac celeritas angularis $= \gamma$, ita ut γ ſit angulus ſingulis minutis ſecundis confectus; eritque celeritas qua elementum m in circulo ſuo revolvitur $= \gamma x$. Tum ſi g denotet altitudinem, per quam corpus a gravitate ſollicitatum uno minuto ſecundo delabitur, erit per (213) vis centrifuga hujus elementi $= \frac{\gamma\gamma x x dM}{2gx} = \frac{\gamma\gamma}{2g} . x dM$, ubi dM eſt ponduſculum, quod elementum corporis in regione terrae ad menſuras abſolutas electa eſſet habiturum. Quare ob motum hujus elementi, dum verſatur in m, axis EF ſuſtinet vim $= \frac{\gamma\gamma}{2g} . x dM$, qua ſecundum directionem nm ſollicitatur; et cum ab omnibus Fig. 29.

omnibus elementis similes vires sustineat, ex iis colligi poterit vis totalis, quam totum corpus in axem exerit.

COROLL. 1.

328. Vires ergo a singulis elementis ortae pro eodem motu angulari rationem tenent compositam massarum et distantiarum ab axe: elementa igitur axi propiora minus, remotiora autem plus efficiunt.

COROLL. 2.

329. Deinde vero pro eodem elemento, vis quam axis ab eo sustinet, sequitur rationem duplicatam celeritatis angularis: quae si fuerit dupla, vis illa quadruplo evadet major.

COROLL. 3.

330. Quoniam elementum m per peripheriam circuli circumfertur motu aequabili, vis quidem perpetuo ejusdem manet quantitatis, et eidem axis puncto n applicata, sed directio continuo mutatur, cum semper ad elementum sit directa.

SCHOLION.

331. Supra scilicet (213) invenimus, ut corpusculum cujus massa $= A$, celeritate $= v$ in peripheria circuli, cujus radius $= r$, moveatur, vim requiri ad ejus centrum tendentem $= \frac{Avv}{2gr}$. Cum igitur nostro casu sit massa $A = dM$, celeritas $v = \gamma x$, et radius $r = x$, erit ista vis $= \frac{\gamma\gamma x dM}{2g}$, qua filum, quo elementum axi alligatur, tenditur, et qua propterea ipse axis secundum directionem nm sollicitatur. Ab hujusmodi ergo viribus singula axis puncta afficientur: ac si nosse velimus vires, quas punctum n sustinet, concipiatur sectio plana per punctum n ad axem EF normaliter facta, et omnia corporis elementa in hoc plano sita vires suas in punctum n exerent, quae cum omnes eidem puncto sint applicatae, per praecepta statica facile ad unam vim reduci poterunt. Hic scilicet erit casus, quando totum corpus quasi in planum ad axem normale fuerit compactum, quem igitur, antequam ad ternas dimensiones progrediamur, evolvamus.

PROBLEMA. 4.

332. Si corpus fuerit lamina tenuissima plana ad axem gyrationis normalis, eaque data celeritate gyretur, determinare vim, quam axis ab ea sustinet.

SOLU-

Digitized by Google

SOLUTIO.

Sit AE *a* F lamina iſta tenuiſſima figurae cujuscunque, cujus maſſa ſit = M, cui axis gyrationis normaliter inſiſtere intelligatur in puncto O: et cum rectae a ſingulis laminae elementis ad O ductae ſimul eorum diſtantias ab axe gyrationis referant, omnia vires ſuas in ipſum punctum O exerent. Conſideretur ergo elementum laminae quodvis in M, cujus maſſa ſit = *d*M, ejusque ab axe diſtantia OM = *r*; et poſita celeritate angulari = γ, erit vis, qua punctum O in directione OM ſollicitatur = $\frac{\gamma\gamma r dM}{2g}$. Quae vires ab omnibus elementis oriundae, quo facilius ad unam reducantur, concipiantur per O duae directrices OA, OB in plano laminae inter ſe normales, ad quas referantur pro puncto M coordinatae OP = *x* et PM = *y*, et completo rectangulo OPMQ, vis illa OM reſolvitur in duas ſecundum ipſas directrices, quarum quae agit ſecundum OA eſt = $\frac{\gamma\gamma x dM}{2g}$, et quae ſecundum OB agit, = $\frac{\gamma\gamma y dM}{2g}$. Ex tota ergo lamina oritur vis ſollicitans in directione OA = $\frac{\gamma\gamma}{2g}\int x dM$, et vis ſollicitans in directione OB = $\frac{\gamma\gamma}{2g}\int y dM$. Haec autem integralia ex ſitu centri inertiae laminae innoteſcunt, quod ſi ſtatuatur in I, indeque ad directrices demittantur perpendicula IK et IL; erit $\int x dM$ = M. OK et $\int y dM$ = M. OL. Quare cum ſit vis ſecundum OA = $\frac{\gamma\gamma}{2g}$ M. OK, et vis ſecundum OB = $\frac{\gamma\gamma}{2g}$ M. OL, his duabus viribus aequivalet una ſecundum directionem OI ſollicitans, quae eſt = $\frac{\gamma\gamma}{2g}$. M. OI, atque haec eſt vis, quam axis ob motum laminae in puncto O ſuſtinet. Fig. 31.

COROLL. 1.

333. Directio ergo vis, quam axis ob motum laminae ſuſtinet, a puncto O ad centrum inertiae laminae I tendit, atque diſtantiae hujus centri I ab axe eſt proportionalis.

COROLL. 2.

334. Si tota laminae maſſa M in ejus centro inertiae eſſet collecta, eaque circa axem pari celeritate angulari revolveretur,

tur, ab ea axis vim sustineret $= \frac{\gamma\gamma}{2g}$, M. OI in eadem directione OI.

COROLL. 3.

335. Axis ergo a lamina eandem vim sustinet, ac si tota laminae massa in centro inertiae esset collecta, eaque pari celeritate angulari circa eundem axem revolveretur, quae centri inertiae nova proprietas notatu maxime est digna.

COROLL. 4.

336. Si igitur axis per ipsum centrum inertiae I laminae transiret, ad eamque esset perpendicularis, ob OI = 0, axis a motu laminae nullam plane vim sentiret, neque ergo ulla vi opus esset ad axem immotum retinendum.

SCHOLION.

337. Quodsi axis non per centrum inertiae transit, tam firmiter intra suos cardines retineri debet, ut vi assignatae resistere valeat, neque unquam ab ea de situ suo dimoveri possit. Cum autem ipsa hujus vis directio in gyrum agatur, quaquaversus axis in suo situ sufficienti retineri debet: ac perspicuum quidem est, eo majore vi opus esse ad axem retinendum, quo magis centrum inertiae ab eo distet. Praeterea vero haec vis proportionalis est massae laminae et quadrato celeritatis angularis. Ceterum hic casus, quo corpus ut laminam infinite tenuem sumus contemplati, nos manuducit ad corpora quaecunque, quoniam diviso corpore per sectiones ad axem normales in infinitas laminas, vires hinc, quibus axis in singulis punctis sollicitatur, facile colliguntur. Totum scilicet negotium ad inventionem centri inertiae cujusque laminae reducitur: verum alio modo hanc investigationem tentemus.

PROBLEMA. 7.

Fig. 32. 338. Si corpus rigidum circa axem OA uniformiter gyretur, vires, quas axis sustinet, in summam colligere, vel ad duas vires reducere, quibus axis sollicitetur.

SOLUTIO.

Cum axe gyrationis OA conjungantur in O binae directrices normales OB et OC, quibus pro elemento corporis in Z, cujus massa sit dM, denotante M massam totius corporis, parallelae constituantur coordi-

Digitized by Google

coordinatae ternae, $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$. Quodsi jam celeritas angularis, qua corpus circa axem OA gyratur, ponatur $= \gamma$, et elementi Z ab axe distantia $XZ = r$, ob motum hujus elementi axis in puncto X sollicitatur in directione XZ vi $= \frac{\gamma\gamma r dM}{2g}$, quae, ducta XV ipsi YZ seu OC parallela, resolvatur in directiones XY et XV, eritque vis urgens secundum XY $= \frac{\gamma\gamma y dM}{2g}$ et secundum XV $= \frac{\gamma\gamma z dM}{2g}$: sicque a singulis elementis axis binas sustinet vires, quarum directiones sunt ipsis OB et OC parallelae: unde omnes, quae in utraque directione agunt, seorsim in unam summam colligi poterunt. Repraesentet ergo Ee vim omnibus viribus XY et Ff vim omnibus XV aequivalentem; ac primo quidem utraque aequalis est summae omnium, quibus aequivalet. Quare erit

$$\text{vis } Ee = \frac{\gamma\gamma}{2g}\int y\,dM, \text{ et vis } Ff = \frac{\gamma\gamma}{2g}\int z\,dM.$$

Deinde momenta harum virium respectu puncti O aequari debent cunctis momentis elementaribus simul sumtis, unde fit:

$$\frac{\gamma\gamma}{2g}.\ OE.\ \int y\,dM = \frac{\gamma\gamma}{2g}\int xy\,dM, \text{ seu } OE = \frac{\int xy\,dM}{\int y\,dM} \text{ et}$$

$$\frac{\gamma\gamma}{2g}.\ OF.\ \int z\,dM = \frac{\gamma\gamma}{2g}\int xz\,dM, \text{ seu } OF = \frac{\int xz\,dM}{\int z\,dM}.$$

sicque omnes vires, quas axis sustentat, ad duas sunt reductae Ee et Ff, quarum tam magnitudines quam directiones et loca applicationis innotescunt.

COROLL. 1.

339. Si centrum inertiae corporis fuerit in I, eique respondeant coordinatae OG, GK et KI, erit ut supra vidimus $OG = \frac{\int x\,dM}{M}$, $GK = \frac{\int y\,dM}{M}$, $KI = \frac{\int z\,dM}{M}$, unde pro superioribus formulis est $\int y\,dM = M.\ GK$ et $\int z\,dM = M.\ KI$.

COROLL. 2.

340. Si universa corporis massa M in centro inertiae I collecta esset, parique celeritate gyraretur, axis ab ea in puncto G vim sustineret $= \frac{\gamma\gamma}{2g}.\ M.\ GI$ in directione GI, unde oriuntur vires duae

secundum GK $= \frac{\gamma\gamma}{2g} \int y\,dM$ et secundum GL $= \frac{\gamma\gamma}{2g} \int z\,dM$,
quibus ergo viribus illae secundum Ee et Ff sunt aequales.

COROLL. 3.

341. Si planum AOB, quod arbitrio nostro relinquitur, per centrum inertiae I corporis ductum assumatur, ut sit KI $= 0$ et $\int z\,dM = 0$, erit quidem vis $Ff = 0$, at vero distantia OF infinita; ita tamen ut ejus momentum sit finitum, scilicet vis Ff. OF $= \frac{\gamma\gamma}{2g} \int xz\,dM$.

SCHOLION.

342. Binas autem has vires Ee et Ff non ulterius ad unam revocare licet, nisi intervallum EF evanescat: nam duae vires lineae rectae in duobus diversis punctis applicatae ad unam reduci nequeunt, nisi directiones virium fuerint in eodem plano. Verum duae istae vires Ee et Ff infinitis modis ad duas alias reduci possunt, sicuti fit, si positio directricium OB et OC mutetur, uti vidimus casu, quo planum AOB per centrum inertiae ducitur, vim Ff evanescere, et distantiam OF fieri infinitam. Inventis autem hujusmodi binis viribus Ee et Ff, quas axis gyrationis sustinet, ne is de situ suo dimoveatur, necesse est, ut a viribus aequalibus et contrariis retineatur. Scilicet si axis in E et F ex annulis fixis suspendatur, intra quos libere gyrari queat, annulus in E sustinebit vim Ee et annulus in F vim Ff, unde firmitatem annulorum colligere licet. Verum si axis in datis duobus quibuscunque punctis sustineri debeat, vires assignari poterunt, in illis punctis adhibendae, ut axis immotus servetur, quam investigationem in sequenti problemate suscipiamus.

PROBLEMA. 8.

Fig. 32. 343. Si axis, circa quem corpus rigidum motu uniformi gyratur, in datis duobus punctis O et A teneatur, definire vires, quas axis in his duobus punctis sustinet.

SOLUTIO.

Manentibus omnibus, quae in problemate praecedente sunt posita, vires axem sollicitantes ad duas Ee et Ff sunt revocatae, quarum illa directrici OB, haec vero directrici OC est parallela, ita ut sit

vis

Digitized by Google

$$\text{vis } Ee = \frac{\gamma\gamma}{2g}\int y\,dM \text{ et vis } Ff = \frac{\gamma\gamma}{2g}\int z\,dM$$

$$\text{tum } OE = \frac{\int xy\,dM}{\int y\,dM} \quad \text{et} \quad OF = \frac{\int xz\,dM}{\int z\,dM}.$$

His ergo viribus aequivalentes in punctis O et A applicandae quaeri debent. Sit ergo distantia $OA = a$, atque in O et A vires Ob et $A\mathfrak{C}$ applicentur, quae vi Ee aequivaleant, id quod fit si $Ob + A\mathfrak{C} = Ee$ et $Ob.\ OE = A\mathfrak{C}.\ AE$, unde oritur:

$$Ob = \frac{AE.\ Ee}{a} = Ee - \frac{OE.\ Ee}{a} \text{ et } A\mathfrak{C} = \frac{OE.\ Ee}{a}.$$

Simili modo in O et A applicentur vires Oc et $A\gamma$, quae vi Ff aequivaleant, eritque

$$Oc = \frac{AF.\ Ff}{a} = Ff - \frac{OF.\ Ff}{a} \text{ et } A\gamma = \frac{OF.\ Ff}{a}.$$

Quare in utroque puncto O et A binas habemus vires, quas axis ibi sustinet, scilicet in puncto O

$$\text{vim } Ob = \frac{\gamma\gamma}{2g}\left(\int y\,dM - \tfrac{1}{a}\int xy\,dM\right) \text{ et vim } Oc = \frac{\gamma\gamma}{2g}\left(\int z\,dM - \tfrac{1}{a}\int xz\,dM\right)$$

deinde in puncto A

$$\text{vim } A\mathfrak{C} = \frac{\gamma\gamma}{2g}.\ \tfrac{1}{a}\int xy\,dM \text{ et vim } A\gamma = \frac{\gamma\gamma}{2g}.\ \tfrac{1}{a}\int xz\,dM.$$

Vel si ipsas lineas ad elementum dM in Z situm pertinentes introducamus, erit

$$\text{vis } Ob = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\int AX.\ XY.\ dM, \text{ et vis } Oc = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\int AX.\ YZ.\ dM$$

$$\text{vis } A\mathfrak{C} = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\int OX.\ XY.\ dM, \text{ et vis } A\gamma = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\int OX.\ YZ.\ dM,$$

Ponamus $OG = b$, $AG = c$, ut sit $a = b + c$, tum vero $GX = u$ ut sit $AX = c - u$ et $OX = b + u$, erit

$$\text{vis } Ob = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\left(c\int y\,dM - \int uy\,dM\right); \text{ vis } Oc = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\left(c\int z\,dM - \int uz\,dM\right)$$

$$\text{vis } A\mathfrak{C} = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\left(b\int y\,dM + \int uy\,dM\right); \text{ vis } A\gamma = \frac{\gamma\gamma}{2ag}\left(b\int z\,dM + \int uz\,dM\right)$$

Accipiamus planum AOB ita, ut per centrum inertiae I transeat, erit $\int z\,dM = 0$, ac statuamus integralia

$$\int y\,dM = D;\ \int uy\,dM = E \text{ et } \int uz\,dM = F,$$

fietque:

$$\text{vis } Ob = \frac{\gamma\gamma}{2ag}(Dc - E); \quad \text{vis } Oc = \frac{-\gamma\gamma}{2ag} F$$

$$\text{vis } A\mathfrak{C} = \frac{\gamma\gamma}{2ag}(Db + E); \quad \text{vis } A\gamma = \frac{\gamma\gamma}{2ag} F$$

Atque jam facile tam in O binae vires Ob et Oc, quam in A binae vires $A\mathfrak{C}$ et $A\gamma$ ad unam redigi poterunt, ita ut in utroque termino O et A vis innoteſcat, quam ibi axis ſuſtinet.

COROLL. 1.

344. Si ergo planum AOB per centrum inertiae corporis I tranſiens ſtatuatur, vires Oc et $A\gamma$ ſunt aequales ſed contrariae, ita ut altera alterius ſit negativa: ſeu erit vis Oc + vi $A\gamma = 0$, quoniam $KI = 0$, ac propterea vis $GL = 0$.

COROLL. 2.

345. Si axis gyrationis OA per ipſum centrum inertiae I tranſeat, erit etiam $\int ydM = D = 0$, ideoque vires, quas axis in punctis O et A ſuſtinet, ita ſe habebunt.

$$\text{vis } Ob = \frac{-\gamma\gamma}{2ag} \cdot E; \quad \text{vis } Oc = \frac{-\gamma\gamma}{2ag} \cdot F$$

$$\text{vis } A\mathfrak{C} = \frac{\gamma\gamma}{2ag} \cdot E; \quad \text{vis } A\gamma = \frac{\gamma\gamma}{2ag} \cdot F.$$

COROLL. 2.

346. Ut axis nullas omnino vires ſuſtineat, corpusque circa eum libere gyrari poſſit, neceſſe eſt, ut quatuor haec integralia ſingula evaneſcant.

$\int ydM = 0$, $\int zdM = 0$; $\int xydM = 0$ et $\int xzdM = 0$.

ac binis prioribus quidem ſatisfit, ſi axis gyrationis per centrum inertiae corporis tranſeat.

SCHOLION.

347. Hic duo puncta O et A, unde quaſi axis ſuſpendatur, pro lubitu aſſumſimus: atque in genere patet vires, quae ad axem in iſtis punctis retinendum requiruntur, eo fore minores, quo longius capiatur intervallum OA, quod mirum non eſt, cum effectus hic a momentis virium pendeat. At ſi puncta O et A conveniant, ut fit $OA = a = 0$, vires illae adeo fiunt infinitae, ex quo intelligitur, axem in uni-

co

Digitized by Google

co puncto neutiquam tam firmiter contineri posse, ut immotus maneat; ad minimum ergo ad hoc duae vires requiruntur, axi in diversis puncti applicandae: nisi forte binae vires primitivae Ee et Ff jam eidem puncto applicentur. Hoc autem ex praecedente problemate fieri nequit, nisi sit

$$\int xydM : \int xzdM = \int ydM : \int zdM.$$

Sumto ergo plano AOB ita ut per centrum inertiae corporis I transeat, ut sit $\int zdM = 0$, hoc eveniet, si fuerit $\int xzdM = 0$. Quod etiam ex hoc problemate evidens est, quoniam tum vires Oc et $A\gamma$ evanescunt, solaeque vires Ob et $A\zeta$ relinquuntur, quibus unica vis Ee aequivalet, ita ut axis tum in unico puncto E sustentari queat, a vi nempe quae aequalis sit et contraria vi Ee. Sufficiet ergo axem in unico puncto E sustentari, si ducto plano AOB per centrum inertiae corporis, fuerit $\int xzdM = 0$, quo casu fit vis $Ee = \frac{\gamma\gamma}{2g}\int ydM$ et distantia $OE = \frac{\int xydM}{\int ydM}$. Reliquis casibus omnibus necesse est, ut axis in duobus punctis contineatur, quae utcumque accipiantur, vires ad axem retinendum requisitae aequales et contrariae esse debent viribus hic determinatis. Quas cum assignaverimus, superest ut vires, quas ipsa corporis compages ob motum gyratorium sustinet, definiamus.

PROBLEMA. 9.

348. Si corpus rigidum circa axem fixum uniformiter gyretur, definire vires, quas corporis compages seu mutuus partium nexus sustinet.

SOLUTIO.

Gyretur corpus circa axem OA celeritate angulari $= \gamma$, ita ut singulis minutis secundis angulum $= \gamma$ absolvat, atque vidimus si particula corporis, cujus massula $= dM$, fuerit in puncto Z, quod ab axe OA distet intervallo $XZ = r$, ejus vim centrifugam fore $= \frac{\gamma\gamma r dM}{2g}$, qua haec particula conetur in directione Zz ab axe recedere: ac simili vi singula corporis elementa conantur ab axe recedere, quod ne fiat compages corporis satis roboris habere debet. Quod quo facilius perspiciamus, consideremus corpus in quiete, et vires ei applicandas investigemus, quae ejus compagem perinde afficiant, atque ea nunc dum corpus est in motu afficitur. Singulis igitur elementis dM in Z sitis intelligendae sunt applicatae vires $Zz = \frac{\gamma\gamma r dM}{2g}$, ea ab axe OA retrahentes. Fig. 32.

Digitized by Google

trahentes. Praeterea vero ne totum corpus ab his viribus ad motum cieatur, axi in punctis E et F concipiantur vires ipsis Ee et Ff aequales et contrariae applicatae, sicque habebuntur omnes vires, quas corpus in quiete consideratum sustinet, cujus proinde compages tam robusta esse debet, ut ab istis viribus nulla mutatio ejus figurae inferatur: tum vero corpus ab omnibus istis viribus sollicitatum in aequilibrio conservabitur.

COROLL. 1.

349. Si Z fuerit aliquod extremum corporis punctum, particula dM ibi tam firmiter cum reliquo corpore connexa esse debet, ut inde a vi $Zz = \frac{\gamma\gamma r dM}{2g}$ avelli nequeat: cujus directio cum ab axe sit aversa, non opus est, ut ad latera sit affixa.

COROLL. 2.

350. Propius autem ad axem connexio fortior esse debet, quoniam omnes particulae ulterius remotae vires suas recedendi ab axe conjungunt: unde in ipso axe robustissima compages vigeat necesse est.

SCHOLION.

351. Quod ad axem attinet, assumsi hic eum in punctis E et F teneri; sin autem in aliis quibusque binis punctis O et A teneatur, in iis vires supra assignatis aequales et contrariae applicatae sunt intelligendae, quae cum elementaribus Zz corpus etiam in aequilibrio tenebunt. Compagem ergo tam fortem esse oportet, ut si corpori quiescenti memoratae vires essent applicatae, ejus figura ab earum actione nullam mutationem esset passura. Hinc autem simul patet, omnes istas vires esse in ratione duplicata celeritatis angularis, ita ut motus duplo celerior compagem quadruplo firmiorem postulet. Verum hoc judicium, quod ab interna corporum structura et partium indole pendet, hic ulterius prosequi non licet: sed hinc potius peculiaris disciplina constitui mereretur. Quare cum in hoc capite omnia, quae ad motum gyratorium circa axem fixum nullis viribus externis turbatum pertinent, satis sint expositа, quid vires praeterea efficiant investigemus: ac primo quidem corpus rigidum, quod circa axem fixum est mobile, in quiete sua contemplaturus, motumque elementarem, qui ei a datis viribus tempore tantum infinite parvo imprimetur, scrutabor. Haec tractatio in se parum utilis patefaciet, quantum axis a viribus sollicitantibus patiatur, tum vero in sequentibus, ubi de motu libero corporum rigidorum agetur, maximam afferet utilitatem.

CAPUT

CAPUT III.

DE MOTUS GYRATORII GENERATIONE.

PROBLEMA. 10.

352. Si corpus rigidum circa axem fixum mobile quiescat, definire vires elementares, quibus id tempusculo minimo per datum angulum promovetur.

SOLUTIO.

Sit ABCD sectio corporis quaecunque ad axem gyrationis normalis, cui ergo axis in O perpendiculariter insistere concipiatur; circa quem tempusculo dt per angulum $= \alpha dt^2$ promoveri debeat, siquidem novimus spatiola tempusculo infinite parvo dt genita quadrato temporis esse proportionalia. Si ergo elementum quodpiam in M consideremus, cujus massa sit $= dM$ et distantia ab axe $OM = r$, id transferendum est per arculum $Mm = \alpha r dt^2$. Ad quem effectum producendum necesse est, ut elementum hoc sollicitetur in directione Mm a vi quadam, quae ponatur $= p$: at massula dM a vi p sollicitata tempusculo dt protrahitur per spatiolum $= \frac{gp\,dt^2}{dM}$, (305) quod illi $\alpha r dt^2$ aequale positum praebet vim $p = \frac{\alpha r\,dM}{g}$. Tum vero hoc elementum adipiscetur celeritatem $= \frac{2gp\,dt}{dM}$, quae abit in $2\alpha r ds$, unde celeritas angularis acquisita erit $= 2\alpha dt$. Fig. 33.

COROLL. 1.

353. Si angulus tempusculo dt genitus vocetur $= d\omega$, ob $\alpha = \frac{d\omega}{dt^2}$, erit celeritas angularis genita $= \frac{2d\omega}{dt}$, ubi notandum est, angulum $d\omega$ esse differentiale secundi gradus, seu homogeneum esse cum quadrato tempusculi dt.

COROLL. 2.

354. Ut tempusculo dt angulus $d\omega$ generetur, elementum corporis dM in M situm secundum directionem motus Mm sollicitari debet a vi $= \frac{r\,d\omega}{g\,dt^2}.\,dM$, vires ergo singula elementa sollicitantes sunt in ratione composita massarum et distantiarum ab axe gyrationis.

COROLL. 3.

355. Si aliud elementum consideretur in N, cujus massa sit dN, id sollicitari debet in directione Nn ad distantiam ON normaliter ducta in plano ad axem gyrationis perpendiculari. Vires autem sollicitantes haec elementa in M et N erunt ut OM. dM ad ON. dN.

COROLL. 4.

356. Vicissim ergo si singula corporis elementa dM secundum directionem motus imprimendi sollicitentur viribus $= \frac{r\,d\omega}{g\,dt^2}.\,dM$, totum corpus circa axem gyrationis promovebitur angulo $= d\omega$ tempusculo dt, et acquiret celeritatem angularem $= \frac{2\,d\omega}{dt}$.

COROLL. 5.

356. Quoniam hoc modo singula elementa seorsim ad motum concitantur, neque se invicem impediunt, ab istis viribus elementaribus neque corporis compages, neque axis gyrationis afficietur: sed motus perinde producetur, ac si cuncta elementa tam a se invicem quam ab axe essent soluta.

PROBLEMA. 11.

Fig. 34. 357. Vires elementares, quibus corpus rigidum circa axem OA dato tempusculo dt per datum angulum $d\omega$ promovetur, ad duas vires finitas reducere, quae illis omnibus aequivaleant.

SOLUTIO.

Cum axe gyrationis OA normaliter conjungantur binae aliae directrices OB et OC, sumtoque corporis quocunque elemento in Z, cujus massa sit $= dM$, inde ad planum AOB demittatur perpendiculum ZY et ex Y ad axem OA normalis YX, ponanturque ternae coordinatae OX $= x$,

Digitized by Google

$OX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$, tum vero ejus ab axe distantia $XZ = \sqrt{(yy + zz)} = r$. Imprimatur jam elemento Z ut toti corpori motus in sensum $Z\zeta$, quae linea ad XZ est normalis in plano XYZ, et secundum hanc directionem $Z\zeta$ elementum dM sollicitetur necesse est vi $= \frac{r\,d\omega}{g\,dt^2}\,dM = \frac{\alpha r\,dM}{g}$, posito $\alpha = \frac{d\omega}{dt^2}$. Producta YZ in z agatur ZV parallela ipsi YX, et vis $Z\zeta = \frac{\alpha r\,dM}{g}$ resolvatur secundum directiones ZV et Zz, eritque vis secundum $ZV = \frac{\alpha z\,dM}{g}$ et vis secundum $Zz = \frac{\alpha y\,dM}{g}$. Quia perinde est, in quibusnam harum directionum punctis istae vires applicatae concipiantur, concipiatur ista $\frac{\alpha z\,dM}{M}$ applicata plano AOC in puncto V secundum Vv, ita ut sit ista vis secundum $Vv = \frac{\alpha z\,dM}{i\,g}$; vis autem $\frac{\alpha y\,dM}{g}$ applicata concipiatur plano AOB in puncto Y, ita ut habeatur vis secundum $Yz = \frac{\alpha y\,dM}{g}$. Nunc omnibus viribus secundum Vv aequivaleat vis una Rr plano AOC normaliter applicata in R, eritque ducta RP ipsi OC parallela

$$\text{vis } Rr = \frac{\alpha}{g}\int z\,dM\,;\quad OP = \frac{\int x z\,dM}{\int z\,dM} \text{ et } PR = \frac{\int z z\,dM}{\int z\,dM}.$$

Deinde omnibus viribus secundum Yz aequivaleat vis una Ss plano AOB normaliter applicata in puncto S, unde ad OA ducta normali SQ erit

$$\text{vis } Ss = \frac{\alpha}{g}\int y\,dM;\quad OQ = \frac{\int x y\,dM}{\int y\,dM} \text{ et } QS = \frac{\int y y\,dM}{\int y\,dM}.$$

Hae ergo duae vires Rs et St in corpus eundem effectum exerent, atque omnes vires elementares simul sumtae, si modo corpus fuerit rigidum.

COROLL. 1.

358. Si ergo corpus rigidum ab hujusmodi duabus viribus Rr et Ss sollicitetur, ab iis circa axem OA ita volvi incipit, ut tempusculo dt conficiat angulum $d\omega = \alpha dt^2$: neque ab his viribus ipsis axis ullam vim sustinebit, seu nulla opus erit vi, ad axem interea in quiete conservandum.

COROLL. 2.

359. Quoniam infinitis modis aliae binae vires exhiberi possunt his aequivalentes, etiam ab his omnibus corpori idem motus imprimetur, ita ut axis OA ab illis non afficiatur. Secus autem ratio compagis est comparata, quae tantum a viribus elementaribus nullam vim patitur.

SCHOLION.

360. In hac virium reductione non respeximus ad axis firmitatem sed quasi corpus perfecte esset liberum, ita omnibus viribus elementaribus binas invenimus vires aequivalentes, quae propterea etiam in axem nullum effectum exerunt. Sed si fixitatis axis rationem teneamus, infinitas alias vires exhibere possumus, quae quidem corpori eundem motum circa axem OA inducant, sed insuper etiam axem afficiant. Omnes scilicet vires, quae respectu axis OA idem praebent momentum, ac vires elementares omnes junctim sumtae, seu binae vires aequivalentes inventae, quoniam earum contrariae cum his in aequilibrio consisterent, corpori quoque eundem motum imprimunt. Cum vero vis $Z\zeta = \frac{\omega r dM}{g}$ momentum respectu axis OA sit $= \frac{\omega rrdM}{g}$, ex omnibus viribus elementaribus nascitur momentum $= \frac{\omega}{g} \int rrdM = \frac{d\omega}{gdt^2} \int rrdM$: omnes ergo vires, quae respectu axis OA aequale habent momentum, corpus circa hunc axem tempusculo dt convertent per angulum $= d\omega$: unde sequens problema facile solvetur.

PROBLEMA 12.

361. Si corpus rigidum quiescens et circa axem fixum mobile a viribus quibuscunque sollicitetur, invenire motum primo temporis instante genitum.

SOLUTIO.

Colligantur omnium virium momenta respectu axis gyrationis, attendendo in utrum sensum quaelibet vergat, sitque summae omnium momentorum $= Vf$, ex cujus sensu motus primo impressi directio innotescit. Tum sit $d\omega$ angulus, per quem corpus circa axem tempusculo dt protruditur: et singula corporis elementa dM multiplicentur per quadrata distantiarum suarum ab axe rr, et calculo colligatur integrale $\int rrdM$. Quo facto oportet esse $\frac{d\omega}{gdt^2} \int rrdM = Vf$, unde jam

Digitized by Google

jam viciſſim angulus $d\omega$ elicitur, per quem corpus tempusculo dt a virium momento Vf promovetur, ſcilicet $d\omega = \frac{Vfgdt^2}{\int rrdM}$. Celeritas autem angularis, quam corpus hoc tempusculo dt acquirit, erit $= \frac{2Vfgdt}{\int rrdM}$; ſicque cognoſcitur effectus a viribus quibuscunque primo temporis inſtanti dt genitus.

COROLL. 1.

362. Angulus ergo $d\omega$ dato tempusculo dt confectus eſt directe ut momentum virium Vf, et reciproce ut integrale $\int rrdM$, quod eſt aggregatum omnium corporis elementorum dM per quadrata diſtantiarum ſuarum ab axe gyrationis multiplicatorum.

COROLL. 2.

363. Haec formula ſimilis eſt ei, qua generatio motus progreſſivi exprimitur, dum hic loco virium momentum virium, et loco maſſae corporis M valor integralis $\int rrdM$ capiatur, quem valorem deinceps *momentum inertiae* appellabimus.

SCHOLION.

364. In hoc ergo problemate effectus virium quarumcunque in motu circa axem fixum generando perfecte eſt definitus, ut nihil amplius deſiderari queat. Quemadmodum enim virium ſollicitantium momenta reſpectu axis cujusvis capi debeant, in Statica docetur, et mox a nobis accuratius explicabitur. Verum praeter ipſum motum genitum plurimum intereſt hic vires, quas axis ſuſtinet, determinare: hocque non ſolum ut intelligatur, quantis viribus opus ſit ad axem continendum, ne dimoveatur; ſed ut deinceps, quando ad motum corporum rigidorum liberum revertemur, judicare valeamus, quibusnam caſibus axis nullas plane vires ſuſtineat. Haec autem quaeſtio de viribus, quas axis a viribus ſollicitantibus ſuſtinet, etſi maximi eſt momenti, tamen adhuc minus ſtudioſe eſt tractata, quamobrem operam dabo, ut eam luculenter et diſtincte evolvam.

PROBLEMA. 13.

365. Si corpus rigidum quieſcens et circa axem fixum mobile a viribus quibuscunque ſollicitetur, determinare vires, quas axis inde ſuſtinet.

Digitized by Google

SOLUTIO.

Haec quaestio iterum ita ad statum quietis est reducenda, ut corpori certae vires se in aequilibrio continentes applicatae concipiantur, a quibus axis perinde afficiatur, atque a viribus sollicitantibus, dum in corpore motum generant. Hunc in finem perpendantur omnes vires corpus sollicitantes, ex iisque momenta respectu axis gyrationis colligantur, quorum summa sit $= Vf$, unde quaeratur angulus temporis-

Fig. 34. culo dt genitus, qui inventus est $d\omega = \frac{Vfgdt^2}{\int rrdM}$. Deinde quaerantur vires elementares eundem motum generantes, quas pro singulis corporis elementis ita definivimus, ut elementum dM in Z positum secundum directionem $Z\zeta$ ad distantiam $XZ = r$ ab axe OA perpendicularem et in plano ad axem normali sitam, seu secundum directionem motus geniti sollicitetur vi $= \frac{rd\omega^2 dM}{gdt^2} = \frac{Vfr dM}{\int rrdM}$, simulque notavimus, ab his viribus axem nihil pati. Quare si his viribus aequales et contrarias corpori insuper applicemus, corpus in quiete seu aequilibrio servabitur, simulque axis gyrationis easdem adhuc vires sustinebit, quas in motus generatione sustinuerat. Hinc ad vires axem afficientes inveniendas corpori praeter vires, quibus acta sollicitatur, applicatae concipiantur vires elementares motum genitum iterum tollentes; seu harum loco ex §. 357. corpori applicentur vires oppositae viribus Rr et Ss, ibi assignatis, statuendo $\omega = \frac{Vfg}{\int rrdM}$: hoc modo corpus in aequilibrio continebitur, axisque easdem vires sustinebit, quas in generatione motus sustinet.

COROLL. 1.

366. Praeter vires ergo corpus actu sollicitantes primo ipsi vis Rr contrarie est applicanda; vis autem haec Rr est $= \frac{Vf\int zdM}{\int rrdM}$ tantis OP $= \frac{\int xzdM}{\int zdM}$ et PR $= \frac{\int zzdM}{\int zdM}$. Deinde etiam contrarie applicari debet vis $Ss = \frac{Vf\int ydM}{\int rrdM}$, existente OQ $= \frac{\int xydM}{\int ydM}$ et QS $= \frac{\int yydM}{\int ydM}$.

COROLL. 2.

367. Vel si vires sollicitantes corpori motum in sensum oppositum ipsi $Z\zeta$ imprimant, tum praeter eas hae ipsae vires Rr et Ss corpori

Digitized by Google

pori applicatae sunt intelligendae: ubi meminisse oportet, esse OX $= x$, XY $= y$, YZ $= z$, et $rr = yy + zz$.

COROLL. 3.

368. Ex his ergo viribus, quibus corpus in aequilibro tenetur, judicari debet, quantum axis ab iis patiatur, seu quanta vi retineri debeat, ne de loco suo dimoveatur.

SCHOLION.

369. Axis scilicet hic ut omnino fixus consideratur, ita ut corpus in aequilibrio versetur, si virium momenta respectu istius se mutuo destruant. Quo autem clarius pateat, quantas vires axis sustineat, res ita commodissime concipitur, quasi axis in duobus punctis teneretur, ut definiendum sit, quantis viribus in his punctis applicandis opus sit, ut in situ suo retineatur. Quod quidem judicium esset facile, si singulae vires ipsi axi essent applicatae; quoniam proposita quacunque vi axi applicata, duae semper vires in datis duobus punctis applicandae exhiberi possunt illi aequivalentes. Cum igitur directiones virium, quae corpori motum inducunt, eo ipso non per axem transeant, atque etiam vires insuper applicandae Rr et Ss axem non afficiant, totum negotium jam eo reducitur, ut omnes vires, quibus corpus sollicitari consideramus, ad alias ipsis aequivalentes revocemus, quae omnes axi immediate sint applicatae. Primum quidem dubitare liceret, an hoc fieri posset? sed ostendemus, quoties vires corpori applicatae fuerint in aequilibrio, iis semper ejusmodi aequivalentes assignari posse, quae ipsi axi gyrationis sint applicatae. Virium autem sollicitantium duo genera sunt constituenda, alterum earum quae nullum momentum respectu axis praebent, quod fit si earum directiones cum axe gyrationis in eodem fuerint plano; alterum earum quarum directio reperitur in plano ad axem normali, quae quasi totae ad motum gyratorium generandum impendantur. Verum omnes vires ad haec duo genera reducere licet, unde primum investigabo, quantum axis a primo genere, quod nullum motum gignit, afficiatur.

PROBLEMA. 14.

370. Si corpus rigidum circa axem fixum mobile sollicitetur a vi, cujus directio cum axe in eodem plano est sita, invenire vires, quas axis inde in datis duobus punctis sustinet.

SOLU-

Digitized by Google

SOLUTIO.

Fig. 35. Sit MN axis gyrationis, et PQ directio vis sollicitantis V, quae nisi fuerit axi parallela, eum in quodam puncto T secabit, quoniam cum axe in eodem plano est sita. Cum igitur ab hac vi nullum oriatur momentum respectu axis MN, ab ea etiam motus, si quis adesset, non afficietur, axisque perinde urgebitur, ac si quiesceret. Possumus ergo rem ita concipere, ac si vis V ipsi axi in puncto T secundum directionem TQ esset applicata, quae itaque secundum directiones TN et Tt, quae ad MN in plano MNPQ sit normalis, resoluta dabit

vim $TN = V\,cof\,NTQ$ et vim $Tt = V\,sin\,NTQ$.

Quodsi jam quaeratur, quantas vires axis in punctis M et N sustineat, inde ad directionem vis PQ demittantur perpendicula MP et NQ, et ob *cof* NTQ $= \frac{TQ}{TN} = \frac{TP}{TM} = \frac{PQ}{MN}$ et *sin* NTQ $= \frac{NQ}{TN} = \frac{MP}{TM}$, erit

$$\text{vis TN} = V.\frac{PQ}{MN} \text{ et vis T}t = V.\frac{NQ}{TN} = V.\frac{MP}{TM}.$$

Primum ergo axis secundum suam directionem MN sollicitatur a vi $= V.\frac{PQ}{MN}$, nihilque refert, in quonam ejus puncto ea applicata concipiatur. Alteri autem vi Tt applicari poterunt in M et N vires aequivalentes Mm et Nn normales ad axem in plano MNPQ, quae erunt:

$$\text{vis M}m = \text{Vis T}t.\frac{TN}{MN} = V.\frac{NQ}{MN} \text{ et}$$
$$\text{vis N}n = \text{Vis T}t.\frac{TM}{MN} = V.\frac{MP}{MN}.$$

Has ergo vires axis in punctis datis M et N praeter illam $V.\frac{PQ}{MN}$, qua secundum suam longitudinem urgetur, sustinet a vi proposita V, qua corpus secundum directionem PQ sollicitatur.

COROLL. 1.

Fig. 36. 371. Si intersectio T non cadat inter puncta M et N, perpendiculum NQ ut negativum spectari debet, ideoque vis Mm in M applicanda versus PQ dirigetur, ut sit

$$\text{vis M}m = V.\frac{NQ}{MN} \text{ et vis N}n = V.\frac{MP}{MN},$$

praeter quas axis secundum MN sollicitatur vi $= V.\frac{PQ}{MN}$.

CO-

Digitized by Google

COROLL. 2.

372. Si vis ſollicitantis V directio PQ fuerit axi MN parallela ad diſtantiam MP, ab ea axis primo ſecundum ſuam directionem MN trahetur vi $= V$, praeterea vero ſuſtinebit vires Mm et Nn aequales inter ſe, quarum utraque eſt $= \frac{MP}{MN} V$. Fig. 37.

SCHOLION.

373. Ad noſtrum propoſitum ſufficit, hunc caſum poſtremum probl. notaſſe, quo directio vis ſollicitantis eſt ipſi axi parallela. A quacunque enim vi corpus urgeatur, ea ſemper reſolvi poteſt in duas, quarum alterius directio ſit ipſi axi parallela, altera vero in plano ad axem normali ſita. Quod quo clarius appareat, ſit OA axis gyrationis, corporique applicata ſit vis quaecunque $PV = V$, ex cujus puncto quocunque P ducatur recta PQ axi OA parallela, et ex V in planum OAPQ demiſſo perpendiculo VR, ductaque RQ ad PQ normali, erit quoque VQ ad PQ normalis, et in plano ad PQ normali ſita: cui ſi parallela et aequalis ſtatuatur Pv, erit haec ad PQ perpendicularis et in plano ad axem OA normali exiſtens. Quare cum $PQVv$ ſit parallelogrammum rectangulum, vis $PV = V$ reſolvetur in vires PQ et Pv, ut ſit vis $PQ = \frac{PQ}{PV} \cdot V$ et vis $Pv = \frac{Pv}{PV} \cdot V$. Quoniam igitur illius vis PQ effectum in axem jam definivimus; ſupereſt ut quantum axis a vi Pv, dum motum gyratorium gignit, afficiatur determinemus: quem in finem ſequentia problemata evolvamus. Fig. 38.

PROBLEMA. 15.

374. Si lamina plana rigida EFBG mobilis ſit circa axem fixum ad eam in O normalem, eaque in eodem plano ſollicitetur; a data vi V ſecundum directionem BD invenire vires, quas axis ſuſtinet in ipſa motus generatione. Fig. 39.

SOLUTIO.

Ab axe O in directionem vis ſollicitantis demittatur perpendiculum $OD = f$, erit ejus momentum $= Vf$: tum ſumto elemento corporis dM in Z, cujus diſtantia ab axe ſit $OZ = r$, lamina tempusculo dt in ſenſum $Z\zeta$ convertetur per angulum $d\omega = \frac{Vfg\,dt.^2}{\int r r dM}$: ad quem effectum producendum opus eſt vi elementari ſecundum $Z\zeta$ ſollici-

Digitized by Google

tante $= \frac{rd\omega dM}{gdt^2} = \frac{Vfr dM}{\int rr dM}$. Quae vires elementares ut colligantur, sumantur in plano laminae duae directrices OB et OC inter se normales, positisque coordinatis OY $= y$ et YZ $= z$, ut sit $rr = yy + zz$, vis Zζ resolvatur secundum directiones ZV et Zz, erit

$$\text{vis ZV} = \frac{Vfz dM}{\int rr dM} \text{ et vis Z}z = \frac{Vfy dM}{\int rr dM}.$$

Jam illis omnibus ZV aequivaleat vis Rr, his vero Zz vis Ss, eritque

$$\text{vis R}r = \frac{Vf\int z dM}{\int rr dM} \text{ et OR} = \frac{\int zz dM}{\int z dM} \text{ atque}$$

$$\text{vis S}s = \frac{Vf\int y dM}{\int rr dM} \text{ et OS} = \frac{\int yy dM}{\int y dM},$$

quae vires contrario modo in Rϱ et Sσ applicatae intelligantur, quibuscum si vis sollicitans BD $=$ V conjungatur, habebuntur vires, quarum actionem axis sustinet. Nunc autem vis Dd $=$ V aequivalet vi ipsi aequali O$\mathfrak{Y}$ $=$ V in O secundum eandem directionem applicatae, et insuper vi evanescenti in distantia OD in infinitum producta applicanda, cujus autem momentum sit $=$ Vf. Simili modo loco virium Rϱ et Sσ in O substitui possunt vires ipsi aequales O$\mathfrak{R}$ et O$\mathfrak{S}$, una cum viribus evanescentibus ita in distantiis infinitis applicandis, ut earum momenta sint $\frac{Vf\int z z dM}{\int rr dM}$ et $\frac{Vf\int yy dM}{\int rr dM}$. Cum igitur haec momenta a viribus evanescentibus orta se destruant, ipsae vires evanescentes non amplius in computum ingrediuntur: ex quo axis in puncto O has ternas vires sustinet, 1° vim O$\mathfrak{Y}$ $=$ V aequalem et parallelam vi sollicitanti, 2°, vim O$\mathfrak{R}$ $= \frac{Vf\int z dM}{\int rr dM}$ et 3°, vim O$\mathfrak{S}$ $= \frac{Vf\int y dM}{\int rr dM}$.

COROLL. 1.

375. Si directrix OB per centrum inertiae laminae I ducatur, erit $\int z dM = 0$, et $\int y dM = M$. OI denotante M massam totam. Hinc axis in O sustinet duas vires O$\mathfrak{Y}$ $=$ V et O$\mathfrak{S}$ $= \frac{Vf.\ M.\ OI}{\int rr dM}$, quae facile ad unicam reducuntur.

COROLL. 2.

376. Ut axis nullam plane vim sustineat, necesse est, ut directio vis sollicitantis BD sit ad rectam OIB normalis, tum vero ut sit V $= \frac{Vf.\ M.\ OI}{\int rr dM}$, seu $f = \frac{\int rr dM}{M.\ OI}$, ubi f $=$ OD designat distantiam vis applicatae ab axe O.

CO-

COROLL. 3.

377. Sin autem vis sollicitans V ita fuerit applicata, ut axis O ab ea non afficiatur, ob $f = \frac{frrdM}{M.OI}$, lamina tempusculo dt per angulum $d\omega$ vertetur, ut sit $d\omega = \frac{Vgdt^2}{M.OI}$; punctum ergo I perinde moveri incipiet, ac si tota massa ibi esset collecta, eaque ab eadem vi V sollicitaretur.

EXPLICATIO.

378. Fundamentum hujus solutionis isti nititur principio, quod vires, quarum momenta respectu axis gyrationis se destruunt, in axem eundem effectum exerant, ac si hae vires ipsi axi immediate in suis directionibus essent applicatae. Quod etiamsi in ipsa solutione satis sit confirmatum, propterea quod vires evanescentes, quarum momenta se destruunt, recte negligi possunt; tamen si quem evanescentia et distantia infinita, ad quam hae vires applicatae considerantur, offendant, idem alio modo ostendisse juvabit. Sint ergo in eodem plano duae vires Bb et Cc, quarum momenta respectu puncti O se destruant, ita ut Fig. 40. ductis in earum directiones ex O perpendiculis OB et OC sit Bb. OB $= Cc$. OC seu $Bb : Cc = OC : OB$. Concurrant earum directiones in E, eaedemque vires quasi puncto E applicatae concipi possunt, tum autem dabitur una Ee illis aequivalens, cujus directio per ipsum punctum O necessario transit, alioquin enim inde momentum respectu O oriretur contra hypothesin. Quod etiam sic demonstratur. Sit Ee media directio virium Bb et Cc in E applicatarum, erit per resolutionem virium $Bb : Cc = \sin\nu : \sin\mu$; at eadem ratio valet, si Ee per O transeat, quoniam est $\sin\nu : \sin\mu = OC : OB = Bb : Cc$. Hinc vis aequivalens Ee quasi in O applicata considerari potest, quae sit $O\omega$: cui ergo etiam vires $O\mathfrak{G}$ et $O\gamma$ ipsis Bb et Cc aequales aequivalebunt: sicque loco virium Bb et Cc recte substituere licet vires $O\mathfrak{G}$ et $O\gamma$ ipsis aequales et in ipso puncto O applicatas. Hac igitur demonstratione vicissim principium in solutione usurpatum extra dubium collocatur.

SCHOLION.

379. Notatu omnino dignus est casus, quo vis corpus sollicitans nullam vim in axem gyrationis exerit, qui ergo sponte, dum vis effectum exerere incipit, in quiete manebit. Quo hunc casum accuratius Fig. 39. cognoscamus, in recta OI ab axe O per centrum inertiae I producta quaeri debet punctum H, ut sit distantia $OH = \frac{frrdM}{M.OI}$; tum enim

quaecunque vis H*b* ad OH normalis in plano propoſito nullo modo axem O afficiet. Infra autem patebit, punctum H idem eſſe, quod vulgo centrum oſcillationis vocari ſolet, quemadmodum I eſt centrum gravitatis. Ceterum hoc problemate ſoluto planior reddetur ſolutio ſequentis, ubi corpori etiam extenſio ſecundum longitudinem axis tribuitur.

PROBLEMA. 16.

Fig. 41. 380. Si corpus rigidum circa axem fixum OA mobile a quotcunque viribus ſollicitetur, quarum directiones ſint in planis ad axem normalibus, invenire vires, quibus in ipſo motus initio axis immediate urgetur.

SOLUTIO.

Cum omnes vires agant in planis ad axem normalibus, quaerantur ſingularum momenta reſpectu axis OA, quorum prout in eundem ſenſum tendunt vel contra, aggregatum ſit Vf, a quo corpus circa axem tempusculo dt vertatur per angulum $d\omega$, ita ut particula in Z feratur in ſenſum $Z\zeta$. Aſſumtis in ſubſidium calculi binis directricibus OB et OC ad OA normalibus conſtituantur pro elemento corporis dM in Z ſito ternae coordinatae $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, ſitque ejus ab axe diſtantia $XZ = \gamma\gamma(yy + zz) = r$. Quibus poſitis ſupra invenimus fore $d\omega = \frac{Vfgdt^2}{\int rrdM}$. Praeter has autem vires, quibus corpus actu ſollicitatur, axis inſuper ſollicitatur a viribus aequalibus et contrariis iis, ad quas ſupra vires elementares reduximus, (vide §. 366): ubi notandum eſt, omnium harum virium momenta junctim ſumta ſe mutuo tollere. Quare ſi loco cujusque vis ſubſtituatur una ei aequalis ipſi axi in eadem directione applicata, et alia evaneſcens ad diſtantiam infinitam applicata, cujus autem momentum ſit illius momento aequale, omnium harum virium momenta ſe deſtruent, et cum eae evaneſcant, prorſus non in cenſum venient. Hinc igitur vires axem immediate ſollicitantes ita ſe habebunt: Primo ſingulae vires corpus ſollicitantes in planis ad axem normalibus ad ipſum axem in eadem directione applicentur; deinde ob vires elementares ſumto intervallo $OP = \frac{\int xzdM}{\int zdM}$ in P ſecundum directionem ipſi OB parallelam axi applicetur vis $P\varrho = \frac{Vf\int zdM}{\int rrdM}$; tum vero ſumto intervallo $OQ = \frac{\int xydM}{\int ydM}$ in Q ſecundum directionem ipſi

ipsi OC parallelam et oppositam applicetur vis $Q\sigma = \frac{Vff y dM}{\int rry dM}$; sicque omnes habebuntur vires, quas axis immediate sustinebit, qui ergo satis fixus esse debet, ut ne ab iis de situ suo deturbetur.

COROLL. 1.

381. Si planum AOB ita capiatur, ut per corporis centrum inertiae transeat, erit $\int z dM = 0$, unde vis $P\varrho$ evanescet, simul vero distantia OP fiet infinita: ubi tamen notandum est, fore $P\varrho . OP = \frac{Vff x z dM}{\int rr dM}$: ita ut hanc vim negligere non liceat.

COROLL. 2.

382. Quoniam hoc modo omnes vires, quas axis sustinet, ipsi axi sunt applicatae, si eae se mutuo in aequilibrio teneant, axis nullam vim patietur, corpusque circa eum, etiamsi sit liber, sponte converti incipiet.

COROLL. 3.

383. A singulis autem viribus corpus sollicitantibus oriuntur totidem vires ipsi axi applicatae; quibus deinde adjungi debent binae vires $P\varrho$ et $Q\sigma$ axi itidem applicatae; sicque omnes habentur vires axem afficientes.

EXPLICATIO.

384. Iam ante ostendimus, si duae vires in eodem plano ad axem normali fuerint applicatae, quarum momenta se destruant, iis aequivalere duas aequales vires ipsi axi in iisdem directionibus applicatas; nunc igitur, ne ullum dubium circa hanc solutionem superest, ex principiis staticis demonstrari oportet, idem valere, etiamsi illae vires in diversis planis ad axem normalibus fuerint applicatae. Sit igitur axi OA in plano ad E normali applicata vis quaecunque in figura non expressa, tum vero in plano ad axem in F normali applicata sit vis Nn, cujus momentum illius momento sit aequale et contrarium, sitque recta FN ad directionem istius vis Nn perpendicularis. Ducatur ex E recta EM ipsi FN aequalis et parallela, cui in M vis Mm ipsi Nn aequalis et parallela applicata concipiatur; tum vero in E et F aequales vires illis $F\nu$ et $E\mu$ itidem parallelae applicatae intelligantur. Atque evidens est, tres vires Mm, $E\mu$ et $F\nu$ aequivalere vi uni Nn, quoniam haec contrario- Fig. 42.

modo applicata cum illis tribus aequilibrium constitueret. Quare loco vis N*n* substituere licet tres vires M*m*, Eμ et Fν, quarum binae posteriores ipsi axi, prior autem in eodem plano ad axem normali, in quo vis non expressa agit, est applicata. Cum igitur hujus vis M*m* momentum aequale sit et contrarium momento vis in figura non exhibitae, eae vires ad ipsum axem transferri possunt, sicque loco vis M*m* substituetur vis E$\mathfrak{M}$ ipsi aequalis et parallela: quae cum a vi Eμ destruatur, unica relinquitur vis Fν, quae jam locum vis N*n* sustinebit, dum etiam vis in figura non expressa axi in puncto E applicatur. Ex quo in genere intelligitur, loco virium, quarum momenta se destruunt, easdem vires ipsi axi applicatas substitui licere, si quidem directiones fuerint in planis ad axem normalibus.

PROBLEMA. 17.

Fig. 41. 385. Si corpus rigidum circa axem fixum OA mobile a viribus quibuscunque sollicitetur, definire vires, quibus axis in datis duobus punctis O et A sustentari debet, ne de situ suo deturbetur.

SOLUTIO.

Per alterum datorum punctorum O statuantur binae directrices OB et OC tam inter se quam ad axem OA normales, et positis pro corporis elemento quovis dM in Z sito ternis coordinatis $OX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$, vocetur ejus ab axe distantia $XZ = \sqrt{(yy + zz)} = r$. Tum considerentur singulae vires corpus sollicitantes, et quae fuerint obliquae, resolvantur in binas, quarum alterae sint axi OA parallelae, alterae vero in planis ad axem normalibus sint sitae. Priores, quae ad motum nihil conferunt, quantum effectum in axem exerant, supra (§. 372.) definivimus, unde simul patet, quantae vires inde in datis punctis O et A oriantur. Posteriores vero simul praebeant momentum $= Vf$ ad corpus in sensum Zζ convertendum: earum autem quaelibet puncto axis cui respondet, in sua directione applicetur, cujusmodi una vis sit $Ll = L$. Hujus ergo loco in O et A applicentur vires parallelae Oλ et Al, ut sit $O\lambda = L.\frac{AL}{OA}$ et $AL = L.\frac{OL}{AO}$, quippe quae duae illi aequivalent: atque hoc modo ex singulis viribus tales binae vires ad puncta O et A transferantur. Deinde vero posito intervallo $OA = a$, ob vires Pϱ et Qσ puncta O et A sustinebunt vires Oo, Aα et Oω, Aα illis parallelas, ita ut sit

vis

Digitized by Google

$$\text{vis } O\mathfrak{o} = \frac{Vff(a-x)\,z\,dM}{afrr\,dM}, \quad \text{vis } A\mathfrak{a} = \frac{Vffxz\,dM}{afrr\,dM}$$

$$\text{vis } O\omega = \frac{Vff(a-x)y\,dM}{afrr\,dM}; \quad \text{vis } A\alpha = \frac{Vffxy\,dM}{afrr\,dM}.$$

Cum igitur hoc pacto omnes vires, quas axis sustinet, ad puncta O et A fuerint perductae, ab his junctim sumtis ista axis puncta revera sollicitabuntur; quare ea a viribus contrariis coërceantur, necesse est.

COROLL. 1.

386. Omnes istae vires axi in punctis O et A applicatae simul ad axem sunt normales, nisi affuerint vires axi parallelae, unde praeter normales axis etiam secundum suam longitudinem urgetur.

COROLL. 2.

387. Quotcunque autem vires utrique termino O et A applicatae reperiuntur, pro utroque cunctas ad unam revocare licet, quam propterea axis in eo puncto sustinebit: quae vires in O et A, nisi evanescant, axis non sponte in situ suo permanebit.

COROLL. 3.

388. Si nullae adsint vires axi parallelae, axis etiam nequaquam secundum suam longitudinem urgetur, sed in punctis O et A viribus tantum ad axem normalibus erit resistendum, unde sufficiet axem intra duos annulos fixos suspendisse.

SCHOLION.

389. Hic autem nondum modos, quibus axis in quiete conservari solet, explicare licet, quoniam in praxi axes corporum notabilem crassitiem habent, ita ut supensio non ad axem linearem, qualem hic postulamus, referatur: quare cavendum est, ne ea, quae hic de axe lineari sunt demonstrata, temere ad quovis axes crassos extendantur. Teneatur ergo hic perpetuo, axem nobis esse lineam rectam, quae moto corpore ipsa non moveatur, cujusmodi motus existeret, si corpus intra duas cuspides contineretur, circa quas tamen liberrime sine frictione revolvi posset. Sin autem adsit axis materialis, qualis rotis affigi solet, isque vel plano vel cavitati incumbat, ejus motus utique in computum veniat necesse est, neque tum facile erit lineam illam, quae durante motu corporis ipsa maneat immota, assignare. Verumtamen quia hic nobis tantum de primo motus initio sermo est, haud difficile

cile est lineam, quae pro quovis suspensionis modo in quiete persistat, agnoscere.

PROBLEMA. 18.

Fig. 43. 390. Si corpus rigidum circa axem OA fuerit mobile, invenire vires, a quibus si corpus sollicitetur, axis inde nullas plane vires sustineat.

SOLUTIO.

Hujusmodi vires applicari debent in planis ad axem normalibus, et quoniam quotquot earum fuerint, eas ad duo plana reducere licet, quaeramus vires in planis ad axem in punctis O et A normalibus applicandas, a quibus axis nullatenus afficiatur. Constitutis ut ante in O binis directricibus OB et OC tam inter se quam ad axem OA normalibus, iisdem in A parallelae statuantur AF et AH. Quod si jam solutio praecedentis problematis et formulae ibi inventae in subsidium vocentur, huic problemati satisfiet, si rectis OB, OC, AF et AH alicubi vires applicentur illis Oo, Oω, Aa et Aα, quas ibi invenimus, aequales et contrariae, quoniam hae ad axem translatae a viribus elementaribus destruuntur. Sint ergo Ee et Ff vires directrici OC, at Gg et Hh vires directrici OB parallelae, quae agant, uti figura ostendit. Quare posita distantia OA $= a$, vires istae ita esse debent comparatae:

$$\text{vis } Ee = \frac{V\int\int(a-x)y\,dM}{a\int r r\,dM}; \quad \text{vis } Ff = \frac{V\int\int xy\,dM}{a\int r r\,dM}$$

$$\text{vis } Gg = \frac{V\int\int(a-x)z\,dM}{a\int r r\,dM}; \quad \text{vis } Hh = \frac{V\int\int xz\,dM}{a\int r r\,dM}.$$

Praeterea vero summam momentorum harum quatuor virium ipsi Vf aequalem esse oportet: ex quo erit

$$OE.\int(a-x)y\,dM + AF.\int xy\,dM + OG.\int(a-x)z\,dM + AH.\int xz\,dM = a\int r r\,dM.$$

Cui aequationi ita infinitis modis satisfieri potest, ut ternis distantiis pro lubitu assumtis quarta determinetur. Facilior autem reddetur solutio, si tam distantiae OE, AF, quam OG, AH aequales capiantur: statuamus ergo

$$OE = AF = m, \quad \text{et } OG = AH = n,$$

atque fieri oportet

$$m\int y\,dM + n\int z\,dM = \int r r\,dM,$$

unde vel m vel n pro lubitu assumi potest. Deinde sufficit, ut quatuor illae vires rationem superiorum formularum teneant, ita ut sint:

vis

vis $Ee = \frac{\int(a-x)ydM}{ab}$; vis $Ff = \frac{\int xydM}{ab}$

vis $Gg = \frac{\int(a-x)zdM}{ab}$; vis $Hh = \frac{\int xzdM}{ab}$.

Hae ergo quatuor vires praescripto modo corpori applicatae axem plane non afficient.

COROLL. 1.

391. Si planum AOB per centrum inertiae I capiatur, erit $\int zdM = 0$, et $KI = \frac{\int ydM}{M}$, denotante M massam totius corporis. Erunt ergo vires:

vis $Ee = \frac{Ma.KI - \int xydM}{ab}$; vis $Ff = \frac{\int xydM}{ab}$

vis $Gg = \frac{-\int xzdM}{ab}$; vis $Hh = \frac{\int xzdM}{ab}$

earumque distantiae ab axe in genere ita debent esse comparatae, ut sit

$$Ma.KI.OE + (AF - OE)\int xydM + (AH - OG)\int xzdM = a\int rrdM.$$

COROLL. 2.

392. Si etiam ipse axis OA per centrum inertiae I transeat, ut sit $KI = 0$, vires ita se habebunt:

vis $Ee = \frac{-\int xydM}{ab}$; vis $Ff = \frac{\int xydM}{ab}$

vis $Gg = \frac{-\int xzdM}{ab}$; vis $Hh = \frac{\int xzdM}{ab}$

earumque distantiae ab axe hoc modo, ut sit

$$(AF - OE)\int xydM + (AH - OG)\int xzdM = a\int rrdM.$$

COROLL. 3.

393. Quodsi ergo valores integralium $\int xydM$ et $\int xzdM$ evanescant, tum vires evanescunt, quam distantiarum quaedam debent esse infinitae. At loco vis evanescentis in distantia infinita applicatae substituere licet duas in distantiis finitis applicandas.

SCHOLION. 1.

394. Vires hic investigavimus in duobus planis ad axem normalibus applicandas, a quibus axis nullam vim sustineat. His autem viribus infinitis modis aliae tam in iisdem planis quam in aliis aequivalen-

Digitized by Google

tes exhiberi possunt. Veluti loco vis Ee sumi possunt vires Pp et $O\pi$ in directionibus parallelis, ut sit $Pp = Ee + O\pi$, et $Ee.EP = O\pi.OP$ seu $Ee = Pp - O\pi$ et $OE = \frac{OP.Pp}{Pp - O\pi}$. Quare ducto plano AOB per centrum inertiae I corporis, locoque vis Ee introductis viribus Pp et $O\pi$, quarum altera $O\pi$ maneat indefinita, reliquae ita se habebunt.

$$\text{Vis } Pp = \text{vis } O\pi + \frac{Ma.KI - \int xydM}{ab}; \quad \text{vis } Ff = \frac{\int xydM}{ab},$$

$$\text{vis } Gg = \frac{-\int xzdM}{ab} \text{ et vis } Hb = \frac{\int xzdM}{ab};$$

$$ab.OP.\ \text{Vis } O\pi + Ma.KI.OP - OP.\int xydM + AF.\int xydM + (AH - OG)\int xzdM = a\int rrdM.$$

Si praeterea simili modo loco vis Ff binae vires Rr et $A\varrho$ introducantur, cum sit $Ff = Rr - A\varrho$ et $AF = \frac{AR.Rr}{Rr - A\varrho}$, atque vis $A\varrho$ arbitrio nostro relinquatur; erunt vires:

$$\text{vis } Pp = \text{vis } O\pi + \frac{Ma.KI - \int xydM}{ab}; \quad \text{vis } Rr = \text{vis } A\varrho + \frac{\int xydM}{ab}$$

$$\text{vis } Gg = \frac{-\int xzdM}{ab} \text{ et vis } Hb = \frac{\int xzdM}{ab}.$$

Tum vero distantiae ita debent esse comparatae:

$$\left.\begin{array}{l} +ab.OP.\ \text{Vis } O\pi + Ma.KI.OP + (AR - OP)\int xydM \\ +ab.AR.\ \text{Vis } A\varrho \quad\quad + (AH - OG)\int xzdM \end{array}\right\} = a\int rrdM.$$

Si denique loco vis Gg binae Qq et $O\Phi$; nec non loco vis Hb binae Ss et $A\sigma$ introducantur, ob

$$Gg = Qq - O\Phi; \quad OG = \frac{OQ.Qq}{Qq - O\Phi};$$

$$Hb = Ss - A\sigma; \quad AH = \frac{AS.Ss}{Ss - A\sigma};$$

jam in genere vires ita capiantur:

$$\text{vis } Pp = \text{vis } O\pi + \frac{Ma.KI - \int xydM}{ab}; \quad \text{vis } Rr = \text{vis } A\varrho + \frac{\int xydM}{ab}$$

$$\text{vis } Qq = \text{vis } O\Phi - \frac{\int xzdM}{ab}; \quad \text{vis } Ss = \text{vis } A\sigma + \frac{\int xzdM}{ab}$$

earumque distantiae ab axe ita se habeant, ut fit

$$\left.\begin{array}{l} +ab.OP.\ \text{Vis } O\pi + Ma.KI.OP + (AR - OP)\int xydM \\ +ab.AR.\ \text{Vis } A\varrho \quad\quad + (AS - OQ)\int xzdM \\ +ab.OQ.\ \text{Vis } O\Phi \\ +ab.AS.\ \text{Vis } A\sigma \end{array}\right\} = a\int rrdM.$$

Nunc

Digitized by Google

Nunc igitur etiamsi intervallum KI cum integralibus $\int xyd$M et $\int xzd$M evanescat, tamen infinitae habentur vires finitae et in distantiis finitis applicatae, quae quaesito satisfaciant.

SCHOLION. 2.

395. In hac generali solutione quatuor relinquuntur vires $O\pi$, $O\varphi$, $A\varrho$ et $A\sigma$ arbitrio nostro, axi in punctis O et A secundum binas directiones OB et OC applicandae; deinde etiam quaternarum reliquarum virium Pp, Qq, Rr, et Ss distantiae ab axe OP, OQ, AR et AS pro lubitu assumi possunt, dummodo quantitas ab ita definiatur, ut sit

$$ab = \frac{a\int rrdM - Ma.KI.OP + (OP - AR)\int xydM + (OQ - AS)\int xzdM}{OP.\ vis\ O\pi + OQ.\ vis\ O\varphi + AR.\ vis\ A\varrho + AS.\ vis\ A\sigma}$$

Quo valore invento vires hae posteriores ita determinantur, ut sit

$$\text{vis } Pp = \text{vi } O\pi + \frac{Ma.KI - \int xydM}{ab};\quad \text{vis } Rr = \text{vi } A\varrho + \frac{\int xydM}{ab}$$

$$\text{vis } Qq = \text{vi } O\varphi - \frac{\int xzdM}{ab};\quad \text{vis } Ss = \text{vi } A\sigma + \frac{\int xzdM}{ab},$$

quae vires respectu priorum habent directiones oppositas: omnes autem momenta in eundem sensum tendentia praebere assumuntur: eritque momentum totale ex omnibus ortum $= \frac{a\int rrdM}{ab}$, quod supra vocavimus Vf, ex quo motus initium ita definitur, ut tempusculo dt corpus vertatur per angulum $d\omega = \frac{gdt}{b}$. Recordandum est autem, hic a designare intervallum OA, tum vero pro quolibet corporis elemento dM coordinatas directricibus OA, OB, OC parallelas esse x, y, z, quarum prima x a puncto O capiatur: praeterea vero hic planum AOB per centrum inertiae I corporis duximus, ut esset OC ad istud planum normalis.

PROBLEMA. 19.

396. Si corpus rigidum circa axem fixum mobile sollicitetur a viribus quibuscunque, atque ad motum cieatur, definire vires, quas ipsa corporis compages sustinet.

SOLUTIO.

Hic ejusmodi vires invehiri oportet, quae corpori applicatae id quidem in aequilibrio teneant, simul vero compagem ejus aeque afficiant, atque ea in productione motus afficitur. Primo ergo corpus su-

ſtinet vires, quibus actu ſollicitatur, ubi eae partes, quibus ſingulae immediate ſunt applicatae probe notentur: quandoquidem quaelibet vis unicam tantum corporis particulam urget. Deinde ex momento omnium iſtarum virium colligantur vires elementares, quae in ſingulis elementis parem motum gignerent; ac ſingulis elementis his aequales et contrariae applicatae concipiantur, quarum loco hic alias ipſis aequivalentes ut ſupra ſubſtituere non licet, quoniam hunc ipſa rigiditatis ratio exquiritur. Tertio adjiciantur vires, quibus axis actu in quiete ſervatur; atque hi tres virium ordines corpus in perfecto aequilibrio continebunt: ſimulque in compage partium idem plane efficiunt, quod corpus in motus generatione patitur. Hincque intelligitur, quam firmo nexu ſingulae corporis particulae inter ſe colligatae eſſe debeant, ut nulla earum divulſio ſit metuenda: et niſi compages his viribus ſatis reſiſtere valeat, corpus non pro rigido eſſet habendum.

SCHOLION.

397. Hic plus definire non ſuſcipimus, quam quantis viribus ſingulae corporis particulae ſollicitentur, quae eas a nexu cum reliquis avellere conentur; quomodo enim ſtructura corporis huic effectui reſiſtat, hujus loci non eſt inquirere, propterea quod haec ratio rigiditatis cuique corporum generi eſt peculiaris. Ceterum in hoc capite tantum motus initium, qui corpori rigido circa axem fixum mobili a viribus quibuscunque imprimitur, ſumus contemplati, quo facilius ſolus virium effectus a motu jam inſito ſeparatus perſpiceretur. Imprimis autem hinc ad ſequentes inveſtigationes ſubſidia petentur, quando, dum corpus circa quempiam axem gyratur, vires adſunt id circa alium axem convertere conantes; tum enim ex effectu momentaneo circa hunc axem producto judicare licebit, quomodo motus praecedens turbetur. Nunc igitur corpus rigidum in motu circa axem fixum conſiderabimus, et ſcrutabimur, quomodo is a viribus quibuscunque immutari debeat, poſtquam jam demonſtravimus, ejus motum, ſi nullae adeſſent vires ſollicitantes, uniformem eſſe futurum. Praeterea vero vires, quas axis gyrationis interea ſuſtinet, ſollicite erunt perpendendae.

CAPUT

CAPUT IV.

DE PERTURBATIONE MOTUS GYRATORII A VIRIBUS QUIBUSCUNQUE ORTA.

PROBLEMA 20.

398. Si corpus rigidum circa axem fixum gyretur celeritate quacunque angulari, invenire vires elementares, a quibus dato tempusculo motus angularis datam accelerationem adipiscatur.

SOLUTIO.

Sit ω celeritas angularis, qua scilicet, si motus gyratorius esset uniformis, singulis minutis secundis conficeret angulum $= \omega$, tantam autem motus accipere debeat accelerationem, ut elapso tempusculo dt celeritas angularis fiat $= \omega + d\omega$. Consideretur jam corporis elementum quodcunque dM, cujus distantia ab axe gyrationis sit $= r$, ideoque ejus celeritas $= r\omega$, quae, cum distantia r pro eodem elemento maneat constans, tempusculo dt augmentum accipere debet $= rd\omega$. Ad hoc ergo necesse est, ut massula dM secundum directionem motus sollicitetur a vi quapiam, quae si tantisper ponatur $= p$, erit per motus principia supra stabilita $rd\omega = \frac{2gpdt}{dM}$ (202.); unde vis huic elemento applicanda fit $p = \frac{rdM}{2g} \cdot \frac{d\omega}{dt}$. Singula ergo corporis elementa secundum ipsam motus sui directionem sollicitari debent a viribus $= \frac{d\omega}{2gdt} \cdot rdM$, ubi dM exprimit massam cujusque elementi, et r ejus distantiam ab axe. Atque hae sunt vires elementares, quae singula corporis elementa sollicitantes motum gyratorium ita accelerant, ut celeritas angularis ω tempusculo dt accipiat augmentum $d\omega$.

COROLL. 1.

399. Cum $\frac{d\omega}{2gdt}$ pro omnibus elementis corporis eundem valorem retineat, vires elementares sunt in ratione composita massarum earumque distantiarum ab axe gyrationis. Singulae autem hae vires sin-

gulis elementis secundum ipsam motus directionem applicatae sunt intelligendae.

COROLL. 2.

400. Quia harum virium nulla obstat, quominus reliquae effectum suum plenum producant, perinde ac si singulae particulae a se invicem essent dissolutae, ab his viribus elementaribus neque compages corporis neque axis gyrationis afficitur.

COROLL. 3.

401. Compages igitur partium atque axis gyrationis nullas alias vires sustinent, nisi quae ex motu gyratorio ipso nascuntur, quaeque hoc tempusculo perinde se habebunt, ac si motus gyratorius esset uniformis.

SCHOLION.

402. Etsi autem vires elementares per se axem gyrationis non afficiunt, sed quasi totae in motu singulorum elementorum accelerando consumuntur, tamen quatenus ab iis motus gyratorius rapidior redditur, eatenus ob auctam vim centrifugam vires, quas axis sustinet, fiunt majores. Verum hic effectus primo instanti est infinite parvus, atque axis aliter non afficitur, ac si motus gyratorius esset uniformis. Scilicet cum celeritas angularis sit $= \omega$, quaelibet particula, cujus massa $= dM$ et distantia ab axe $= r$, ab axe recedere conatur vi $= \frac{\omega\omega r dM}{2g}$.

Fig. 32. Ab omnibus autem istis viribus per §. 338. axis OA conjunctim ita afficitur, ut in subsidium vocatis binis directricibus OB et OC invicem et ad axem OA normalibus, quibus pro elemento dM in Z sito parallelae capiantur coordinatae $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, axis in punctis E et F sustineat duas vires Ee et Ff, quarum illa directrici OB haec vero ipsi OC sit parallela; ita ut sit

$$OE = \frac{\int xy\,dM}{\int y\,dM} \text{ et vis } Ee = \frac{\omega\omega}{2g}\int y\,dM$$

$$OF = \frac{\int xz\,dM}{\int z\,dM} \text{ et vis } Ff = \frac{\omega\omega}{2g}\int z\,dM$$

Vel harum loco in datis duobus punctis O et A binae aequivalentes Ob. Oc et $A\zeta$, $A\gamma$ applicatae concipi possunt, quae ex §. 343. erunt, posito intervallo $OA = a$,

vis

Digitized by Google

vis $Ob = \frac{\omega\omega}{2ag}(a\int yzdM - \int xyzdM)$; vis $AC = \frac{\omega\omega}{2ag}\int xyzdM$

vis $Oc = \frac{\omega\omega}{2ag}(a\int zzdM - \int xzzdM)$; vis $Ay = \frac{\omega\omega}{2ag}\int xzzdM$.

Ex quibus formulis colligitur, quantas vires axis ob solum motum gyratorium sustineat.

PROBLEMA. 21.

403. Si dum corpus rigidum circa axem fixum gyratur, singulae ejus particulae secundum ipsam motus sui directionem sollicitentur viribus, quae sint in ratione composita massarum et distantiarum ab axe, definire incrementum celeritatis angularis dato tempusculo productum.

SOLUTIO.

Posita celeritate angulari $= \omega$, qua corpus nunc gyratur, consideremus particulam corporis quamcunque, cujus massa sit $= dM$ et distantia ab axe $= r$. Haec ergo particula secundum motus sui directionem sollicitatur vi, quae est ut rdM: ponatur ergo ea $= \frac{rdM}{b}$, ubi b sit linea pro omnibus corporis elementis hocque instanti eadem. Iam cum hujus elementi celeritas sit $= r\omega$, pro eaque sit r quantitas constans, si hoc elementum extra nexum cum reliquis versaretur, foret $rd\omega = 2g.\frac{rdM}{b}.dt$: $dM = \frac{2grdt}{b}$, incrementum scilicet celeritatis tempusculo dt productum. Hinc ergo pro celeritate angulari ω fiet $d\omega = \frac{2gdt}{b}$: quare cum ex omnibus elementis eadem celeritatis angularis acceleratio oriatur, ea sibi mutuo nulli sunt impedimento, sed singula elementa suas acceleraciones aeque recipient, ac si a reliquis essent soluta. Hinc ab istis viribus, quae cum elementaribus in praec. probl. definitis conveniunt, motus gyratorius totius corporis rigidi ita acceleratur, ut tempusculo dt celeritas angularis ω incrementum capiat $d\omega = \frac{2gdt}{b}$.

COROLL. 1.

404. Incrementum ergo celeritatis angularis $d\omega$ non pendet ab ipsa celeritate angulari ω, quae sive major fuerit sive minor, ab iisdem viribus eodem tempusculo idem incrementum adipiscitur.

CO-

Digitized by Google

COROLL. 2.

405. Quia quaelibet vis elementaris $\frac{rdM}{b}$ est ad distantiam ab axe r normalis in plano ad axem normali, ejus momentum respectu axis est $= \frac{rrdM}{b}$, ideoque summa omnium momentorum $= \frac{1}{b} \int rrdM$.

COROLL. 3.

406. Si corpus praeter has vires elementares ab aliis urgeretur in sensum contrarium, quarum momentum respectu axis ibidem esset $= \frac{1}{b} \int rrdM$, ab his illarum effectus destrueretur, motusque nullam reciperet accelerationem.

SCHOLION.

407. De his viribus, quas *elementares* voco, quoniam in singulis elementis mutationem status, quam subeunt, producunt, id praesertim observandum est, quod ab iis axis nullam vim patiatur; propterea quod ab iis singula elementa perinde, ac si a se invicem essent dissoluta, afficiuntur. Quanquam autem hujusmodi vires vix in mundo existunt, tamen ab iis exordiendum erat, ut aliarum quarumcunque virium effectus in motu gyratorio perturbando definire possemus. Si enim aliae vires, quaecunque fuerint, respectu axis gyrationis aequale momentum habeant, eae etiam eandem motus accelerationem producere debent; quoniam si contrario modo essent applicatae, cum elementaribus in aequilibrio forent. Haec autem convenientia tantum de motus mutatione est intelligenda: nam longe aliter res se habebit, cum vires, quas axis gyrationis sustinet, determinari debebunt. Verum etiam haec determinatio ope virium elementarium facile expedietur, quemadmodum jam in capite praecedente est ostensum.

PROBLEMA. 22.

408. Si corpus rigidum, dum circa axem fixum gyratur, sollicitetur a viribus quibuscunque, definire mutationem momentaneam in motu gyratorio ab iis productam.

SOLUTIO.

Sit ut hactenus ω celeritas angularis, qua corpus jam gyratur; tum quaerantur singularum virium sollicitantium momenta, quae collecta

lecta praebeant summam $= Vf$, quae tendet motum gyratorium vel accelerare vel retardare, prout in eundem sensum vergat, vel in contrarium. Sumamus autem hoc momentum ad accelerationem tendere, quia si contrarium eveniret, ipsum momentum tanquam negativum spectari posset. Quaeritur ergo, quantum incrementum celeritas angularis ω tempusculo dt sit accepturum? Dabuntur autem utique vires elementares, quae par incrementum essent productura. Sit igitur pro elemento dM ad distantiam r ab axe fito vis elementaris $= \frac{rdM}{b}$, cujus momentum cum sit $= \frac{rrdM}{b}$, effectus harum virium in motu gyratorio turbando illi, qui a momento Vf producitur, erit aequalis, si summa omnium illorum momentorum $\frac{1}{b} \int rrdM$ fuerit momento Vf aequalis, unde fit $b = \frac{\int rrdM}{Vf}$. At ex viribus elementaribus $\frac{rdM}{b}$ oritur motus gyratorii acceleratio $d\omega = \frac{2gdt}{b}$ tempusculo dt. Quare pro b substituto valore modo invento, incrementum celeritatis angularis ω a virium momento Vf tempusculo dt productum erit $d\omega = \frac{2Vfgdt}{\int rrdM}$, ubi $\int rrdM$ est quantitas constans a figura et indole corporis pendens.

COROLL. 1.

409. Incrementum ergo celeritatis angularis $d\omega$ proportionale est directe momento virium sollicitantium Vf et tempusculo dt, reciproce autem illi quantitati, quae oritur, si singula corporis elementa per quadrata distantiarum suarum ab axe gyrationis multiplicentur, et in unam summam colligantur.

COROLL. 2.

410. Si corpus adhuc motu gyratorio confecerit angulum $= \Phi$, erit nunc $\frac{d\Phi}{dt}$ celeritas angularis ω, ideoque sumto elemento temporis dt constante, erit $dd\Phi = \frac{2Vfgdt^2}{\int rrdM}$.

COROLL. 3.

411. Sin autem loco tempusculi dt angulum elementarem $d\Phi$ interea confectum in calculum introducere velimus, ob $dt = \frac{d\Phi}{\omega}$, habebimus

bebimus hanc formulam $\gamma d\gamma = \frac{2Vfgd\varphi}{\int rrdM}$, qua incrementum quadrati celeritatis angularis definitur.

SCHOLION.

412. Quod ſi ergo ad quodvis tempus noverimus vires quibus corpus ſollicitatur, quarum momentum elapſo tempore t ſit $= Vf$, ope formulae inventae ſi integretur, totus motus gyratorius determinari poterit. Ubi quidem obſervandum eſt, ſi vel nullae affuerint vires, vel eae nullum praebeant momentum reſpectu axis gyrationis, motum futurum eſſe aequabilem, dum axis has vires totas ſuſtineat. Mutatio ſcilicet motus tantum a momento virium pendet, eique adeo eſt proportionalis: Verum videamus etiam, quantas vires ipſe axis ſuſtineat, dum motus corporis a viribus quibuscunque perturbatur: quae inveſtigatio ex iis, quae in capite praecedente ſunt expoſita, facile inſtituetur. Exempla autem talis motus gyratorii a viribus perturbati inferius afferemus, ubi corpora a gravitate animari aſſumemus.

PROBLEMA. 23.

413. Si corpus rigidum, dum circa axem fixum gyratur, a viribus quibuscunque ſollicitetur, definire vires, quas axis in datis duobus punctis O et A ſuſtineat, et quibus reſiſtere debet, ne vacillet.

SOLUTIO.

Ex praecedentibus perſpicitur, axem triplicis generis vires ſuſtinere, primo ſcilicet vires, quibus corpus actu ſollicitatur, ſecundo vires aequales et contrarias viribus elementaribus idem momentum producentibus, ac tertio vires centrifugas ex motu gyratorio natas. Has ergo triplices vires ad data duo axis puncta O et A revocari oportet.

Fig. 44. Quod ergo ad vires corpus actu ſollicitantes attinet, quaelibet earum, niſi ejus directio ſit in plano ad axem normali, reſolvatur in duas VQ et Vv, quarum illa VQ ſit axi OA parallela, altera vero Vv in plano ad axem normali, axem in T ſecante. Iam ob vim VQ axis primo ſuſtinet vim aequalem ſecundum ſuam longitudinem OA: praeterea vero in O et A vires Op et Aq ad axem normales in ipſo plano OAQP, quarum illa Op verſus PQ eſt directa, haec vero Aq inde averſa; ambae autem hae vires ſunt aequales et $Op = Aq = \frac{VT}{OA}$. vis VQ. Deinde

Deinde vis Vv pro punctis O et A praebet vires Or et As ipsi parallelas, quae sunt

$$\text{vis } Or = \frac{AT}{OA} \cdot \text{vis } Vv, \text{ et vis } As = \frac{OT}{OA} \cdot \text{vis } Vv.$$

Hocque modo singulae vires corpus sollicitantes ad axem ejusque terminos O et A reducantur.

Pro viribus secundi generis, quae elementaribus sunt contrariae, §. 385. secuti, sumamus in O duas directrices OB et OC inter se et ad axem OA normales, quibus etiam in A parallelae constituantur AE et AF, et pro corporis elemento dM in Z sito ponamus coordinatas $OX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$, ut sit ejus distantia ab axe $XZ = r = \sqrt{(yy + zz)}$. Porro sit omnium virium sollicitantium momentum $= Vf$ in sensum $Z\zeta$ tendens. Fig. 45.

Hinc igitur vidimus, pro utroque termino O et A geminas oriri vires, scilicet posito intervallo $OA = a$ pro termino O

$$\text{vim secundum } OB = \frac{Vff(a-x)z\,dM}{a\int r r\,dM}$$

$$\text{vim secundum } Oc = \frac{Vff(a-x)y\,dM}{a\int r r\,dM},$$

at pro altero termino A

$$\text{vim secundum } AE = \frac{Vff x z\,dM}{a\int r r\,dM}$$

$$\text{vim secundum } Af = \frac{Vff x y\,dM}{a\int r r\,dM},$$

ubi Oa et Af sunt rectae OC et OF in contrariam plagam productae.

Pro viribus tertii generis, ex ipso motu gyratorio natis, ante §. 402. vidimus, cujusmodi vires inde ad utrumque terminum O et A redundent. Scilicet si celeritas angularis sit $= \omega$, manentibus denominationibus modo adhibitis pro termino O habentur hae duae vires:

$$\text{vis secundum } OB = \frac{\omega\omega\int(a-x)y\,dM}{2ag}$$

$$\text{vis secundum } OC = \frac{\omega\omega\int(a-x)z\,dM}{2ag},$$

similique modo pro termino altero A

$$\text{vis secundum } AE = \frac{\omega\omega\int x y\,dM}{2ag}$$

$$\text{vis secundum } AF = \frac{\omega\omega\int x z\,dM}{2ag}.$$

Colligendis ergo omnibus his viribus pro utroque termino O et A habebuntur vires, quas axis in his punctis sustinet.

COROLL. 1.

414. Quia vires tertii generis quadratum celeritatis angularis involvunt, eaedem manent, sive γ sit positiva sive negativa, hoc est sive a viribus sollicitantibus acceleretur, sive retardetur.

COROLL. 2.

415. Omnes vires utrumque axis terminum sollicitantes, quotcunque fuerint, facile ad unam reduci possunt, ita ut uterque terminus ab unica tantum vi urgeatur; atque ad axem retinendum necesse est, ut in his terminis a viribus aequalibus et contrariis sustentetur.

COROLL. 3.

416. Si planum AOB ita capiatur, ut per centrum inertiae corporis I transeat, erit $\int z dM = 0$, et $\int y dM = M.GI$ denotante M massam totius corporis; ex quo superiores formulae aliquanto simpliciores evadent.

SCHOLION.

417. Fundamentum hujus solutionis in superioribus jam abunde est explicatum, unde in singulis rationibus afferendis minus fui sollicitus. Cum enim, si corpus a solis viribus elementaribus sollicitetur, ab iis axis neutiquam afficiatur, sed solas vires centrifugas patiatur; quando ab aliis viribus quibuscunque sollicitatur, primo axis ab iis perinde afficietur, ac si corpus quieverit, ideoque eas ipsas vires sustinebit, quas jam capite praecedente determinavimus. Praeterea vero ob vires centrifugas eas patietur vires, quas tertio genere hic sumus complexi, ita ut hoc problema non discrepet a problemate 17, nisi quod hic vires tertii generis sint super addendae.

PROBLEMA. 24.

418. Si corpus rigidum, dum circa axem fixum gyratur, a viribus quibuscunque sollicitetur, definire vires, quas totius corporis compages sustinet.

SOLUTIO.

Quaeritur ergo, a quibusnam viribus corpus, si esset in quiete, sollicitari deberet, ut ejus compages perinde afficeretur, atque in statu motus,

Digitized by Google

motus, quem hic conſideramus. Primum ergo corpori eaedem vires ſunt applicandae, quibus actu ſollicitatur, atque adeo in iisdem punctis, quia hic cardo rei in locis, quibus quaeque vires ſunt applicatae, verſatur. Secundo ſingulis elementis corporis vires aequales et contrariae viribus elementaribus applicari debent. Scilicet ſi momentum omnium virium ad motum accelerandum fuerit $= Vf$, tum elemento dM ad diſtantiam $= r$ ab axe remoto ſecundum directionem motui ejus contrariam applicata concipiatur vis $= \frac{Vfrd M}{\int rrdM}$. Tertio ſi celeritas angularis ſit $= \omega$, ob motum gyratorium elemento illi quoque applicata concipiatur vis $= \frac{\omega\omega rdM}{2g}$, qua directe ab axe avellatur. Quarto axi applicentur ipſae illae vires, quae ad ejus ſuſtentationem requiruntur, et quae in problemate praecedente ſunt aſſignatae. Cunctae jam iſtae vires corpori applicatae ſe mutuo in aequilibrio ſervabunt, et ſingulas ejus partes aeque ſollicitabunt, ac ſit in motu propoſito. Hincque ergo concludi poterit, quam firmiter omnia corporis elementa inter ſe cohaerere debeant, ne ab illis viribus ulla diſſolutio aut laxatio producatur, ſed corpus figuram ſuam intemeratam conſervet.

COROLL. 1.

419. Si nexus partium debilior fuerit, quam ut actioni harum virium, quas modo definivimus, reſiſtere valeat, quoniam figura corporis revera mutationem patietur, id ratione motus non pro rigido erit habendum.

COROLL. 2.

420. Aſſumimus ergo conſtanter omnes corporis particulas tam arcte inter ſe eſſe connexas, ut vires memoratas ſine ulla relaxatione aut figurae mutatione ſuſtinere valeant.

SCHOLION.

421. Haec igitur ſunt capita praecipua, ad quae omnes quaeſtiones de motu gyratorio corporum rigidorum circa axem fixum a viribus quibuscunque perturbato reduci poſſunt: praeter ipſam enim motus acceleration em vel retardationem definivimus, quantas vires cum axis gyrationis tum ipſa corporis compages ſuſtineat. Formulae autem, quas pro his determinationibus invenimus, quasdam involvunt formulas integrales, ſcilicet $\int ydM$, $\int zdM$, $\int xydM$, $\int xzdM$ et $\int rrdM$, quae autem

autem non tanquam quantitates variabiles seu indefinitae sunt spectandae; sed haec integralia per totam corporis molem extensa sunt intelligenda, ita ut obtineant valores constantes ac determinatos ab indole ac forma cujusque corporis pendentes. Ac binarum quidem priorum valores ex situ centri inertiae definiri vidimus: reliquarum vero valores ex natura corporis per notas integrationis regulas erui debent. Postrema autem imprimis est notatu digna, cum sola in accelerationem vel retardationem ingrediatur, dum reliquae tantum in expressionibus, quae vires ab axe sustentatas indicant, insunt. Cum igitur hic quaestio de ipsa motus perturbatione sit praecipua, operae pretium erit, valores formulae $frrdM$ pro variis corporum generibus evolvere, ac praecepta tradere, unde illi quovis casu facilius colligi queant: meretur autem haec formula utique, ut ei nomen singulare *momenti inertiae* imponamus, cujus investigationi caput sequens destinamus.

CAPUT V.

DE MOMENTO INERTIAE.

DEFINITIO. 7.

422. ***Momentum inertiae*** corporis respectu cujuspiam axis est summa omnium productorum, quae oriuntur, si singula corporis elementa per quadrata distantiarum suarum ab axe multiplicentur.

COROLL. 1.

423. Quoniam tam elementa corporis, quam quadrata distantiarum semper sunt positiva, omnia haec producta positiva sunt necesse est: hinc aucta corporis massa certe ejus momentum inertiae augetur.

COROLL. 2.

424. Momentum ergo inertiae spectari potest tanquam productum ex massa corporis in quadratum cujuspiam lineae: ita si massa corporis fuerit $= M$, ejus momentum respectu cujusvis axis habebit hujusmodi formam Mkk.

COROLL. 3.

425. Invento ergo momento inertiae corporis respectu axis, circa quem id ante gyrari assumsimus, idque fuerit $= Mkk$, in formulis supra inventis

Digitized by Google

Inventis loco expressionis $\int rrdM$ scribi conveniet Mkk. Ita si momentum virium sollicitantium sit Vf, et celeritas angularis $= \omega$, erit $d\omega = \frac{2Vfgdt}{Mkk}$.

EXPLICATIO.

426. Ratio hujus denominationis ex similitudine motus progressivi est desumta: quemadmodum enim in motu progressivo, si a vi secundam suam directionem sollicitante acceleretur, est incrementum celeritatis ut vis sollicitans divisa per massam seu inertiam; ita in motu gyratorio, quoniam loco ipsius vis sollicitantis ejus momentum considerari oportet, eam expressionem $\int rrdM$, quae loco inertiae in calculum ingreditur, *momentum inertiae* appellemus, ut incrementum celeritatis angularis simili modo proportionale fiat momento vis sollicitantis diviso per momentum inertiae. Quae similitudo eo est perfectior, quod utrinque per elementum temporis dt et duplam lineam $2g$ multiplicari oporteat, ut ipsum celeritatis incrementum exprimatur.

SCHOLION.

427. Cum idem corpus ad infinitos axes referri possit, respectu cujuslibet peculiare habebit momentum inertiae, ex quo momentum inertiae absolute definiri nequit, nisi ad determinatum axem referatur. Interim tamen non semper opus est, si ejusdem corporis momentum inertiae successive respectu plurium axium investigari debeat, ut calculus de novo ex formula $\int rrdM$ evolvatur: sed saepe evenit, ut cum momentum inertiae respectu unius axis invenerimus, ex eo facile momenta inertiae ejusdem corporis respectu infinitorum aliorum axium colligere queamus. Haec autem commoditas imprimis locum habet, quando axes fuerint paralleli, ita ut cognito momento inertiae pro uno axe, ex eo facile momentum inertiae pro quovis alio axe illi parallelo assignari possit, id quod sequente problemate ostendamus.

PROBLEMA. 25.

428. Dato corporis cujusdam momento inertiae respectu axis OA, invenire ejusdem corporis momentum inertiae respectu alius axis *oa* illi paralleli. Fig. 46.

SOLUTIO.

Sit $Oo = c$ distantia horum axium, in quorum plano accipiatur directrix OB ad OA normalis, et tertia OC ad utramque perpendicularis. Conside-

Digitized by Google

Consideretur corporis, cujus tota massa = M, elementum quodvis dM in Z, unde ad planum AOB demisso perpendiculo ZY et ex Y ducta ad OA normaliter YX, quae producta alteri axi oa occurrat in x: ponanturque pro axe dato OA coordinatae $OX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$. Quoniam igitur respectu hujus axis OA momentum inertiae datur, sit id = Mkk, eritque $\int (yy + zz)\, dM = Mkk$. Iam pro novo axe oa, ob $ox = x$, $xY = c + y$ et $YZ = z$, erit momentum inertiae = $\int ((c+y)^2 + zz)\, dM = \int cc dM + 2\int cy dM + \int (yy + zz)\, dM$. Cum igitur sit $\int (yy + zz)\, dM = Mkk$, et $\int cc dM = Mcc$, pro menbro $2\int cy dM = 2c\int y dM$ consideretur centrum inertiae corporis, quod sit in I, unde ad planum axium demittatur perpendiculum IK, et ex K ad axes normalis KGg, eritque $\int y dM = M.GK$. Hinc erit momentum inertiae respectu axis $oa = Mkk + Mcc + 2Mc.GK$, quod ob $Gg = c$, et $cc + 2c.GK = gK^2 - GK^2$, ita exprimetur, ut sit

$$Mkk + M.gK^2 - M.GK^2,$$

sicque cognito momento inertiae respectu axis OA, quod est = Mkk, facile invenitur momentum inertiae respectu alius cujusque axis oa illi paralleli.

COROLL. 1.

429. Si axis oa longius distat a centro inertiae I, quam axis OA, momentum inertiae respectu axis oa majus est, quam respectu axis OA. Est enim momentum inertiae respectu axis $oa = Mkk + M.gI^2 - M.GI^2$.

COROLL. 2.

430. Si igitur infiniti axes inter se paralleli concipiantur, momentum inertiae erit minimum respectu ejus axis, qui per ipsum centrum inertiae ducitur. Scilicet si centrum inertiae esset in G, axisque OA per id transiret, cujus respectu momentum inertiae fuerit = Mkk, erit respectu axis oa momentum inertiae = $Mkk + M.Gg^2$.

COROLL. 3.

431. Si igitur detur momentum inertiae Mkk respectu cujuspiam axis per centrum inertiae corporis transeuntis, momentum inertiae respectu alius cujusvis axis illi paralleli superat illud producto ex massa in quadratum distantiae hujus axis a centro inertiae.

SCHOLION.

432. Hinc investigatio momentorum inertiae pro quovis corpore restringitur tantum ad axes per ejus centrum inertiae ductos, quorum respe-

Digitized by Google

respectu si explorata fuerint momenta inertiae, inde pro aliis quibuscunque axibus momenta inertiae facile colliguntur. Atque haec proprietas centri inertiae, quod momenta inertiae respectu axium per id transeuntium sint minima, inter omnia respectu aliorum axium parallelorum sumta, omnino est memorabilis, cum etiam pro motu gyratorio insignem hujus centri praestantiam declaret. Verum per centrum inertiae innumerabiles axes ducere licet, quorum respectu momenta inertiae vehementer inter se discrepare possunt, neque patet, quomodo ex datis aliquibus reliqua definiri queant. Interim tamen, quoniam eorum nullum vel evanescere vel in infinitum excrescere potest, inter ea tam maximum detur quam minimum necesse est, quae investigatio omnino digna videtur, ut diligentius suscipiatur. Sed quo ea facilius succedat, conveniet in genere momentum inertiae respectu axis cujuscunque per centrum inertiae ducti calculo exprimi.

PROBLEMA. 26.

433. Si natura corporis exprimatur aequatione inter ternas coordinatas, invenire ejus momentum inertiae respectu axis cujuscunque per centrum inertiae ducti.

SOLUTIO.

Sit I centrum inertiae corporis, in quo simul concursus ternarum directricium IA, IB, IC inter se normalium constituatur, quibus pro elemento corporis quocunque dM in Z sito coordinatae parallelae sint $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, unde si qua directricium pro axe sumeretur, ejus respectu momentum inertiae facile assignaretur. Verum id definiendum sit respectu axis cujuscunque IG, per quem planum ad AIB normale ductum hoc secet in recta IF, ac ponatur angulus $AIF = \eta$ et angulus $FIG = \theta$; quaestio ergo huc redit, ut punctum Z per alias ternas coordinatas exprimatur, quarum una sit in ipso axe IG sumta. Mutemus ternas directrices primo ita, ut una sit IF, manente IC, dum tertia ad has sit normalis, et ducta YX' ad IF normali erunt ternae coordinatae, quae sint x', y', z', Fig. 47.

$IX' = x' = x\cos\eta + y\sin\eta$; $X'Y = y' = y\cos\eta - x\sin\eta$; et $YZ = z' = z$.

simili modo hinc transitus fiat ad novas ternas coordinatas x'', y'', z'', quarum x'' in axe IG capiatur eritque

$$x'' = x'\cos\theta + z'\sin\theta\,;\quad z'' = z'\cos\theta - x'\sin\theta\,;\quad y'' = y'$$

unde valoribus substitutis habebitur

Digitized by Google

$$x'' = x\cos\eta\cos\theta + y\sin\eta\cos\theta + z\sin\theta$$
$$y'' = y\cos\eta - x\sin\eta\,;\ \text{et}\ z'' = z\cos\theta - x\cos\eta\sin\theta - y\sin\eta\sin\theta$$

Atque hinc puncti Z ab axe IG distantiae quadratum prodibit $y''y'' + z''z'' =$

$$x^2\sin\eta^2 + y^2\cos\eta^2 + z^2\cos\theta^2 - 2xy\sin\eta\cos\eta - 2xz\cos\eta\sin\theta\cos\theta - 2yz\sin\eta\sin\theta\cos\theta + x^2\cos\eta^2\sin\theta^2 + y^2\sin\eta^2\sin\theta^2 + 2xy\sin\eta\cos\eta\sin\theta^2$$

Ponamus jam sequentia integralia per totum corpus extensa:

$$\int xx\,dM = A\,;\ \int yy\,dM = B\,;\ \int zz\,dM = C$$
$$\int xy\,dM = D\,;\ \int xz\,dM = E\,;\ \int yz\,dM = F,$$

eritque momentum inertiae respectu axis IG quaesitum

$$A(\sin\eta^2 + \cos\eta^2\sin\theta^2) + B(\cos\eta^2 + \sin\eta^2\sin\theta^2) + C\cos\theta^2 - 2D\sin\eta\cos\eta\cos\theta^2 - 2E\cos\eta\sin\theta\cos\theta - 2F\sin\eta\sin\theta\cos\theta.$$

COROLL. 1.

434. Hic quantitates A, B, C necessario sunt quantitates positivae, reliquae vero D, E, F pro ratione corporis vel positivae vel negativae esse possunt.

COROLL. 2.

435. Momentum inertiae respectu axis IA est $= B + C$; respectu axis IB $= A + C$, et respectu axis IC $= A + B$: Cognitis ergo his tribus momentis innotescunt valores A, B, et C.

COROLL. 3.

436. Quomodocunque autem accipiantur anguli η et θ, momentum inertiae inventum nunquam evanescere potest, sed semper valorem positivum obtinet.

SCHOLION.

437. Si non solum motum corporis circa axem IG, sed etiam vires ab axe sustentatas determinare velimus, praeter momentum inertiae respectu hujus axis quoque valores formularum integralium $\int x''y''dM$ et $\int x''z''dM$ nosse debemus. Fiunt autem istae formulae per coordinatas x, y, z;

$$\int x''y''dM = \int dM(x\cos\eta\cos\theta + y\sin\eta\cos\theta + z\sin\theta)(y\cos\eta - x\sin\eta)\ \text{et}$$
$$\int x''z''dM = \int dM(x\cos\eta\cos\theta + y\sin\eta\cos\theta + z\sin\theta)(-x\cos\eta\sin\theta - y\sin\eta\sin\theta + z\cos\theta)$$

Quare si hic valores supra assumti substituantur, habebimus

$\int x''y''dM$

Digitized by Google

$$\int x''y''dM = -A\int\eta\cos\eta\cos\theta + B\int\eta\cos\eta\cos\theta + D(\cos\eta^2 - \int\eta^2)\cos\theta - E\int\eta\int\theta + F\cos\eta\int\theta$$

$$\int x''z''dM = -A\cos\eta^2\int\theta\cos\theta - B\int\eta^2\int\theta\cos\theta + C\int\theta\cos\theta - 2D\int\eta\cos\eta\int\theta\cos\theta + E\cos\eta(\cos\theta^2 - \int\theta^2) + F\int\eta(\cos\theta^2 - \int\theta^2)$$

qui valores sunt eo magis notandi, quod casibus, quibus momentum inertiae fit maximum vel minimum, evanescunt, uti mox videbimus.

PROBLEMA. 27.

438. Inter omnes axes per centrum inertiae dati corporis ductos definire eum, cujus respectu momentum inertiae est vel maximum vel minimum.

SOLUTIO.

Maneant omnia, uti in problemate praecedente, sitque IG axis talis quaesitus, ita ut determinari oporteat angulos AIF $= \eta$ et FIG $= \theta$. Momentum ergo inertiae respectu hujus axis cum sit $\int(y''y'' + z''z'')dM =$

$$A\int\eta^2 + A\cos\eta^2\int\theta^2 + B\cos\eta^2 + B\int\eta^2\int\theta^2 + C\cos\theta^2 - 2D\int\eta\cos\eta\cos\theta^2 - 2E\cos\eta\int\theta\cos\theta - 2F\int\eta\int\theta\cos\theta$$

differentietur duplici modo, sumendo primum η deinde θ variabile, et utrumque differentiale nihilo aequale ponatur. Ex priore igitur prodibit haec aequatio

$$2A\int\eta\cos\eta\cos\theta^2 - 2B\int\eta\cos\eta\cos\theta^2 - 2D\cos\eta^2\cos\theta^2 + 2D\int\eta^2\cos\theta^2 + 2E\int\eta\int\theta\cos\theta - 2F\cos\eta\int\theta\cos\theta = 0$$

quae per $-2\cos\theta$ divisa praebet

$$-(A-B)\int\eta\cos\eta\cos\theta + D(\cos\eta^2 - \int\eta^2)\cos\theta - E\int\eta\int\theta + F\cos\eta\int\theta = 0$$

sive $\int x''y''dM = 0$; unde colligitur

$$\frac{\int\theta}{\cos\theta} = tang\,\theta = \frac{-(A-B)\int\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \int\eta^2)}{E\int\eta - F\cos\eta}.$$

Sumendo autem θ variabile pervenimus ad hanc aequationem;

$$2A\cos\eta^2\int\theta\cos\theta + 2B\int\eta^2\int\theta\cos\theta - 2C\int\theta\cos\theta + 4D\int\eta\cos\eta\int\theta\cos\theta - 2E\cos\eta(\cos\theta^2 - \int\theta^2) - 2F\int\eta(\cos\theta^2 - \int\theta^2) = 0$$

quae formula est $= -2\int x''z''dM$. Cum nunc sit

$2\int\theta\cos\theta = \int 2\theta$ et $\cos\theta^2 - \int\theta^2 = \cos 2\theta$ erit

$$A\cos\eta^2\int 2\theta + B\int\eta^2\int 2\theta - C\int 2\theta + 2D\int\eta\cos\eta\int 2\theta - 2E\cos\eta\cos 2\theta - F\int\eta\cos 2\theta = 0$$

Digitized by Google

unde sequitur

$$\frac{\int 2\theta}{\cos 2\theta} = tang\, 2\theta = \frac{2E\cos\eta + 2F\int\eta}{A\cos\eta^2 + B\int\eta^2 - C + 2D\int\eta\cos\eta}.$$

Verum ex superiori ob $tang\, 2\theta = \frac{2tang\,\theta}{1 - tang\,\theta^2}$ habetur:

$$tang\, 2\theta = \frac{2(E\int\eta - F\cos\eta)\left((B-A)\int\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \int\eta^2)\right)}{(E\int\eta - F\cos\eta)^2 - \left((B-A)\int\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \int\eta^2)\right)^2}$$

quibus valoribus coaequatis erit

$$\begin{aligned}(E\cos\eta + F\int\eta)(E\int\eta - F\cos\eta)^2 &= (E\cos\eta + F\int\eta)\left((B-A)\int\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \int\eta^2)\right)^2 \\ &+ (E\int\eta - F\cos\eta)\left((B-A)\int\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \int\eta^2)\right)(A\cos\eta^2 + B\int\eta^2 - C + 2D\int\eta\cos\eta) \\ &= \left((B-A)\int\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \int\eta^2)\right)(E(B\int\eta - C\int\eta + D\cos\eta) \\ &- F(A\cos\eta - C\cos\eta + D\int\eta))\end{aligned}$$

Cum jam $\int\eta$ et $\cos\eta$ ubique totidem compleant dimensiones, si ponamus $\frac{\int\eta}{\cos\eta} = tang\,\eta = t$, obtinebimus hanc aequationem

$$(E+Ft)(F-Et)^2 = (D + (B-A)t - Dtt)(DE - AF + CF + (BE - CE - DF)t)$$

quae in ordinem redacta dat

$$\begin{aligned}0 &= EFF - DDE + (A-C)DF \\ &+ t(F^3 - 2EEF + DDF + (A - 2B + C)DE - (A-B)(A-C)F) \\ &+ t^2(E^3 - 2EEF + DDE + (B - 2A + C)DF + (A-B)(B-C)E) \\ &+ t^3(EEF - DDF + (B-C)DE)\end{aligned}$$

ita ut ex hac aequatione cubica valor ipsius t erui debeat.

COROLL. 1.

439. Cum aequatio, ex qua valor ipsius t inveniri debet, sit cubica, semper unam certe habet radicem realem, quae praebet tangentem anguli $AIF = \eta$, quo angulo invento alter $FIG = \theta$ ita definitur ut sit

$$tang\,\theta = \frac{(B-A)\int\eta\cos\eta + D(\cos\eta^2 - \int\eta^2)}{E\int\eta - F\cos\eta} = \frac{\frac{1}{2}(B-A)\int 2\eta + D\cos 2\eta}{E\int\eta - F\cos\eta}$$

COROLL. 2.

440. Fieri autem potest, ut omnes tres radices sint reales, quo casu tres in corpore dabuntur axes, quorum respectu momenta inertiae sunt vel maxima vel minima.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION.

441. Ex rei autem natura intelligitur, in quovis corpore plus uno tali axe ineſſe, cujus reſpectu momentum inertiae ſit vel maximum vel minimum; ſi enim unicus daretur, ejus reſpectu momentum eſſet omnium vel maximum vel minimum, utrovis ergo caſu alius daretur axis neceſſe eſt, cujus reſpectu momentum inertiae foret vel minimum vel maximum. Atque hinc concludere licet, aequationem cubicam inventam non ſolum unam, ſed duas habere radices reales, ex quo adeo omnes tres radices ſemper erunt reales, quod quidem difficulter ex ejus forma perſpici poteſt. Verum cognito jam uno tali axe haud difficulter reliqui ejusdem indolis reperiuntur, id quod ſequente problemate oſtendiſſe operae erit pretium.

PROBLEMA 28.

442. Dato uno corporis axe per centrum inertiae transeunte, cujus reſpectu momentum inertiae eſt maximum vel minimum, invenire reliquos ejus axes per centrum inertiae ductos, quibus eadem proprietas conveniat.

SOLUTIO.

Exiſtente I centro inertiae corporis, ſit IA axis ille datus, cujus reſpectu momentum inertiae eſt maximum vel minimum, atque ex praecedente problemate conſtat, hanc proprietatem locum habere non poſſe, niſi ſit $\int xyd\mathrm{M} = 0$ et $\int xzd\mathrm{M} = 0$; quare pro formulis ſuperioribus erit $\mathrm{D} = 0$ et $\mathrm{E} = 0$. Quodſi jam IG alius fuerit ejusmodi axis, pro quo ponatur ut ante angulus $\mathrm{AIF} = \eta$ et $\mathrm{FIG} = \theta$, ut ſit ejus reſpectu momentum inertiae $\mathrm{A}(\int\eta^2 + \cos\eta^2\int\theta^2) + \mathrm{B}(\cos\eta^2 + \int\eta^2\int\theta^2) + \mathrm{C}\cos\theta^2 - 2\mathrm{F}\int\eta\int\theta\cos\theta$, methodus maximorum et minimorum has duas ſuppeditat aequationes:

I. $(\mathrm{A}-\mathrm{B})\int\eta\cos\eta\cos\theta^2 - \mathrm{F}\cos\eta\int\theta\cos\theta = 0$

II. $(\mathrm{A}\cos\eta^2 + \mathrm{B}\int\eta^2)\int\theta\cos\theta - \mathrm{C}\int\theta\cos\theta - \mathrm{F}\int\eta(\cos\theta^2 - \int\theta^2) = 0$.

Quarum prior cum ſit diviſibilis per $\cos\eta\cos\theta$, erit vel $\cos\eta = 0$ vel $\cos\theta = 0$; tertia enim ejus radix $\mathrm{tang}\,\theta = \frac{(A-B)\int\eta}{F}$ in altera aequatione ſubſtituta nihil definit, quoniam angulus η prorſus ex calculo egreditur. Sit ergo $\cos\eta = 0$, ideoque $\eta = \mathrm{AIF}$ rectus, et $\mathrm{fi}\,\eta = 1$; atque altera aequatio praebet:

$$\mathrm{B}\int\theta\cos\theta - \mathrm{C}\int\theta\cos\theta - \mathrm{F}(\cos\theta^2 - \int\theta^2) = 0$$

Digitized by Google

seu $\frac{1}{2}(B-C)\int 2\theta = F\cos 2\theta$ et $tang\, 2\theta = \frac{2F}{B-C}$: unde pro angulo FIG duplex prodit valor, alter FIG $= \theta$, alter FIG $= \theta + 90°$. Sicque ex uno axe IA dato, duo semper novi colliguntur, eadem maximi minimive proprietate gaudentes, qui ergo tres axes respondent tribus radicibus aequationis cubicae ante inventae. Prioris autem aequationis radix $\cos\theta = 0$ nihil plane huc facit, cum enim angulus FIG esset rectus, utcunque angulus AIF $= \eta$ variatur, recta IG eundem situm IC perpetuo servat, neque differentiatio hic locum habet, erit vero ob $\eta = 90°$ momentum inertiae respectu axis IG $= A + B\int\theta^2 + C\cos\theta^2 - 2F\int\theta\cos\theta$, at respectu axis dati IA $= B + C$.

COROLL. 1.

443. Cum igitur sit angulus AIF $= \eta$ rectus, ambo reliqui axes sunt ad IA normales, et quia illi etiam invicem angulum rectum constituunt, in omni corpore tres dantur axes per centrum inertiae I ducti et inter se normales, quorum respectu momenta inertiae sunt vel maxima vel minima.

COROLL. 2.

444. Quodsi ergo ipsae rectae IA, IB et IC fuerint hi tres axes, quorum respectu momenta inertiae sunt vel maxima vel minima, erit $\int xyd\mathrm{M} = D = 0$; $\int xzd\mathrm{M} = E = 0$ et $\int yzd\mathrm{M} = F = 0$.

SCHOLION.

445. In his quidem problematibus sumsimus, punctum I esse corporis centrum inertiae, quoniam calculum momenti inertiae tantum ad ejusmodi axes, qui per corporis centrum inertiae transeunt, adstrinximus : verum in toto calculo utriusque problematis nihil inest, quod naturam centri inertiae cum puncto I conjungat. Quare haec problemata multo latius patent, ita ut sumto quocunque puncto I inter omnes axes per id transeuntes semper tres definiri queant, quorum respectu momenta inertiae sint vel maxima vel minima, atque ut hi tres axes sint inter se normales. Verum hic tantum istam proprietatem tanquam centro inertiae convenientem considero, ac pro quolibet corpore plurimum intererit, hos ternos axes nosse, quoniam ex iis momenta inertiae respectu omnium axium facillime inveniri poterunt.

DEFINI-

Digitized by Google

DEFINITIO. 8.

446. *Axes principales* cujusque corporis sunt tres illi axes per ejus centrum inertiae transeuntes, quorum respectu momenta inertiae sunt vel maxima vel minima.

COROLL. 1.

447. Ex praecedentibus intelligitur, pro quolibet corpore non solum dari tales ternos axes principales, sed eos etiam inter se esse normales: unde ii commodissime pro ternis directricibus, ad quas corpus referatur, accipientur.

COROLL. 2.

448. Quodsi ergo IA, IB, IC fuerint cujuspiam corporis axes principales, iisque pro elemento corporis dM in Z sito parallelae constituantur coordinatae $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, non solum erit $\int xdM = 0$, $\int ydM = 0$, $\int zdM = 0$; sed etiam $\int xydM = 0$, $\int xzdM = 0$, et $\int yzdM = 0$. Fig. 47.

COROLL. 3.

449. Tum vero si ponatur $\int xxdM = A$; $\int yydM = B$; $\int zzdM = C$, erit corporis momentum inertiae respectu axis $IA = B + C$; respectu axis $IB = A + C$, et respectu axis $IC = A + B$, quae sunt maxima vel minima.

SCHOLION.

450. Veritas utique est maximi momenti, quod in omni corpore tales tres axes principales dentur, cujus demonstratio ex praecedentibus utique est manifesta. Sumtis enim ternis directricibus IA, IB, IC utcunque, quae in centro inertiae I se invicem normaliter intersecent, unum ejusmodi axem principalem IG definire docuimus ope resolutionis aequationis cubicae: tum vero cognito uno facili calculo duo reliqui assignantur. Iam vero vix occurret corpus tam irregulare, cujus non saltem unus axis principalis innotescat, ita ut deinceps bini reliqui facillime se prodant. Quare in postremum assumam, in quovis corpore hos ternos axes principales nobis esse cognitos; quorum respectu dummodo momenta inertiae, pro omnibus aliis axibus promptissime exhiberi possunt, uti ex sequente problemate patebit.

EXPLI-

Digitized by Google

EXPLICATIO.

451. Quomodo ratio maximi ac minimi his tribus axibus principalibus conveniat, haud ita facile perſpicitur. Cum enim inter eos certe ſit unus, cujus reſpectu momentum inertiae ſit omnium maximum, itemque unus, cujus reſpectu momentum inertiae ſit omnium minimum; neceſſe eſt, ut reſpectu tertii momentum inertiae ſit neque omnium maximum neque omnium minimum, niſi forte cum alterutro illorum conveniat, quod aliquando fieri poteſt. Verum calculus maximorum et minimorum ſaepenumero ejusmodi quantitates indicit, quae abſolute neque ſint maxima neque minima; quoniam eo calculo plus non declaratur, quam ſi infinite parum ab loco invento receſſeris, neque augmentum neque decrementum prodire. Fig. 47. Ita ſi IA ſit axis maximi abſolute ſumti, et IC axis minimi abſolute ſumti, reſpectu axis IB momentum inertiae neque omnium erit maximum neque minimum, verumtamen ejusmodi medium tenebit, ut ſi alius axis ab eo infinite parum diſtans in quamcunque plagam aſſumatur, ejus momentum inertiae neque creſcat, neque decreſcat. Atque hanc ob rem inter hos tres axes principales ingens diſcrimen intercedit, quod imprimis obſervari meretur, ut eorum unus habeat maximum momentum, unus minimum, tertius vero medium, quod tamen in calculo tanquam maximum vel minimum ſpectari poſſit, cujus rei ratio in ſequenti problemate magis illuſtrabitur.

PROBLEMA 79.

452. Datis cujusdam corporis momentis inertiae reſpectu trium axium principalium, invenire ejus momentum inertiae reſpectu cujusvis axis per ejus centrum inertiae ducti.

SOLUTIO.

Fig. 47. Sint IA, IB, IC tres corporis axes principales, ſibi mutuo in centro inertiae I normaliter occurrentes, et poſita corporis maſſa $= M$, ſit ejus momentum inertiae reſpectu axis $IA = Maa$, reſpectu axis $IB = Mbb$ et reſpectu axis $IC = Mcc$: unde quaeri debeat momentum inertiae reſpectu axis cujuscunque IG, qui ad planum AIB inclinetur angulo $GIF = \theta$, ſitque angulus $AIF = \psi$. Conſideretur nunc elementum corporis dM in Z, cujus puncti coordinatae ſint $IX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$; ac poſitis integralibus $\int xxdM = A$, $\int yydM = B$, $\int zzdM = C$, erit $\int xydM = D = 0$, $\int xzdM = E = 0$, $\int yzdM = F = 0$. Unde ex §. 433. erit momentum inertiae reſpectu axis $IG =$

$$A(\int \eta^2 + cos\psi^2 sin\theta^2) + B(cos\psi^2 + \int \eta^2 sin\theta^2) + C\, cos\theta^2.$$

Cum

Cum autem ex datis ternis momentis ſit

$$Maa = B + C;\ Mbb = A + C;\ Mcc = A + B$$

hinc viciſſim colligitur

$$A = \tfrac{1}{2}M(bb + cc - aa);\ B = \tfrac{1}{2}M(aa + cc - bb);\ C = \tfrac{1}{2}M(aa + bb - cc)$$

quibus valoribus ſubſtitutis erit quaeſitum momentum inertiae reſpectu axis $IG = M(aa\,cof\eta^2\,cof\theta^2 + bb\,ſ\eta^2\,cof\theta^2 + cc\,ſ\theta^2)$. Ubi notetur, eſſe $cof\eta\,cof\theta = cof\,AIG$, $ſ\eta\,cof\theta = cof\,BIG$ et $ſ\theta = cof\,CIG$. Quare ſi diſtantiae axis IG a ternis axibus principalibus ponantur:

$$AIG = \alpha;\ BIG = \mathfrak{G},\ CIG = \gamma$$

erit momentum inertiae reſpectu axis IG =

$$Maa\,cof\alpha^2 + Mbb\,cof\mathfrak{G}^2 + Mcc\,cof\gamma^2$$

illi autem anguli $\alpha, \mathfrak{G}, \gamma$ ita ſunt comparati, ut ſit ſemper $cof\alpha^2 + cof\mathfrak{G}^2 + cof\gamma^2 = 1$.

COROLL. 1.

453. Poſito momento inertiae reſpectu axis $IG = Mkk$, id ſequentibus modis exprimi poteſt:

$$Mkk = Maa - M(aa - bb)\,cof\mathfrak{G}^2 - M(aa - cc)\,cof\gamma^2$$
$$Mkk = Mbb + M(aa - bb)\,cof\alpha^2 - M(bb - cc)\,cof\gamma^2$$
$$Mkk = Mcc + M(aa - cc)\,cof\alpha^2 + M(bb - cc)\,cof\mathfrak{G}^2$$

et in qualibet harum expreſſionum binos angulos pro lubitu aſſumere licet.

COROLL. 2.

454. Si fuerit $aa > bb$ et $bb > cc$, momentum inertiae reſpectu axis IA omnium erit maximum, at reſpectu axis IC omnium erit minimum: medium autem tenebit momentum inertiae reſpectu axis IB.

COROLL. 3.

455. Si fuerit $(aa - bb)\,cof\alpha^2 > (bb - cc)\,cof\gamma^2$, momentum inertiae reſpectu axis IG majus eſt quam medium Mbb, contra vero eſt minus. Sin autem ſit $(aa - bb)\,cof\alpha^2 = (bb - cc)\,cof\gamma^2$, quod infinitis locis fieri poteſt, ibi omnia momenta inertiae ſunt inter ſe aequalia.

COROLL. 4.

456. Si fuerit $aa = bb = cc$, hoc eſt ſi momenta inertiae principalia fuerint inter ſe aequalia, reſpectu omnium axium per centrum inertiae ductorum momenta inertiae ſunt inter ſe aequalia: ideoque quilibet axis pro principali haberi poteſt.

Digitized by Google

SCHOLION.

Fig. 48. 457. Eleganter haec more in trigonometria sphaerica recepto repraesentari possunt. Sint enim constituto centro inertiae I in centro sphaerae, puncta A, B, C extremitates axium principalium in superficie sphaerica terminatae, ita ut arcus AB, AC et BC sint quadrantes; axibusque in A, B, C terminatis respondeant momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc, quorum primum sit maximum, secundum medium, et tertium minimum. Quodsi jam alius axis quicunque per centrum inertiae transiens, qui superficiem sphaericam in puncto S trajiciat, consideretur, ejus respectu momentum inertiae erit:

$$Maa\ cof\ AS^2 + Mbb\ cof\ BS^2 + Mcc\ cof\ CS^2$$

quod ob $cof\ AS^2 + cof\ BS^2 + cof\ CS^2 = 1$, his modis exprimi potest:

$$Maa - M(aa-bb)\,cof\,BS^2 - M(aa-cc)\,cof\,CS^2 \text{ vel}$$
$$Mbb + M(aa-bb)\,cof\,AS^2 - M(bb-cc)\,cof\,CS^2 \text{ vel}$$
$$Mcc + M(aa-cc)\,cof\,AS^2 + M(bb-cc)\,cof\,BS^2.$$

Hinc si S sit in quadrante BC puta in D, erit momentum inertiae respectu axis $ID = M(bb\ cof\ BD^2 + cc\ cof\ CD^2) = Mbb - M(bb-cc)\ cof\ CD^2 = Mcc + M(bb-cc)\ cof\ BD^2$,

seu momentum inertiae respectu axis ID erit:

$$Mbb - M(bb-cc)\,fi\,BD^2 = Mcc + M(bb-cc)\,fi\,CD^2.$$

Simili modo momentum inertiae respectu axis IE est

$$Maa - M(aa-cc)\,fi\,AE^2 = Mcc + M(aa-cc)\,fi\,CE^2;$$

momentum autem inertiae respectu axis IF fit

$$Maa - M(aa-bb)\,fi\,AF^2 = Mbb + M(aa-bb)\,fi\,BF^2$$

PROBLEMA. 30.

458. Invenire omnes axes per centrum inertiae ductos, quorum respectu momenta inertiae sint inter se aequalia.

SOLUTIO.

Fig. 48. Sint momenta inertiae respectu axium principalium IA, IB, IC respective Maa, Mbb, Mcc et $aa > bb > cc$: et quaerantur omnes axes per centrum inertiae I ducendi, quorum respectu momenta inertiae sint inter se aequalia, et quidem aequalia ei, quod respondet axi IE, sumto E in quadrante AC, quoniam ab A ad C omnia momenta hujus corporis a maximo ad minimum occurrunt. Sit IS talis axis, et habebimus hanc aequationem:

$$Maa - M(aa-cc)\,fi\,AE^2 = Maa - M(aa-bb)\,cof\,BS^2 - M(aa-cc)\,cof\,CS^2,$$

seu

seu $(aa-cc)\,sf\,AE^2 = (aa-bb)\,cof\,BS^2 + (aa-cc)\,cof\,CS^2$
ergo ob $cof\,BS^2 = sf\,AS^2 - cof\,CS^2$ erit

$$(aa-cc)\,sf\,AE^2 = (aa-bb)\,sf\,AS^2 + (bb-cc)\,cof\,CS^2$$

Introducatur angulus CAS, et cum sit $cof\,CS = sf\,AS\,cof\,CAS$ erit

$$(aa-cc)\,sf\,AE^2 = (aa-bb)\,sf\,AS^2 + (bb-cc)\,sf\,AS^2\,cof\,CAS^2$$

ergo $sf\,AS^2 = \frac{(aa-cc)\,sf\,AE^2}{aa-bb+(bb-cc)\,cof\,CAS^2}$.

Sin autem augulum ACS introducamus, reperiemus

$$sf\,CS^2 = \frac{(aa-cc)\,sf\,CE^2}{bb-cc+(aa-bb)\,cof\,ACS^2};$$

angulus CAS usque ad rectum augeri potest, dum $(aa-cc)\,sf\,AE^2$ non excedat $aa-bb$, hoc est si fuerit $sf\,AE < r\,\frac{aa-bb}{aa-cc}$; at angulus ACS usque ad rectum crescere potest, si sit $sf\,CE < r\,\frac{bb-cc}{aa-cc}$ seu $sf\,AE > r\,\frac{aa-bb}{aa-cc}$. Quare punctum S erit in curva, quae ex E assurgens per quadrantem AB transibit, si fuerit $sf\,AE < r\,\frac{aa-bb}{aa-cc}$; curva autem illa per quadrantem BC transibit, si fuerit $sf\,AE > r\,\frac{aa-bb}{aa-cc}$. Casu autem quo $sf\,AE = r\,\frac{aa-bb}{aa-cc}$ curva per ipsum punctum B transibit, omniaque momenta inertiae erunt $= Mbb$. Hoc igitur casu erit $sf\,AS^2 = \frac{aa-bb}{aa-bb+(bb-cc)\,cof\,CAS^2}$.

Hinc ob $cof\,AE = r\,\frac{bb-cc}{aa-cc}$, et $\frac{aa-bb}{bb-cc} = \frac{sf\,AE^2}{cof\,AE^2}$, fiet $sf\,AS^2 = \frac{sf\,AE^2}{sf\,AE^2+cof\,AE^2\,cof\,CAS^2}$ ideoque $tang\,AS = \frac{tang\,AE}{cof\,CAS}$: unde intelligitur loca punctorum S sita esse in circulo maximo per puncta B et E ducto.

Fig. 49.

Casu quo $sin\,AE < r\,\frac{aa-bb}{aa-cc}$, seu punctum E propius ad A sumitur, sit id in e, et in quadrante AB dabitur punctum f, in quo momentum sit aeque magnum. Erit ergo $sf\,Af^2 = \frac{(aa-cc)\,sf\,Ae^2}{aa-bb}$: unde si ponatur $Ae = e$; $Af = f$; $AS = s$ et angulus $eAs = \Phi$, ob $\frac{aa-cc}{aa-bb} = \frac{sin\,f^2}{sin\,e^2}$ et $\frac{bb-cc}{aa-bb} = \frac{sin\,f^2 - sin\,e^2}{sin\,e^2}$, habebimus inter s et Φ hanc aequationem:

tionem: $\int s^2 = \frac{\int e^2 \int f^2}{\int c^2 + (\int f^2 - \int e^2)\cos\varphi^2} = \frac{\int e^2 \int f^2}{\int e^2 \int \varphi^2 + \int f^2 \cos\varphi^2}$, qua aequatione natura lineae esf exprimitur, eſtque $\frac{\int e}{\int f} = \int$ AE. Caſu denique quo $\int \cdot$ AE $> r \frac{aa-bb}{aa-cc}$, cadat punctum E in e', dabiturque in quadrante BC punctum d, ubi momentum eſt idem atque in e', ut ſit $\int$ C$d^2 = \frac{(aa-cc)\int Ce'^2}{bb-cc}$. Ponatur jam $Ce' = e$; $Cd = f$; $Cs' = s$ et angulus e' C$s' = \varphi$; ob $\frac{aa-cc}{bb-cc} = \frac{ff}{ee}$ et $\frac{aa-bb}{bb-cc} = \frac{ff-ee}{ee}$ inter s et φ haec prodit aequatio: $\int s^2 = \frac{\int e^2 \int f^2}{\int e^2 + (\int f^2 - \int e^2)\cos\varphi^2}$ $= \frac{\int e^2 \int f^2}{\int e^2 \int \varphi^2 + \int f^2 \cos\varphi^2}$, qua natura lineae $e's'd$ exprimitur, eſtque $\frac{\int e}{\int f} = \int$ CE.

COROLL. 1.

459. Per totum ergo circulum maximum ex B per E ductum ut ſit $\int$ AE $= r \frac{aa-bb}{aa-cc}$, momentum inertiae eſt $= Mbb$. Et quia arcus AE tam negative quam poſitive accipi poteſt, duo in ſphaera dantur circuli maximi eadem proprietate gaudentes.

COROLL. 2.

460. Simili modo tam circa polum A, quam ipſi oppoſitum, erunt in ſuperficie ſphaerae orbes elliptici, quorum ſemiaxis major eſt arcus Af et ſemiaxis minor arcus Ae, in quibus ubique idem regnabit momentum inertiae majus quam Mbb. In figura linea fse refert quadrantem horum orbium ellipticorum.

COROLL. 3.

461. Lineae autem, in quibus momentum inertiae minus eſt quam Mbb, erunt bini orbes elliptici, quorum centra ſunt in polo C eique oppoſito, et ſemiaxis major arcus Cd, minor vero arcus Ce'. In figura linea $ds'e'$ refert quadrantem horum orbium ellipticorum.

SCHOLION. 1.

462. Et ſi hae lineae fse, et $ds'e'$ in ſuperficie ſphaerae ductae, non ſunt in eodem plano, tamen eas orbium ellipticorum nomine inſignire

Digitized by Google

signire lubet, quoniam earum projectiones in plana sphaeram in punctis A et C tangentia per rectas eo normales factae sunt ellipses, quarum centra sunt in punctis A et C. In projectione enim lineae fse in planum ad A tangens facta si ponatur $\mathfrak{si}\ Af = m$, $\mathfrak{si}\ Ae = n$, ut sit $\frac{mm}{nn} = \frac{aa-cc}{aa-bb}$, et pro puncti s projectione abscissa in m sumta $= x = \mathfrak{si}\ s\ \mathfrak{sin}\ \varphi$, et applicata eo normalis $= y = \mathfrak{si}\ s\ \mathfrak{cos}\ \varphi$, habebitur inter x et y haec aequatio $nnxx + mmyy = mmnn$, quae est pro ellipsi centrum in A habente, cujus semiaxes sunt m et n. Parique modo projectio lineae $ds'e'$ in planum ad C tangens facta reperietur esse ellipsis. Si fuerit $Mbb = Mcc$, quo casu punctum E in C cadit, fitque $Ae = Af$ et $m = n$, ellipsis illa abit in circulum, eritque linea fse circulus minor circa polum A descriptus.

SCHOLION. 2.

463. Investigationem ergo momenti inertiae eo reduximus, ut pro quolibet corpore proposito sufficiat terna momenta inertiae definivisse, quae scilicet sumta sint respectu ternorum ejus axium principalium. His enim cognitis facile momentum inertiae ejusdem corporis respectu aliuscujuscunque axis per ejus centrum inertiae transeuntis, atque hinc porro respectu aliorum omnium illi parallelorum assignari potest. Hocque modo inventio momentorum inertiae, quae initio pro quovis corpore quasi infinita videbatur, mirifice in compendium est redacta. Praeterea vero notari meretur, in hoc negotio aliud insigne subsidium, cujus ope momentum inertiae alicujus corporis facile colligi potest ex momentis ejus partium, id quod sequente problemate explicemus.

PROBLEMA. 31.

464. Datis momentis inertiae duarum partium respectu axium inter se parallelorum, et per cujusque centrum inertiae transeuntium, invenire momentum inertiae totius corporis respectu axis illis paralleli et per hujus centrum inertiae transeuntis.

SOLUTIO.

Sit ergo corpus compositum ex duabus partibus, quarum alterius massa sit $= M$ habens suum centrum inertiae in M; alterius vero massa sit $= N$ ejusque centrum inertiae in N, ponaturque intervallum Fig. 50.

Digitized by Google

$MN = c$. Data jam ſint momenta inertiae prioris partis M reſpectu axis mm, quod ſit $= Mmm$, et poſterioris partis N reſpectu axis nn, quod ſit $= Nnn$; ſintque hi axes mm et nn, qui per utriusque partis centrum inertiae tranſeant, inter ſe paralleli: unde totius corporis momentum inertiae reſpectu axis ii illis paralleli et per ſuum centrum inertiae I tranſeuntis determinari debet. Totius autem corporis maſſa eſt $= M+N$, ejusque centrum inertiae in rectae MN puncto I reperitur, ut ſit $IM = \frac{Ne}{M+N}$ et $IN = \frac{Mc}{M+N}$. Cum igitur hi tres axes in eodem plano ſint ſiti, ponatur eorum inclinatio ad rectam MN ſeu angulus $NI i = \delta$ eritque diſtantia axium mm et $ii = \frac{Nc\sin\delta}{M+N}$, unde partis M momentum inertiae reſpectu axis ii erit $= Mmm + \frac{MNNcc\sin\delta^2}{(M+N)^2}$. Tum vero ob diſtantiam axium nn et $ii = \frac{Mc\sin\delta}{M+N}$ prodit partis N momentum inertiae reſpectu axis $ii = Nnn + \frac{MMNcc\sin\delta^2}{(M+N)^2}$. Quare totius corporis momentum inertiae reſpectu axis ii habebitur $= Mmm + Nnn + \frac{MNcc\sin\delta^2}{M+N}$.

COROLL. 1.

465. Momentum ergo totius corporis majus eſt quam momenta partium ſimul ſumta, reſpectu axium inter ſe parallelorum et per cujusque centrum inertiae traductorum: atque exceſſus $\frac{MNcc\sin\delta^2}{M+N}$ proportionalis eſt quadrato diſtantiae axium.

COROLL. 2.

466. Si maſſa totius corporis ponatur $= I = M+N$, ejusque momentum inertiae reſpectu axis $ii = Iii$ erit

$$Iii = Mmm + Nnn + \frac{MNcc\sin\delta^2}{I}.$$

Tum vero poſitis diſtantiis $IM = a$, et $IN = b$, erit $a = \frac{Nc}{I}$ et $b = \frac{Mc}{I}$: unde fit $Iii = Mmm + Nnn + I\,ab\sin\delta^2$.

CO-

COROLL. 3.

467. Hinc dato momento totius corporis Iii una cum momento alterius partis Mmm, facile quoque colligitur momentum alterius partis $Nnn = Iii - Mmm - I\,abfi\,\delta^2$ sumtis scilicet axibus inter se parallelis, et per cujusque centrum inertiae transeuntibus.

COROLL. 4.

468. Si corpus constet pluribus partibus, quarum singularum momenta inertiae respectu axium inter se parallelorum et per cujusque centrum inertiae transeuntium sint explorata; hinc binis conjungendis tandem momentum inertiae totius corporis respectu axis illis paralleli et per suum centrum inertiae transeuntis colligetur.

SCHOLION. 1.

469. Hoc casu plurium partium non opus est secundum problema bina conjungere, sed statim momentum totius corporis colligi potest. Sint enim Mmm, Nnn, Ppp, Qqq momenta partium, respectu axium inter se parallelorum et per cujusque centra inertiae transeuntium: pro toto autem corpore concipiatur axis illis parallelus per ejus centrum inertiae transiens, a quo axes partium M, N, P, Q distent intervallis a, b, c, d: quibus cognitis erit momentum inertiae totius corporis $= M(mm + aa) + N(nn + bb) + P(pp + cc) + Q(qq + dd)$. Hoc igitur modo saepe corporum admodum irregularium momenta inertiae facile colligi poterunt, dummodo ex ejusmodi partibus fuerint composita, quarum momenta inertiae assignare liceat, quo pacto calculus momentorum inertiae non mediocriter adjuvatur.

SCHOLION. 2.

470. Verum non sufficit methodum tradidisse omnium corporum momenta inertiae inveniendi; necesse est etiam ea pro praecipuis corporum generibus evolvere, ut quoties usus postulat, inde desumi queant. Ne autem opus sit infinitum, hanc investigationem ad corpora homogenea, quae per totam extensionem similari constent materia, restringamus, ita ut calculus quasi ad corpora geometrica tantum sit accommodandus, ubi quidem figuras solum principales sum consideraturus. Ac primo, quoniam fila tenuissima et laminas tenuissimas tanquam lineas et superficies considerare licet, ab iis initium ducamus, inde ad

varias

Digitized by Google

varias ſpecies ſolidorum, cujusmodi prae ceteris occurrere ſolent, progreſſuri. In ſingulis autem his corporibus ternos axes principales eorumque reſpectu momenta inertiae definiamus, quandoquidem ex his momenta reſpectu omnium axium facili negotio colligi poſſunt. Hinc etiam ſimul patebit, quomodo calculum ad omnia alia corporum genera quam commodiſſime accommodari conveniat.

CAPUT VI.

INVESTIGATIO MOMENTI INERTIAE IN CORPORIBUS HOMOGENEIS.

PROBLEMA 32.

Fig. 51. 471. Si corpus fuerit filum tenuiſſimum rectum AIB, invenire ejus axes principales, eorumque reſpectu momenta inertiae.

SOLUTIO.

Sit tota fili longitudo $AB = 2a$, in cujus medio puncto I erit ejus centrum inertiae, ut ſit $IA = IB = a$: maſſa autem fili, quae geometrice per $2a$ exprimitur ſit $= M$. Iam unus axium principalium certo eſt ipſa linea AB, cujus reſpectu momentum inertiae eſt nullum, ideoque minimum: bini reliqui ſunt ad AB in I normales, eorumque reſpectu momenta inertiae aequalia, ita ut eorum ſitus non determinetur. Ad momentum ergo inertiae reſpectu talis axis ad AB in I normalis inveniendum, ſumto $IP = IQ = x$, elementorum $Pp = Qq = dx$ momenta ſunt $xxdx$, ſicque amborum conjunctim $= 2xxdx$, cujus integrale $\frac{2}{3}x^3$ poſito $x = a$, dat momentum inertiae fili reſpectu axium ad filum in I normalium $= \frac{2}{3}a^3 = \frac{1}{3}Maa$ ob $M = 2a$.

COROLL. 1.

472. Bini ergo reliqui axes principales praeter AIB non determinantur, perindeque eſt, quaenam duae rectae tam inter ſe quam ad filum in I normales pro iis accipiantur. Eorumque reſpectu momentum inertiae $\frac{1}{3}Maa$ eſt maximum, ita ut medium cum maximo congruat.

COROLL. 2.

473. Cum momentum inertiae reſpectu axis AB ſit nihilo aequale, reſpectu alius cujuscunque axis S I s ad AB angulo $AIS = \theta$ inclinato erit

Digitized by Google

erit $= \frac{1}{2} Maa \, sin\theta^2$, quod ex superioribus evidens est, si binorum reliquorum axium principalium alter in plano AIS capiatur: tum enim axis Ss ad eum inclinatur angulo $90° - \theta$, ad alterum vero angulo recto.

PROBLEMA. 33.

474. Si corpus fuerit filum tenuissimum in peripheriam circuli AEBF incurvatum, invenire ejus axes principales eorumque respectu momenta inertiae. Fig. 52.

SOLUTIO.

Sit radius circuli $IA = a$, et posita ratione diametri ad peripheriam $= 1 : \pi$, erit longitudo fili $= 2\pi a$, quae simul ejus massam refert, quae sit $= M$. Cum centrum inertiae sit in circuli centro I, primo recta ad planum circuli in I perpendicularis erit unus axis principalis, cujus respectu erit momentum inertiae $= Maa$, duo reliqui axes in plano circuli sunt siti, pro quibus binos diametros quoscunque inter se normales assumere licet AB et EF. Sumta jam abscissa $IP = x$, et applicata $PM = y = \sqrt{(aa - xx)}$, ob elementum fili $Mm = \frac{adx}{y}$, erit ejus momentum respectu axis $AB = aydx$, ideoque momentum totum $= a\int ydx = a \times$ Aream circuli $= \pi a^3$, quod ob $M = 2\pi a$ erit $= \frac{1}{2} Maa$. Quare momentum respectu diametri cujusvis est $= \frac{1}{2} Maa$.

COROLL. 1.

475. Momentum ergo inertiae respectu axis principalis ad planum circuli normalis, Maa est maximum, et momentum medium cum minimo congruit, estque utrumque semissis maximi.

COROLL. 2.

476. Si alius axis quicunque concipiatur ad planum circuli in I inclinatus angulo $= \eta$, quia is ad axem primum inclinatur angulo $90° - \eta$, ad reliquorum alterum angulo η et ad tertium angulo recto, erit ejus respectu momentum inertiae $= Maa \, sin\eta^2 + \frac{1}{2} Maa \, cos\eta^2 = \frac{1}{2} Maa (1 + sin\eta^2)$.

PROBLEMA. 34.

477. Si corpus fuerit lamina tenuissima plana triangularis ABD, invenire ejus tres axes principales, eorumque respectu momenta inertiae. Fig. 53.

SOLUTIO.

Ut centrum inertiae I obtineatur, ex angulo A ducatur recta AC latus oppositum BD bisecans, sumtaque CI parte tertia totius AC erit centrum inertiae in I. Ponamus $CI = a$, $CB = CD = c$, et angulum $ACB = \zeta$, ut sit $AI = 2a$, $AC = 3a$ et $BD = 2c$. Iam perspicuum est, unum axem principalem fore ad planum trianguli normalem in I, quoniam si in hac recta coordinatam x sumeremus, foret $\int xydM = 0$ et $\int xzdM = 0$, ob $x = 0$. Quare secundum probl. 28. praeter istum axem sumantur in plano trianguli binae reliquae directrices, quarum altera sit IA: et sumto elemento quocunque dM in Z, indeque ad IA demisso perpendiculo ZY, sit $IY = y$ et $YZ = z$, vocenturque integralia $\int xxdM = A = 0$; $\int yydM = B$, $\int zzdM = C$; tum $\int yzdM = F$: unde si IF et IG sint bini reliqui axes principales, ponaturque angulus $AIF = \theta$, demonstravimus fore $tang\ 2\theta = \frac{2F}{B-C}$, et respectu axis IF momentum inertiae $= A + B\int\theta^2 + C\cos\theta^2 - 2F\int\theta\cos\theta$, ubi θ denotat tam angulum AIF quam AIG. Tum vero respectu primi axis ad planum trianguli normalis est momentum inertiae $= B + C$. Ad hos valores inveniendos per Z ducatur lateri BD parallela MN, positisque $AP = t$ et $PZ = u$, erit $PM = PN = \frac{ct}{3a}$, $YZ = u\sin\zeta$ et $PY = u\cos\zeta$, atque elementum in $Z = dt\,du\sin\zeta = dM$. Hinc igitur erit $y = 2a - t + u\cos\zeta$ et $z = u\sin\zeta$; concipiatur aliud aequale elementum $dt\,du\sin\zeta$ ad alteram partem pro quo fit u negativum, hisque junctim consideratis fiet

$$B = 2\int dt \int\zeta\,du\,((2a-t)^2 + uu\cos\zeta^2);\quad C = 2\int dt\int\zeta\int uu\,du\sin\zeta^2$$
$$\text{et } F = \int dt\int\zeta\int(udu\sin\zeta(2a-t+u\cos\zeta) - udu\sin\zeta(2a-t-u\cos\zeta))$$
$$\text{seu } F = 2\int dt\sin\zeta\int uudu\sin\zeta\cos\zeta.$$

Prima integratione peracta poni debet $u = \frac{ct}{3a}$, unde fit

$$B = 2\sin\zeta\int dt\left(\frac{ct}{3a}(2a-t)^2 + \frac{c^3t^3}{81a^3}\cos\zeta^2\right);\ C = 2\int\zeta\int dt.\ \frac{c^3t^3\int\zeta^2}{81a^3}$$
$$\text{et } F = 2\int\zeta^2\cos\zeta\int dt.\ \frac{c^3t^3}{81a^3},\ \text{ideoque}$$
$$B = 2\sin\zeta\left(\frac{2act^3}{3} - \frac{4ct^3}{9} + \frac{ct^4}{12a} + \frac{c^3t^4}{324a^3}\cos\zeta^2\right)$$
$$C = 2\int\zeta.\ \frac{c^3t^4\int\zeta^2}{324a^3}\ \text{et}\ F = \frac{c^3t^4\int\zeta^2\cos\zeta}{162a^3}$$

quibus

quibus valoribus per totum triangulum, ponendo $t = 3a$, extensis habebimus:

$$B = \tfrac{1}{2} ac \int \zeta (3aa + cc \cos \zeta^2); \; C = \tfrac{1}{2} ac^3 \int \zeta^3; \; F = \tfrac{1}{2} ac^3 \int \zeta^2 \cos \zeta$$

Ex his pro situ axium IF et IG fiet

$$\text{tang } 2\theta = \frac{2ac^3 \int \zeta^2 \cos \zeta}{ac \int \zeta (3aa + cc \cos 2\zeta)} = \frac{cc \int 2\zeta}{3aa + cc \cos 2\zeta},$$

hinc enim duo valores pro θ eliciuntur. Denique momentum inertiae respectu axis principalis ad planum trianguli normalis est $= \tfrac{1}{2} ac \int \zeta (3aa + cc) = \tfrac{1}{6} M (3aa + cc)$ ob $M = 3ac \int \zeta$; et respectu axis IF vel IG, prout θ angulum AIF vel AIG denotat, est momentum inertiae

$$\tfrac{1}{6} M (3aa + cc \cos \zeta^2) \int \theta^2 + \tfrac{1}{6} Mcc \int \zeta^2 \cos \theta^2 - \tfrac{1}{3} Mcc \int \zeta \cos \zeta \int \theta \cos \theta$$
$$= \tfrac{1}{2} Maa \int \theta^2 + \tfrac{1}{6} Mcc (\cos \zeta \int \theta - \int \zeta \cos \theta)^2 = \tfrac{1}{2} Maa \int \theta^2 + \tfrac{1}{6} Mcc \int (\zeta - \theta)^2.$$

COROLL. 1.

478. Cum sit $AB^2 + AD^2 = 18aa + 2cc$, erit $3aa = \frac{AB^2 + AD^2 - 2cc}{6}$ hincque momentum inertiae respectu axis ad planum trianguli in I normalis fiet $= \frac{1}{36} M (AB^2 + AD^2 + BD^2)$, ita ut sit pars tricesima sexta massae per summam quadratorum laterum multiplicatae.

COROLL. 2.

479. Pro binis reliquis axibus principalibus in plano trianguli sitis IF et IG, notetur ζ esse angulum recto non majorem, unde $\int 2\zeta$ erit positivus. Posito ergo angulo $AIF = \theta$ erit $\text{tang } \theta = \frac{-3aa - cc \cos 2\zeta + \sqrt{(9a^4 + 6aacc \cos 2\zeta + c^4)}}{cc \int 2\zeta} = \text{tang AIF}$; at $\text{tang AIG} = \frac{-3aa - cc \cos 2\zeta - \sqrt{(9a^4 + 6aacc \cos 2\zeta + c^4)}}{cc \int 2\zeta}$

COROLL. 3.

480. Momentum inertiae respectu horum axium est $= \frac{1}{36} M (\frac{1}{2} aa - \frac{1}{2} aa \cos 2\theta + \frac{1}{2} cc - \frac{1}{2} cc \cos 2(\zeta - \theta))$, cum igitur sit $\text{tang } 2(\zeta - \theta) = \frac{3aa \int 2\zeta}{3aa \cos 2\zeta + cc}$, hoc utrumque momentum ita exprimetur:

Digitized by Google

$$\tfrac{1}{192} M\left(3aa + cc \pm \sqrt{\left(9a^4 + 6aacc\cos 2\zeta + c^4\right)}\right) = \tfrac{1}{192} Mcc\left(1 - \cos 2\zeta - 2\zeta \tang\theta\right) = \frac{Mcc\sin\zeta\sin(\zeta-\theta)}{6\cos\theta}$$

prout enim pro θ angulus AIF vel AIG assumitur, ita ad utrumque axem referetur.

EXEMPLUM.

481. Sit triangulum ABD isosceles seu angulus ζ rectus, hincque ob $\tang 2\theta = 0$, erit vel $\theta = 0$ vel $\theta = 90°$, unde alter axis in ipsam rectam AC incidit, alter vero ad eum est normalis. Respectu prioris AC momentum inertiae erit $= \frac{1}{6} Mcc$, respectu posterioris vero $= \frac{1}{32} Maa$: dum respectu primi, qui ad planum trianguli est normalis, erat $= \frac{1}{32} Maa + \frac{1}{6} Mcc$ ita, ut hoc sit aequale summae binorum reliquorum. Si praeterea triangulum sit aequilaterum, cujus singula latera $= 2c$; erit $3a = c\sqrt{3}$ seu $aa = \frac{cc}{3}$, quare omnes axes in plano trianguli per I ducti aequalia praebent momenta inertiae $= \frac{1}{6} Mcc$ et momentum respectu axis ad triangulum in I normalis erit duplo majus $= \frac{1}{3} Mcc$.

COROLL. 4.

482. Haec postrema proprietas adeo in genere valet: cum enim sit momentum inertiae respectu axis ad planum trianguli normalis $= \frac{1}{6} M\left(3aa + cc\right)$, tum vero respectu axis IF $= \frac{1}{192} M\left(3aa + cc - \sqrt{\left(9a^4 + 6aa\,cc\cos 2\zeta + c^4\right)}\right)$ respectu axis IG $= \frac{1}{192} M\left(3aa + cc + \sqrt{\left(9a^4 + 6aa\,cc\cos 2\zeta + c^4\right)}\right)$, evidens est, horum summam priori esse aequalem.

SCHOLION.

483. Notari hic meretur, si reliqua trianguli latera ponantur AB $= 2b$, AD $= 2d$, uti est BD $= 2c$, fore $9aa = 2bb + 2dd - cc$, et $\cos\zeta = \frac{dd - bb}{3ac}$, unde formula irrationalis $\sqrt{\left(9a^4 + 6aa\,cc\cos 2\zeta + c^4\right)}$ abit in hanc

$$\tfrac{4}{3}\sqrt{\left(b^4 + c^4 + d^4 - bb\,cc - bb\,dd - cc\,dd\right)}.$$

Ceterum hic in genere definire non licet, uter axium IF et IG majus praebeat momentum, cum haec ipsa formula irrationalis quandoque negativum valorem induere debeat, quemadmodum patet ex casu $\zeta = 90°$, ubi valor ejus $3aa - cc$ fit negativus, si $cc > 3aa$. In genere autem

tem haec duo momenta inter se aequalia fieri nequeunt, quia formula irrationalis evanescere non potest, nisi sit $2\zeta = 180°$ et $3aa = cc$. At judicium hoc quovis casu, adhibitis angulis θ utrique axi convenientibus, facile instituetur ex formula $\frac{1}{2} Maa \int \theta^2 + \frac{1}{6} Mcc \int (\zeta - \theta)^2$.

PROBLEMA. 35.

484. Si corpus fuerit lamina tenuissima plana figuram parallelogrammi BD*bd* habens, invenire ejus tres axes principales, eorumque respectu momenta inertiae. Fig. 54.

SOLUTIO.

Bisectis lateribus binis oppositis BD et *bd* in A et C, ductaque recta AC in ejus puncto medio I erit centrum inertiae corporis, cujus massa ponatur $= M$. Ponantur latera $Bb = Dd = AC = 2a$, $BD = bd = 2b$, et angulus acutus $B = d = \zeta$, erit area $= 4ab \sin \zeta = M$. Iam unus axium principalium erit ad planum laminae in I normalis, binique reliqui IF et IG in ipso hoc plano siti: ad quos inveniendos concipiatur elementum quodcunque dM in Z, per quod punctum primo ducatur recta MN laterali BD parallela, sitque $AP = t$ et $PZ = u$; tum ex Z ad AC demisso perpendiculo ZY vocetur secundum probl. 28. $IY = y$ et $YZ = z$. Ob $APZ = \zeta$ erit $ZY = u \sin \zeta$ et $PY = u \cos \zeta$, unde $y = a - t + u \cos \zeta$ et $z = u \sin \zeta$; tum vero $dM = dt\, du \sin \zeta$: at in illo calculo fit $x = 0$, ut fit $\int xxdM = 0$, $\int xydM = 0$, $\int xzdM = 0$. Hinc ergo habemus: $\int yydM = B = \int dt \int du \int \zeta (a - t + u \cos \zeta)^2$, $\int zzdM = C = \int dt \int uu\, du \sin \zeta^3$ et $\int yzdM = F = \int dt \int u\, du \sin \zeta^2 (a - t + u \cos \zeta)$. Combinetur cum his elementum simile Z′ ad alteram partem situm, pro quo est u negativum, fietque:

$$B = 2 \sin \zeta \int dt \int du\, ((a-t)^2 + uu \cos \zeta^2); \quad C = 2 \int \zeta^3 \int dt \int uu\, du$$

$$\text{et } F = 2 \int \zeta^2 \cos \zeta \int dt \int uu\, du.$$

Priori integratione instituta ponatur $u = b$, prodibitque

$$B = 2 \int \zeta \int dt\, (b(a-t)^2 + \tfrac{1}{3} b^3 \cos \zeta^2); \quad C = \tfrac{2}{3} b^3 \sin \zeta^3 \int dt$$

et $F = \frac{2}{3} b^3 \sin \zeta^2 \cos \zeta \int dt$. Denique posteriori integratione facta ponatur $t = 2a$, fietque $B = \frac{4}{3} ab \int \zeta\, (aa + bb \cos \zeta^2) = \frac{1}{3} M (aa + bb \cos \zeta^2)$; $C = \frac{4}{3} ab^3 \sin \zeta^3 = \frac{1}{3} Mbb \sin \zeta^2$ et $F = \frac{4}{3} ab^3 \sin \zeta^2 \cos \zeta = \frac{1}{3} Mbb \sin \zeta \cos \zeta$. Ex his colligitur momentum inertiae respectu primi axis ad laminam in I normalis $B + C = \frac{1}{3} M (aa + bb)$: quod ergo non ab obliquitate, sed tantum a lateribus pendet. At pro reliquis axibus IF et IG posito an-

Digitized by Google

gulo AIF $= \theta$ invenimus $tang\ 2\theta = \frac{2F}{B-C} = \frac{2bb\int\zeta\cos\zeta}{aa+bb\cos 2\zeta}$ seu $tang\ 2\theta = \frac{bb\int 2\zeta}{aa+bb\cos 2\zeta}$, cujus duplex valor θ praebet utrumque angulum AIF et AIG. Momentum autem inertiae respectu horum axium est $B\int\theta^2 + C\cos\theta^2 - 2F\int\partial\cos\theta = \frac{1}{3}M(aa\int\theta^2 + bb\cos\zeta^2\int\theta^2 + bb\int\zeta^2\cos\theta^2 - 2bb\int\zeta\cos\zeta\int\theta\cos\theta) =$

$$\tfrac{1}{6}M(aa - aa\cos 2\theta + bb - bb\cos 2\zeta\cos 2\theta - bb\int 2\zeta\int 2\theta)$$

sicque hoc momentum inertiae ita exprimi poterit

$$\tfrac{1}{6}M(aa + bb - aa\cos 2\theta - bb\cos(2\zeta - 2\theta)).$$

Cum igitur sit

$$\int 2\theta = \frac{bb\int 2\zeta}{\gamma(a^4 + 2aabb\cos 2\zeta + b^4)} \text{ et } \cos 2\theta = \frac{aa + bb\cos 2\zeta}{\gamma(a^4 + 2aabb\cos 2\zeta + b^4)}$$

istud momentum erit:

$$\tfrac{1}{6}M(aa + bb - \gamma(a^4 + 2aabb\cos 2\zeta + b^4))$$

ubi ambiguitas signi radicalis et ambos axes IF et IG et momenta inertiae eorum respectu praebet. Patet ergo summam horum binorum aequalem esse momento primo.

COROLL. 1.

485. Si $aa + bb\cos 2\zeta$ habeat valorem positivum, sumto radicali positivo, angulus 2θ recto erit minor, ideoque angulus AIF semirecto minor; ac respectu axis IF momentum inertiae erit minimum $= \frac{1}{6}M(aa + bb - \gamma(a^4 + 2aabb\cos 2\zeta + b^4))$; respectu axis IG vero medium.

COROLL. 2.

486. Si $aa + bb\cos 2\zeta$ habeat valorem negativum, et radicale pro axe IF capiatur positive, angulus 2θ erit recto major, ideoque angulus AIF semirecto major: atque axis IF respectu momentum inertiae erit minimum.

COROLL. 3.

487. Si ducatur diagonalis Bd per angulos acutos B et d, ob $tang.$ AIB $= \frac{b\int\zeta}{a + b\cos\zeta}$ reperitur $tang\ 2BIF = \frac{2ab\int\zeta(aa - bb)}{a^4 + 2a^3b\cos\zeta + 2aabb\cos 2\zeta + 2ab^3\cos\zeta + b^4}$ unde

Digitized by Google

unde patet, in rhombo ubi $a = b$, ambas diagonales fore axes principales: dum in rectangulo recta AC est axis principalis.

EXEMPLUM. 1.

488. Si parallelogrammum $Bb\,dD$ sit rectangulum, ob ζ 90° fit $tang\,2\theta = 0$, ideoque vel $\theta = 0$ vel $\theta = 90°$: unde respectu axis ad laminam in I normalis erit momentum inertiae $= \frac{1}{3} M\,(aa + bb)$: tum vero alter axis principalis est AC, cujus respectu momentum inertiae est $= \frac{1}{3} Mbb$; tertius vero axis principalis est in plano laminae ad AC normalis, cujus respectu momentum inertiae est $= \frac{1}{3} Maa$: existentibus lateribus $Bb = Dd = 2a$ et $BD = bd = 2b$.

EXEMPLUM. 2.

489. Si parallelogrammum $Bb\,dD$ sit rhombus, ut sit $b = a$ et singula ejus latera $= 2a$, existentibus angulis acutis $= \zeta$, fit $tang\,2\theta = \frac{sin\,2\zeta}{1 + cos\,2\zeta} = tang\,\zeta$, hincque vel $\theta = \frac{1}{2}\zeta$ vel $\theta = 90° + \frac{1}{2}\zeta$. Quare respectu primi axis principalis ad planum rhombi in I normalis est momentum inertiae $= \frac{2}{3} Maa$; reliqui ambo axes sunt diagonales Bd et Db, quorum illius Bd respectu momentum inertiae est $= \frac{1}{3} Maa\,(1 - cos\,\zeta) = \frac{2}{3} Maa\,sin\,\frac{1}{2}\zeta^2$, respectu vero alterius diagonalis Db est $= \frac{1}{3} Maa\,(1 + cos\,\zeta) = \frac{2}{3} Maa\,cos\,\frac{1}{2}\zeta^2$.

COROLL. 4.

490. Si ergo parallelogrammum abeat in quadratum, cujus latus $= 2a$, omnes rectae in ejus plano per centrum inertiae I ductae pro axibus principalibus haberi possunt, eritque eorum respectu momentum inertiae $= \frac{1}{3} Maa$; at respectu axis ad quadratum in I normalis duplo erit majus $= \frac{2}{3} Maa$.

PROBLEMA. 36.

491. Si corpus fuerit lamina tenuissima plana in figuram circuli efformata, invenire ejus axes principales, eorumque respectu momenta inertiae.

SOLUTIO.

Sit radius circuli $= a$, erit area $= \pi aa$, quae massam M refert: et cum unus axium principalium ad planum circuli in centro I sit normalis, Fig. 52.

normalis, ponantur pro elemento quocunque dM in Z sito coordinatae $IP = y$, $PZ = z$, ob $dM = dydz$, erit $\int yydM = \int dy \int yydz = \int dy . yyz = \int yydy \sqrt{(aa-yy)}$ posito $z = \sqrt{(aa-yy)}$. At hoc integrale reducitur ad hanc formam $\int yydM = \frac{1}{8} a^4 \int \frac{dy}{\sqrt{(aa-yy)}} - \frac{1}{8} y(aa-2yy)\sqrt{(aa-yy)}$, quod quater sumtum et posito $y = a$, dat $B = \frac{\pi}{4} a^4 = \frac{1}{4} Maa$. Simili modo vero fit $\int zzdM = C = \frac{1}{4} Maa$. Deinde $\int yzdM$ si ex altera diametri parte simile elementum conjungatur, ad nihilum reddetur, ita ut sit $\int yzdM = F = 0$. Hinc cum $B - C = 0$, oritur $tang\, 2\theta = \frac{0}{0}$, sicque angulus θ est indeterminatus, ex quo cognoscimus, quod per se est clarum, omnes diametros pro axibus principalibus haberi posse, quorum respectu sit momentum inertiae $= \frac{1}{4} Maa$. At respectu primi axis ad planum circuli in centro I normalis est momentum inertiae $B + C = \frac{1}{2} Maa$.

SCHOLION.

492. Cum hic elementum massae dM esset $= dydz$, notandum est, id semper manere positivum, etiamsi vel y vel z capiatur negative, quo casu etiam differentialia alioquin fierent negativa. In hoc ergo calculo probe cavendum est, ne cum coordinatae negative accipiuntur, elementi massae dM expressio in calculum tanquam negativa inferatur. Ex quo conveniet pro singulis regionibus, ubi coordinatae signis contrariis afficiuntur, calculum seorsim institui. Ceterum idem valor $B = \int yydM = \frac{1}{4}\pi a^4$ eruitur, si ponatur $IZ = r$ et angulus $AIZ = \varphi$, erit enim $dM = rdrd\varphi$ et $y = r\, cos\, \varphi$, unde $yydM = r^3 drd\varphi\, cos\, \varphi^2$ quae secundum variabilem r integrata posito $r = a$ dat $\frac{1}{4} a^4 d\varphi\, cos\, \varphi^2$ cujus integrale ob $cos\, \varphi^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} cos\, 2\varphi$ praebet $\frac{1}{4} a^4 (\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4} sin\, 2\varphi)$. Statuatur nunc $\varphi = 2\pi$, ob $\sin 4\pi = 0$, prodit $\frac{1}{4}\pi a^4$ ut ante; unde patet superiorem cautelam legi continuitatis non repugnare.

PROBLEMA. 37.

Fig. 55. 493. Si corpus sit lamina tenuissima plana figuram habens quamcunque ACBD, definire ejus axes principales, eorumque respectu momenta inertiae.

SOLUTIO.

Sit I figurae centrum inertiae, manifestumque est; rectam ad ejus planum in I normalem fore unum axium principalium; tum in plano ipso

Digitized by Google

ipso sumtis binis directricibus AB et CD inter se normalibus, pro elemento quovis dM in Z ponantur coordinatae $IP = y$ et $PZ = z$, erit $dM = dydz$, hincque $\int yydM = \int dv \int yydz = \int dy.\, yyz$. Posito ergo $z = PM$, fit $\int yydM = \int PM.\, yydy$, cujus valor pro singulis regionibus AIC, AID, BIC et BID erui debet, eorumque summa erit $= B$, ut sit

$$B = \int IP^2.\, MN.\, d.\, IP + \int IQ^2.\, \mu\nu.\, d.\, IQ.$$

Deinde est $\int zzdM = \int dy \int zzdz = \frac{1}{3}\int dy$, $z^3 = \frac{1}{3}\int PM^3.\, dy$, ita ut sit

$$C = \tfrac{1}{3}\int (PM^3 + PN^3)\, d.\, IP + \tfrac{1}{3}\int (Q\mu^3 + Q\nu^3)\, d.\, IQ.$$

Porro est $\int yzdM = \int dy \int yzdz = \frac{1}{2}\int yzzdy = \frac{1}{2}\int PM^2.\, ydy$, cujus valor in regionibus AID et BIC est negativus, in BID vero positivus, unde habebitur

$$F = \tfrac{1}{2}\int IP\ (PM^2 - PN^2)\, d.\, IP - \tfrac{1}{2}\int IQ\, (Q\mu^2 - Q\nu^2)\, d.\, IQ.$$

At vero tota massa M erit

$$M = \int MN.\, d.\, IP + \int \mu\nu.\, d.\, IQ.$$

His valoribus inventis erit momentum inertiae respectu axis ad planum in I normalis $= B + C$, tum sint reliqui axes principales Ff et Gg, ac posito angulo $AIF = \theta$ reperimus $tang\ 2\theta = \frac{2F}{B-C}$, et momentum inertiae respectu axis $Ff = B\int \theta^2 + C\, cos\theta^2 - 2F\int \theta cos\theta =$

$$\tfrac{1}{2}B + \tfrac{1}{2}C - \tfrac{1}{2}(B-C)\, cos\, 2\theta - F\int 2\theta.$$

Verum ob $\int 2\theta = \frac{2F}{\sqrt{((B-C)^2 + 4FF)}}$ et $cos\, 2\theta = \frac{B-C}{\sqrt{((B-C)^2 + 4FF)}}$ obtinebitur momentum inertiae respectu

$$\text{axis } Ff = \tfrac{1}{2}(B+C) - \tfrac{1}{2}\sqrt{((B-C)^2 + 4\,FF)} \text{ et}$$
$$\text{axis } Gg = \tfrac{1}{2}(B+C) + \tfrac{1}{2}\sqrt{((B-C)^2 + 4\,FF)}$$

COROLL. 1.

494. Momenta ergo inertiae respectu axium Ff et Gg simul sumta aequalia sunt momento inertiae respectu primi axis principalis, qui ad planum laminae in I est normalis.

COROLL. 2.

495. Si recta AB fuerit figurae diameter, ut sit $PM = PN$, valor litterae F evanescit, id quod etiam evenit si recta CD fuerit diameter, ut sumto $IQ = IP$ sit $Q\mu = PM$. At quoties fit $F = 0$, tam ob $tang\ 2\theta = 0$, ipsae rectae AB et CD erunt axes principales.

COROLL. 3.

496. Casu hoc quo $F = 0$, et AB et CD sunt axes principales, erit momentum inertiae respectu axis $Ff = C$ et respectu axis $CD = B$,

Digitized by Google

quae si insuper fuerint aequalia ob $tang\, 2\,\theta = \frac{0}{0}$, omnes rectae per I ductae paria habent momenta $= B = C$.

COROLL. 4.

497. Si praeter diametrum AB reperiatur alia recta per I ducta, cujus respectu momentum inertiae illi sit aequale, tum omnes plane rectae per I ductae eadem proprietate gaudebunt, et momenta inertiae habebunt aequalia.

PROBLEMA. 38.

Fig. 56. 498. Si corpus fuerit lamina tenuissima plana in figuram polygoni regularis efformata, ejus axes principales eorumque respectu momenta inertiae definire.

SOLUTIO.

Centrum inertiae talis polygoni regularis erit in centro circuli circumscripti I, cujus radius ponatur $IA = a$, numerusque laterum $= n$. Hinc fit angulus $AIB = \frac{2\pi}{n}$, eoque per rectam IG bisecto angulus $AIG = \frac{\pi}{n}$ atque $AB = 2a\, sin\, \frac{\pi}{n}$ et $IG = a\, cos\, \frac{\pi}{n}$: quare area trianguli $AIB = aa\, sin\, \frac{\pi}{n}\, cos\, \frac{\pi}{n} = \frac{1}{2}\, aa\, sin\, \frac{2\pi}{n}$ et area polygoni totius $= \frac{n}{2}\, aa\, sin\, \frac{2\pi}{n}$ vicem massae M gerens. Iam primo observo (497) omnes rectas in plano laminae per I ductas aequalia esse habituras momenta, quorum bina simul sumta efficiant momentum respectu axis ad planum laminae in I normalis. Hoc vero momentum ex superioribus colligi potest. Consideretur enim triangulum AIB, cujus massa ponatur $= m$, et centrum inertiae in i, ut sit $Gi = \frac{2}{3}\, a\, cos\, \frac{\pi}{n}$ et $Ii = \frac{2}{3}\, a\, cos\, \frac{\pi}{n}$ existente $AG = a\, sin\, \frac{\pi}{n}$. Quia igitur hoc triangulum est isosceles, per §. 481. erit ejus momentum inertiae respectu axis ad planum trianguli in i normalis $= \frac{1}{2}\, m.\, Gi^2 + \frac{1}{6}\, m.\, AG^2 = m\,(\frac{2}{18}\, aa\, cos\, \frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{6}\, aa\, si\, \frac{\pi^2}{n})$; hincque respectu axis ad idem planum in I normalis $= m\,(\frac{2}{18}\, aa$

cos

$cof\ \frac{\pi^3}{n} + \frac{1}{6}\,aa\,fi\,\frac{\pi^2}{n} + \frac{4}{3}\,aa\,cof\frac{\pi^2}{n} = maa\,(\frac{1}{2}\,cof\,\frac{\pi^2}{n} + \frac{0}{6}\,fi\,\frac{\pi^2}{n})$ quod per n multiplicatum ob $mn = M$ dabit momentum totius polygoni respectu axis ad id in I normalis $= Maa\,(\frac{1}{2}\,cof\,\frac{\pi^2}{n} + \frac{1}{6}\,/\,\frac{\pi^2}{n}) = \frac{1}{3}\,Maa\,(1 + \frac{1}{2}\,cof\,\frac{2\pi}{n})$. Respectu vero cujusque axis in plano laminae per punctum I ducti erit momentum inertiae $= \frac{1}{6}\,Maa\,(1 + \frac{1}{2}\,cof\,\frac{2\pi}{n})$ illo scilicet duplo minus.

COROLL. 1.

499. Si praeterea latus polygoni ponatur $AB = c$, ut sit $c = 2a\,fi\,\frac{\pi}{n}$, ob $a = \frac{c}{2fi\frac{\pi}{n}}$ erit momentum inertiae respectu axis principalis ad planum in I normalis $= \frac{Mcc}{12fi\frac{\pi^2}{n}}\,(1 + \frac{1}{2}\,cof\,\frac{2\pi}{n}) = \frac{3}{12}\,Mcc\,\frac{2 + cof\frac{2\pi}{n}}{1 - cof\frac{2\pi}{n}}$, respectu reliquorum vero axium principalium est duplo minus.

COROLL. 2.

500. Si praeter radium circuli circumscripti $IA = a$, latus polygoni $AB = c$ introducatur, ob $fi\,\frac{\pi}{n} = \frac{c}{2a}$ et $cof\,\frac{2\pi}{n} = 1 - \frac{cc}{2aa}$ erit momentum respectu axis in I normalis $= \frac{1}{3}\,Maa\,(1 + \frac{1}{2} - \frac{cc}{4aa}) = \frac{1}{12}\,M\,(6aa - cc)$, respectu axium vero in ipso plano polygoni per I ductorum est duplo minus.

PROBLEMA. 39.

501. Si corpus fuerit cylindrus rectus, cujus axis $Aa = 2a$ et radius basis $AB = AD = c$, invenire ejus axes principales, eorumque respectu momenta inertiae. Fig. 57.

SOLUTIO.

Cum area basis sit $= \pi cc$, erit cylindri soliditas seu massa $= 2\pi aac = M$. In axis autem puncto medio I erit ejus centrum inertiae, ut

sit AI = Ia = a: at ipse hic axis Aa unus manifesto est axium principalium, per quem sumto plano quocunque BDbd pro elemento quovis dM in Z sito habebuntur coordinatae IX = x, XY = y, YZ = z ut sit $dM = dxdydz$. Hinc colligantur valores sequentes:

1°. $\int xxdM = \int xxdxdydz$: ubi sumtis primo x et y constantibus et posito post integrationem $z = \gamma(cc - yy)$, habetur $\int xxdx \int dy \gamma(cc-yy)$, at $\int dy \gamma(cc-yy)$ dat aream sectionis per X factae $= \pi cc$, ut habeatur $\pi cc \int xxdx$, cujus integrale tam ad A quam a extensum praebet $\frac{1}{3}\pi cca^3$, ut sit $\int xxdM = A = \frac{1}{3} Maa$.

2°. $\int yydM = \int yydxdydz = \int dx \int yydy \gamma(cc-yy)$, at posito $y = c$ est $\int yydy \gamma(cc-yy) = \frac{1}{10}\pi c^4$, quod quater sumi debet, ut sit $\int yydM = \frac{1}{4}\pi c^4 \int dx$, hincque habebitur per totum cylindrum $\int yydM = \frac{2}{4}\pi c^4 a = \frac{1}{4} Mcc = B$.

3°. $\int zzdM = \int zzdxdydz$, ubi si primo x et z pro constantibus sumantur, posito $y = \gamma(cc-zz)$ habetur $\int dx \int zzdz \gamma(cc-zz)$, cujus valor ut ante colligitur $\int zzdM = \frac{1}{4} Mcc = C = B$.

4°. $\int yzdM$ si simile elementum dM infra planum BDbd cum eo conjungatur, in nihilum abit, ita ut prodeat $\int yzdM = F = 0$.

His positis respectu axis Aa erit momentum inertiae $= B + C = \frac{1}{2} Mcc$: pro reliquis vero binis axibus ad illum normalibus fit $tang\, 2\theta = \frac{2F}{B-C} = \frac{0}{0}$; ita ut omnes diametri sectionis in I ad Aa normalis tanquam axes principales spectari possint, quorum omnium respectu erit momentum inertiae $= A + B = M(\frac{1}{3}aa + \frac{1}{4}cc)$.

COROLL. 1.

502. Si alius axis quicunque per I transiens accipiatur, qui faciat cum axe Aa angulum $= \zeta$, ejus respectu momentum inertiae erit $= (B+C)\cos\zeta^2 + (A+B)\sin\zeta^2 = M(\frac{1}{2}cc\cos\zeta^2 + \frac{1}{3}aa\int\zeta^2 + \frac{1}{4}cc\int\zeta^2) = M(\frac{1}{3}aa\int\zeta^2 + \frac{1}{2}cc - \frac{1}{4}cc\int\zeta^2)$.

COROLL. 2.

503. Fieri potest, ut omnia momenta respectu rectarum per I ductarum fiant inter se aequalia, quod evenit si fuerit $\frac{1}{3}aa = \frac{1}{4}cc$ seu $a = \frac{c\gamma 3}{2}$, ideoque $\frac{c}{2a} = \frac{1}{\gamma 3}$, et angulus A$a$B $= 30°$, sive triangulum BaD aequilaterum, quo casu singula momenta sunt $= \frac{1}{2} Mcc = \frac{1}{3} M.\, BD^2$.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA 40.

504. Si corpus fuerit conus rectus, cujus vertex A, altitudo AC $= a$, et radius basis CB $=$ CD $= c$, invenire ejus axes principales eorumque respectu momenta inertiae. Fig. 58.

SOLUTIO.

Cum area basis sit $= \pi cc$ erit soliditas eademque massa $M = \frac{1}{3}\pi acc$: tum vero centrum inertiae I ita in axe est situm, ut sit $CI = \frac{1}{4}a$ et $AI = \frac{3}{4}a$. Sumatur jam elementum quodcunque dM in Z, pro quo sint coordinatae $IX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, erit $dM = dxdydz$. Ponatur autem $AX = t$, erit $XM = \frac{ct}{a}$, et $x = \frac{3}{4}a - t$, nihilo vero minus capi debet $dM = dtdydz$. Evolvantur ergo sequentes formulae:

1°. $\int xxdM = A = \int (\frac{3}{4}a - t)^2\, dtdydz$, ubi sumtis primo t et y constantibus positoque $z = \sqrt{(\frac{cctt}{aa} - yy)}$ habebitur: $\int (\frac{3}{4}a - t)^2\, dt \int dy \sqrt{(\frac{cctt}{aa} - yy)}$; ubi pro tota sectione in X est $\int dy \sqrt{(\frac{cctt}{aa} - yy)} = \frac{\pi cctt}{aa}$, ita ut integrandum supersit $\frac{\pi cc}{aa} \int tt\, dt\, (\frac{3}{4}a - t)^2 = \frac{\pi cc}{aa}(\frac{3}{160}aat^3 - \frac{3}{8}at^4 + \frac{1}{5}t^5)$. Ponatur $t = a$ fietque $A = \frac{1}{160}\pi cca^3 = \frac{3}{80}Maa$.

2°. $\int yydM = B = \int yydtdydz = \int dt \int yydy \sqrt{(\frac{cctt}{aa} - yy)}$ per primam integrationem. At manente adhuc t constante est $\int yydy \sqrt{(\frac{cctt}{aa} - yy)}$, posito $y = \frac{ct}{a}$ et quater sumtum $= \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{c^4t^4}{a^4}$, ut etiamnum integrari debeat $\int \frac{1}{4}\pi \cdot \frac{c^4t^4}{a^4}\, dt$, unde posito pro toto cono $t = a$, fit $B = \frac{1}{20}\pi ac^4 = \frac{3}{20}Mcc$.

3°. $\int zzdM = C$ pari modo dat $C = \frac{3}{20}Mcc = B$, at $\int yzdM = F$ manifesto evanescit ut ante.

Cum ergo AC sit unus axium principalium, ejus respectu momentum inertiae est $= B + C = \frac{3}{10}Mcc$. Reliqui axes principales sunt diametri omnes sectionis in I ad axem normalis, quorum respectu momentum inertiae est $A + B = \frac{3}{80}M(aa + 4cc)$.

Digitized by Google

COROLL.

505. Casu quo $aa + 4cc = 8cc$, seu $a = 2c$, hoc est AC = BD, omnes rectae per I ductae axium principalium proprietate gaudent, eorumque respectu erit momentum inertiae $= \frac{3}{10} Mcc$.

PROBLEMA. 41.

Fig. 59. 506. Si corpus fuerit globus ex materia homogenea confectus, cujus centrum I et radius IA $= a$, definire ejus momentum inertiae respectu axis cujusvis per ejus centrum transeuntis.

SOLUTIO.

Ob radium IA $= a$, erit area circuli maximi $= \pi aa$, et superficies globi $= 4\pi aa$, hinc ejus soliditas seu massa $M = \frac{4}{3}\pi a^3$. Iam positis pro elemento quocunque dM in Z posito coordinatis IX $= x$, XY $= y$ et YZ $= z$, erit respectu axis AC momentum inertiae $= \int dM (yy + zz)$. Ponatur XZ $= r$, et angulus YXZ $= \varphi$, erit $y = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$, et $dM = rdrd\varphi dx$, unde $\int yy dM = \int r^3 drd\varphi dx = 2\pi \int r^3 drdx$ ob $\int d\varphi = 2\pi$: nunc sumto r variabili, positoque $r = XM = \sqrt{(aa - xx)}$, habebimus $\frac{1}{2}\pi \int dx\,(aa - xx)^2 = \frac{1}{2}\pi (a^4 x - \frac{2}{3} aax^3 + \frac{1}{5} x^5)$. Statuatur $x = a$ pro altero hemisphaerio, et duplum hujus expressionis dabit momentum inertiae quaesitum $= \pi \cdot \frac{8}{15} a^5 = \frac{2}{5} Maa$.

PROBLEMA. 42.

Fig. 60. 507. Si corpus fuerit conoides quodcunque revolutione lineae AMB circa axem AC genitum, ejus axes principales eorumque respectu momenta inertiae invenire.

SOLUTIO.

Sit AC $= a$, et pro curva AX $= t$, et XM $= u$, ita ut detur aequatio inter t et u: erit soliditas seu massa $M = \pi \int uudt$ posito post integrationem $t = a$. Tum vero centrum inertiae erit in I, ut sit AI $= \frac{\int tuudt}{\int uudt}$. Ponatur brevitatis ergo AI $= f$ ut sit $\int tuudt = f \int uudt$: est vero AC unus axium principalium. Iam pro elemento dM in Z posito sint coordinatae IX $= x = f - t$; XY $= y$, et YZ $= z$, ac ponatur XZ $= r$, angulus YXZ $= \varphi$, erit $dM = rdrdtd\varphi$, $y = r\cos\varphi$ et $z = r\sin\varphi$. Nunc considerentur formulae sequentes.

1°. $\int xxdM = \int (f-t)^2 rdrdtd\varphi = 2\pi \int (f-t)^2 rdrdt$ ob $\int d\varphi = 2\pi$. Sit adhuc t constans, et posito $r = XM = u$, fiet $\int xxdM = \pi \int (f-t)^2$

$uudt$

Digitized by Google

$uudt = A$, ideoque $A = \pi ff\int uudt - 2\pi f\int tuudt + \pi\int ttuudt = -\pi ff\int uudt + \pi\int ttuudt = M\left(-ff + \frac{\int ttuudt}{\int uudt}\right)$.

2°. $\int yyd M = \int r^3 drd\varphi \cos\varphi^2 = \pi\int r^3 drdt$ ob $\int d\varphi \cos\varphi^2 = \int d\varphi\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi\right) = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\int 2\varphi$, quae posito $\varphi = 2\pi$ abit in π. Porro prodit $\frac{\pi}{4}\int u^4 dt$ posito $r = u$, ita ut sit $\int yyd M = B = \frac{\pi}{4}\int u^4 dt = \frac{M\int u^4 dt}{4\int uudt}$, cui etiam aequale fit $\int zzd M = C$. At $\int yzd M = F$ evanescit.

His evolutis prodit momentum inertiae respectu axis $AC = B + C = \frac{M\int u^4 dt}{2\int uudt}$, posito post integrationem $t = a$, tum vero in sectione ad AC in I normali omnes diametri locum axium principalium sustinent, eorumque respectu reperitur momentum inertiae $= A + B = M\left(-ff + \frac{4\int ttuudt + \int u^4 dt}{4\int uudt}\right) = M\left(\frac{\int uudt(4tt+uu)}{4\int uudt} - ff\right)$.

EXEMPLUM. 1.

508. Sit corpus hemisphaerium seu AMB quadrans circuli radii $CA = CB = a$: erit $uu = 2at - tt$, hinc $\int uudt = att - \frac{1}{3}t^3 = \frac{2}{3}a^3$, posito $t = a$; porro $\int tuudt = \frac{2}{3}at^3 - \frac{1}{4}t^4 = \frac{5}{12}a^4$, ergo $f = AI = \frac{5}{8}a$ et $CI = \frac{3}{8}a$. Deinde $\int u^4 dt = \int dt\,(4aatt - 4at^3 + t^4) = \frac{4}{3}aat^3 - at^4 + \frac{1}{5}t^5 = \frac{8}{15}a^5$, et $\int ttuudt = \int tdt\,(2at - tt) = \frac{1}{2}at^4 - \frac{1}{5}t^5 = \frac{3}{10}a^5$. Quare respectu axis AC est momentum inertiae $= \frac{M.8a^5.3}{15.4a^3.1} = \frac{2}{5}Maa$, et respectu axis cujusvis alius ad illum in I normalis $= M\left(-\frac{3}{64}aa + \frac{1}{20}aa\right) = \frac{83}{320}Maa$: ita ut illud momentum sit ad hoc ut 128 ad 83.

EXEMPLUM. 2.

509. Sit corpus conus truncatus cujus axis $AC = a$, radius alterius basis $BC = c$, alterius $AD = b$, eritque $u = b + \frac{(c-b)t}{a}$ et $uu = bb + \frac{2b(c-b)t}{a} + \frac{(c-b)^2tt}{aa}$, unde pro centro inertiae I inveniendo, erit $\int uudt = bbt + \frac{b(c-b)tt}{a} + \frac{(c-b)^2t^3}{3aa} = \frac{1}{3}a(bb + bc + cc)$ ideoque soliditas seu massa $M = \frac{1}{3}\pi a(bb + bc + cc)$, deinde $\int tuudt = \frac{1}{2}bbtt + \frac{2b(c-b)t^3}{3a} + \frac{(c-b)^2t^4}{4aa} = \frac{1}{12}\pi aa(bb + 2bc + 3cc)$ unde oritur

Digitized by Google

oritur intervallum $AI = f = \frac{a(bb+2bc+3cc)}{4(bb+bc+cc)}$ et $CI = \frac{a(c+2b)}{4(b+c)}$.

Porro ob $u^4 = b^4 + \frac{4b^3(c-b)t}{a} + \frac{6bb(c-b)^2tt}{aa} + \frac{4b(c-b)^3t^3}{a^3} + \frac{(c-b)^4t^4}{a^4}$ erit $\int u^4 dt = b^4 t + \frac{2b^3(c-b)tt}{a} + \frac{2bb(c-b)^2t^3}{aa} + \frac{b(c-b)^3t^4}{a^3} + \frac{(c-b)^4t^5}{5a^4}$ et facto $t = a$, $\int u^4 dt = \frac{1}{5}a(b^4 + b^3c + bbcc + bc^3 + c^4)$, denique $\int tuudt = \frac{1}{3}bbt^3 + \frac{b(c-b)t^4}{2a} + \frac{(c-b)^2t^5}{5aa} = \frac{1}{30}a^3(bb+3bc+6cc)$.

Ex his colligitur momentum inertiae respectu axis $AC = \frac{3}{10}M.\frac{b^4+b^3c+bbcc+bc^3+c^4}{bb+bc+cc} = \frac{3}{10}M.\frac{b^5-c^5}{b^3-c^3}$.

at respectu axium ad AC in I normalium fit momentum $= \frac{3}{20}M.\frac{b^4+b^3c+bbcc+bc^3+c^4}{bb+bc+cc} + \frac{3}{80}Maa\left(\frac{8(bb+3bc+bcc)}{bb+bc+cc} - \frac{5(bb+2bc+3cc)^2}{(bb+bc+cc)^2}\right)$ quae reducitur ad hanc formam:

$$\frac{3}{20}M.\frac{b^4+b^3c+bbcc+bc^3+c^4}{bb+bc+cc} + \frac{3}{80}Maa\,\frac{(b+c)^4+4bbcc}{(bb+bc+cc)^2}.$$

COROLL. 1.

510. Si $b = c$ prodit casus cylindri, quo fit $AI = f = \frac{1}{2}a$, mom. inert. respectu $AC = \frac{1}{2}Mcc$, et mom. inert. respectu axium ad illum in I normalium $= \frac{1}{4}Mcc + \frac{1}{12}Maa$.

COROLL. 2.

511. Si $b = 0$, prodit casus coni recti, quo fit $AI = f = \frac{3}{4}a$; mom. inert. respectu $AC = \frac{3}{10}Mcc$ et mom. inert. respectu axium ad illum in I normalium $= \frac{3}{20}Mcc + \frac{3}{80}Maa$, ut supra.

COROLL. 3.

512. Ut omnia momenta respectu axium per I ductorum fiant aequalia, debet esse $4(b^4 + b^3c + bbcc + bc^3 + c^4) = aa\frac{(b+c)^4+4bbcc}{bb+bc+cc}$ ideoque datis basibus coni truncati, altitudo $AC = a$, ita debet definiri ut sit $aa = \frac{4(bb+bc+cc)(b^4+b^3c+bbcc+bc^3+c^4)}{(b+c)^4+4bbcc}$.

EXEM-

Digitized by Google

EXEMPLUM. 3.

513. Sit corpus sphaeroides ellipticum conversione semiellipsis AEB circa axem AB natum, in cujus ergo medio I est centrum inertiae. Ponatur semiaxis AI = IB = a, et conjungatus IE = c, erit $uu = \frac{cc}{aa}(2at - tt)$: et in integralibus poni oportet $t = 2a$. Hinc habebimus $\int u u dt = \frac{cc}{aa}(att - \frac{1}{3}t^3) = \frac{4}{3}acc$, ideoque massam $M = \frac{4}{3}\pi acc$: deinde $\int tuudt = \frac{cc}{aa}(\frac{2}{3}at^3 - \frac{1}{4}t^4) = \frac{4}{3}aacc$, ergo AI = $f = a$, porro $\int ttuudt = \frac{cc}{aa}(\frac{1}{2}at^4 - \frac{2}{5}t^5) = \frac{2}{5}a^3cc$, et ob $u^4 = \frac{c^4}{a^4}(4aatt - 4at^3 + t^4)$ erit $\int u^4 dt = \frac{c^4}{a^4}(\frac{4}{3}aat^3 - at^4 + \frac{1}{5}t^5) = \frac{16}{15}ac^4$. Ex his colligitur momentum inertiae respectu axis AB = $\frac{2}{5}Mcc$, at respectu axium ad AB in I normalium = $\frac{1}{5}M(aa + cc)$. Fig. 62.

EXEMPLUM. 4.

514. Si corpus sit lens ex duobus segmentis sphaerae aequalibus composita, seu ortum ex conversione figurae AEB, ex duobus semisegmentis circuli aequalibus AIE et BIE formatae, circa axem AB, in cujus ergo medio I erit centrum inertiae. Ponatur semiaxis AI = BI = a, et IE = IF = b, erit diameter circuli = $\frac{aa+bb}{a}$, quem tantisper ponamus = $2c$, ut sit $c = \frac{aa+bb}{2a}$. Quare fiet $uu = 2ct - tt$, et integralibus superioribus poni debet $t = a$, quo facto ea debebunt duplicari: nisi quod AI = f per se sit = a, ideoque A = $M(aa - \frac{2a\int tuudt + \int ttuudt}{\int uudt})$. Hinc nanciscimur $\int tuudt = \frac{2}{3}a^3c - \frac{1}{4}a^4$; $\int uudt = aac - \frac{1}{3}a^3$ et $M = 2\pi(auc - \frac{1}{3}a^3)$; $\int ttuudt = \frac{1}{2}a^4c - \frac{1}{5}a^5$, et $\int u^4 dt = \frac{4}{3}a^3cc - a^4c + \frac{1}{5}a^5$. Ex his colligitur momentum inertiae respectu axis AB = $\frac{1}{10}M.\frac{20acc - 15aac + 3a^3}{3c - a} = \frac{1}{10}M.\frac{a^4 + 5aabb + 10b^4}{aa + 3bb}$ at respectu axium EF ad AB in I normalium: Fig. 63.

$$\frac{1}{20}M\left(\frac{a^3 - 5aac + 20acc}{3c - a}\right) = \frac{1}{20}M.\frac{7a^4 + 15aabb + 10b^4}{aa + 3bb}.$$

Digitized by Google

PROBLEMA. 42.

515. Si corpus fuerit parallelepipedum rectangulum, invenire ejus axes principales, eorumque respectu momenta inertiae.

SOLUTIO.

Fig. 64. Sit rectangulum BD*bd* basis parallelepipedi, cujus latera sint B*b* $= 2a$, BD $= 2b$, altitudo vero $= 2c$, atque manifestum est, in puncto medio parallelepipedi fore ejus centrum inertiae, et axes principales fore tres rectas per id punctum lateribus parallelas. Quaeratur ergo momentum inertiae respectu axis altitudini paralleli, qui basi in puncto medio G perpendiculariter insistet. Consideretur hoc rectangulum BD*bd* tanquam sectio basi parallela a centro inertiae distans intervallo $= x$, ac ponatur GY $= y$, et YZ $= z$, erit $dxdydz$ elementum soliditatis seu massae dM, unde fit M $= 8abc$. Tum vero habebimus $\int xxdM = \int xx\,dxdydz$, et bis integrando per y et z variabiles, ponendoque $y = a$, et $z = b$, duplicentur integralia, ut per totam sectionem extendantur, erit $\int xxdM = 4ab\int xxdx = \frac{4}{3}abx^3$: jam posito $x = c$, ac duplicando, erit per totum parallelepipedum $\int xxdM = A = \frac{8}{3}abc^3 = \frac{1}{3}Mcc$, simili modo erit $\int yydM = B = \frac{1}{3}Maa$ et $\int zzdM = C = \frac{1}{3}Mbb$: atque $\int yzdM = F = 0$. Ex his concluditur momentum inertiae respectu axis principalis altitudini paralleli seu ad basin BD*bd* perpendicularis $= B + C = \frac{1}{3}M(aa + bb)$: deinde momentum inertiae respectu axis lateri B*b* paralleli $= \frac{1}{3}M(bb + cc)$, et respectu axis lateri BD paralleli $= \frac{1}{3}M(aa + cc)$.

COROLL. 1.

Fig. 65. 516. Si ergo ABCD*abcd* fuerit tale parallelepipedum rectangulum, cujus massa sit $= M$: erunt ejus axes principales lateribus AB, AC, AD paralleli per punctum medium transeuntes, eritque momentum inertiae

$$\text{respectu axis lateri } \begin{Bmatrix} AB \\ AC \\ AD \end{Bmatrix} \text{ paralleli } = \begin{Bmatrix} \frac{1}{12}M(AC^2 + AD^2) \\ \frac{1}{12}M(AB^2 + AD^2) \\ \frac{1}{12}M(AB^2 + AC^2) \end{Bmatrix}$$

COROLL. 2.

517. Si corpus fuerit cubus, cujus latus $= a$, haec tria momenta fiunt inter se aequalia; ideoque momenta inertiae respectu omnium plane axium per centrum cubi ductorum erunt inter se aequalia et quidem $= \frac{1}{6}Maa$. Talis autem aequalitas in omnibus corporibus regularibus locum habere debet.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA 143.

518. Si corpus fuerit globus excavatus, ut cavitas sit etiam sphaera eodem centro praedita, definire ejus momentum inertiae respectu omnium axium per ejus centrum ductorum. Fig. 66.

SOLUTIO.

Sit I centrum, et radius globi IA $= a$, cavitatis vero $Ia = b$, ut crassities crustae sphaericae sit $= a - b = Aa$, erit ergo massa hujus globi cavi $= \frac{4}{3}\pi(a^3 - b^3)$, quae ponatur $= M$; omnes autem axes per centrum I ductos paria habere momenta inertiae, per se est manifestum; quaeramus ergo momentum inertiae respectu axis AB. Ac si globus esset solidus, ob ejus massam $= \frac{4}{3}\pi a^3$, foret ejus momentum inertiae $= \frac{4}{3}\pi a^3 \cdot \frac{2}{5}aa = \frac{8}{15}\pi a^5$, globi autem e medio sublati $= \frac{8}{15}\pi b^5$, quo ab illo subtracto remanere debet momentum inertiae globi cavi, quod ergo erit $= \frac{8}{15}\pi(a^5 - b^5) = \frac{2}{5}M.\frac{a^5 - b^5}{a^3 - b^3}$. Habebitur ergo momentum inertiae pro globo excavato respectu omnium axium per centrum ductorum $= \frac{2}{5}M.\frac{a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4}{aa + ab + bb}$.

COROLL. 1.

519. Si $b = 0$, prodit casus globi solidi, cujus radius $= a$, pro quo momentum inertiae est ut supra $= \frac{2}{5}Maa$ respectu omnium axium per centrum ductorum.

COROLL. 2.

520. Si crusta haec sphaerica fuerit tenuissima, ut sit proxime $b = a$, erit momentum inertiae $= \frac{2}{3}Maa$, quae formula valet pro superficie sphaerica. Sin autem crassitiem Aa, quae sit $= c = a - b$, omnino negligere nolimus, erit momentum $= \frac{2}{3}M.\frac{5a^4c - 10a^3c^2}{3aac - 3acc} = \frac{2}{3}M(aa - ac)$.

SCHOLION.

521. Hi casus abunde sufficiunt, non solum ut hinc pro pluribus corporibus momenta inertiae depromere, sed etiam si alia corpora occurrant, calculum eo facilius instituere valeamus. Quamobrem progrediamur ad motus gyratorios corporum a gravitate sollicitatorum definiendos, quandoquidem hic est praecipuus casus, ad quem haec tractatio accommodari solet.

Digitized by Google

CAPUT VII.

DE MOTU OSCILLATORIO CORPORUM GRAVIUM.

PROBLEMA 44.

522. Si corpus rigidum fuerit mobile circa axem horizontalem fixum, ejusque motus a sola gravitate turbetur, determinare mutationem momentaneam in motu gyratorio productam.

SOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 67. Communem hic gravitatis hypothesin assumo, qua singula corporis elementa massis proportionaliter deorsum urgentur secundum directiones inter se parallelas. Quatenus ergo corpus est rigidum, his omnibus viribus aequivalet una vis ponderi corporis aequalis, cujus directio deorsum tendens per ejus centrum inertiae transit. Quare si corporis massa dicatur $= M$, ejusque centrum inertiae sit in I, indeque deorsum ducatur recta verticalis IG, ob gravitatem corpus sollicitabitur in directione IG a vi, quae ipsius massae M aequalis est statuenda, quandoquidem ipsam massam M per pondus hujus corporis exprimimus. Porro cum axis gyrationis sit horizontalis, ad eum normaliter constituatur planum per centrum inertiae I transiens, quod erit verticale, et ipso plano tabulae referatur: axis igitur gyrationis ad hoc planum normalis per punctum O trajectus concipiatur, unde ad I ducta recta OI exhibet distantiam centri inertiae I ab axe gyrationis. His praemissis teneat nunc corpus AEBF situm in figura repraesentatum, ductaque verticali OC, ex angulo COI situs corporis innotescit. Ponatur intervallum $OI = f$, et ad tempus $= t$, angulus $COI = \varphi$, erit vis $IG = M$ momentum respectu axis gyrationis $= Mf \sin \varphi$, tendens ad angulum COI minuendum, quae in probl. 22. loco momenti Vf est substituenda. Praeterea vero necesse est nosse momentum inertiae corporis respectu axis gyrationis O, ibi per $\int rrdM$ indicatum: hunc in finem concipiatur axis per ipsum centrum inertiae I transiens axi gyrationis parallelus, cujus respectu sit momentum inertiae corporis $= Mkk$, eritque ejusdem momentum inertiae respectu axis gyrationis $O = M(ff+kk)$ ob intervallum horum axium $OI = f$. Hinc si corpus ita gyretur, ut recta OI accedat ad verticalem OC, fueritque celeritas angularis $= v$, quia

Digitized by Google

quia ea a vi ſollicitante augetur, per §. 408. erit $d\omega = \frac{2g.Mf\sin\varphi}{M(ff+kk)}\,dt$ ſeu $d\omega = \frac{2fg\,dt\sin\varphi}{ff+kk}$; ſin autem recta OI recederet a verticali OI celeritate angulari $= \omega$, foret $d\omega = \frac{-2fg\,dt\sin\varphi}{ff+kk}$. Cum autem illo caſu ſit $\omega = \frac{-d\varphi}{dt}$, hoc vero $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, ſumto dt conſtante pro utroque erit $dd\varphi = \frac{-2fg\,dt^2\sin\varphi}{ff+kk}$, ubi ſignum $-$ adeſt, quia momentum vis ſollicitantis tendit ad angulum φ minuendum.

COROLL. 1.

523. Si corpus in ſitu AERF nullum adhuc habeat motum, a gravitate ita rectam verticalem OC verſus urgebitur, ut tempusculo dt eo ſit acceſſurum per angulum $= \frac{fg\,dt^2\sin\varphi}{ff+kk}$, qui eſt infinite parvus ſecundi ordinis.

COROLL. 2.

524. Si ergo corpus fuerit in quiete, in quiete perſiſtere nequit niſi ſit $\sin\varphi = 0$, hoc eſt niſi centrum inertiae I in recta verticali OC verſetur. Quare ſi corpus quodcunque hoc modo ſuſpendatur, in quiete eſſe nequit, niſi recta OI ſit verticalis, quod fit ſi centrum inertiae locum vel imum vel ſummum obtineat.

COROLL. 3.

525. Quoties autem recta OI fuerit obliqua, corpus ob gravitatem ad motum ſollicitabitur, ac ſi jam habuerit motum, ejus motus perturbabitur, vel accelerando vel retardando, prout motus vel ad OC accedat vel ab eo recedat.

COROLL. 4.

526. Patet etiam, ſi axis per ipſum centrum inertiae I tranſeat, ut ſit OI $= f = 0$, momentum gravitatis evaneſcere, motumque gyratorium propterea plane non turbari. Hoc ergo caſu corpus vel quieſcet, vel uniformiter circa axem O gyrabitur.

Digitized by Google

CAPUT VII.

DE MOTU OSCILLATORIO CORPORUM GRAVIUM.

PROBLEMA 44.

522. Si corpus rigidum fuerit mobile circa axem horizontalem fixum, ejusque motus a sola gravitate turbetur, determinare mutationem momentaneam in motu gyratorio productam.

SOLUTIO.

Tab. IX. Fig. 67. Communem hic gravitatis hypothesin assumo, qua singula corporis elementa massis proportionaliter deorsum urgentur secundum directiones inter se parallelas. Quatenus ergo corpus est rigidum, his omnibus viribus aequivalet una vis ponderi corporis aequalis, cujus directio deorsum tendens per ejus centrum inertiae transit. Quare si corporis massa dicatur $= M$, ejusque centrum inertiae sit in I, indeque deorsum ducatur recta verticalis IG, ob gravitatem corpus sollicitabitur in directione IG a vi, quae ipsius massae M aequalis est statuenda, quandoquidem ipsam massam M per pondus hujus corporis exprimimus. Porro cum axis gyrationis sit horizontalis, ad eum normaliter constituatur planum per centrum inertiae I transiens, quod erit verticale, et ipso plano tabulae referatur: axis igitur gyrationis ad hoc planum normalis per punctum O trajectus concipiatur, unde ad I ducta recta OI exhibet distantiam centri inertiae I ab axe gyrationis. His praemissis teneat nunc corpus AEBH situm in figura repraesentatum, ductaque verticali OC, ex angulo COI situs corporis innotescit. Ponatur intervallum $OI = f$, et ad tempus $= t$, angulus $COI = \varphi$, erit vis IG $= M$ momentum respectu axis gyrationis $= Mf \sin \varphi$, tendens ad angulum COI minuendum, quae in probl. 22. loco momenti Vf est substituenda. Praeterea vero necesse est nosse momentum inertiae corporis respectu axis gyrationis O, ibi per $\int r r dM$ indicatum: hunc in finem concipiatur axis per ipsum centrum inertiae I transiens axi gyrationis parallelus, cujus respectu sit momentum inertiae corporis $= Mkk$, eritque ejusdem momentum inertiae respectu axis gyrationis $O = M(ff + kk)$ ob intervallum horum axium $OI = f$. Hinc si corpus ita gyretur, ut recta OI accedat ad verticalem OC, fueritque celeritas angularis $= u$, quia

Digitized by Google

quia ea a vi ſollicitante augetur, per §. 408. erit $d\omega = \frac{2g.Mf\sin\varphi}{M(ff+kk)}\,dt$ ſeu $d\omega = \frac{2fg\,dt\sin\varphi}{ff+kk}$; ſin autem recta OI recederet a verticali OI celeritate angulari $=\omega$, foret $d\omega = \frac{-2fg\,dt\sin\varphi}{ff+kk}$. Cum autem illo caſu ſit $\omega = \frac{-d\varphi}{dt}$, hoc vero $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, ſumto dt conſtante pro utroque erit $dd\varphi = \frac{-2fg\,dt^2\sin\varphi}{ff+kk}$, ubi ſignum — adeſt, quia momentum vis ſollicitantis tendit ad angulum φ minuendum.

COROLL. 1.

523. Si corpus in ſitu AEBF nullum adhuc habeat motum, a gravitate ita rectam verticalem OC verſus urgebitur, ut tempusculo dt eo ſit acceſſurum per angulum $= \frac{fg\,dt^2\sin\varphi}{ff+kk}$, qui eſt infinite parvus ſecundi ordinis.

COROLL. 2.

524. Si ergo corpus fuerit in quiete, in quiete perſiſtere nequit niſi ſit $\sin\varphi = 0$, hoc eſt niſi centrum inertiae I in recta verticali OC verſetur. Quare ſi corpus quodcunque hoc modo ſuſpendatur, in quiete eſſe nequit, niſi recta OI ſit verticalis, quod fit ſi centrum inertiae locum vel imum vel ſummum obtineat.

COROLL. 3.

525. Quoties autem recta OI fuerit obliqua, corpus ob gravitatem ad motum ſollicitabitur, ac ſi jam habuerit motum, ejus motus perturbabitur, vel accelerando vel retardando, prout motus vel ad OC accedat vel ab eo recedat.

COROLL. 4.

526. Patet etiam, ſi axis per ipſum centrum inertiae I tranſeat, ut ſit OI $= f = 0$, momentum gravitatis evaneſcere, motumque gyratorium propterea plane non turbari. Hoc ergo caſu corpus vel quieſcet, vel uniformiter circa axem O gyrabitur.

Digitized by Google

SCHOLION.

527. Hic ſtatim notari convenit, corpus non perinde moveri, ac ſi tota ejus maſſa in ipſius centro inertiae I eſſet collecta, quemadmodum in motu progreſſivo uſu venire vidimus. Si enim hic tota corporis maſſa M revera in centro inertiae I eſſet collecta, ejus momentum inertiae reſpectu axis per I ducti evaneſceret, foretque $kk = 0$; motusque ergo ita perturbaretur, ut eſſet $dd\varphi = \frac{-2gdt^2 \sin\varphi}{f}$, quae formula major eſt quam caſu propoſito. Unde intelligitur, motum corporis extenſi, quale hic contemplamur, minus a gravitate perturbari, quam ſi tota corporis maſſa in centro inertiae eſſet collecta. Verum infra videbimus, dari in recta OI aliud punctum magis ab axe O remotum, in quo ſi tota corporis maſſa eſſet collecta, motus eandem perturbationem eſſet paſſurus, quod punctum in motu gyratorio imprimis notari meretur, quoniam eſt id ipſum quod vulgo *centrum oſcillationis* appellari ſolet, et de cujus inventione plurima paſſim occurrunt praecepta.

PROBLEMA 45.

Fig. 67. 528. Si corpus rigidum AEBF fuerit mobile circa axem horizontalem, ejusque detur ſitus et celeritas initio motus, ad tempus quodvis invenire ejus ſitum et celeritatem.

SOLUTIO.

Manentibus omnibus uti in praecedente problemate, ſcilicet maſſa corporis $= M$, diſtantia centri inertiae I ab axe gyrationis O ſcilicet $OI = f$, et momento inertiae reſpectu axis ipſi axi gyrationis paralleli et per I tranſeuntis $= Mkk$; teneat corpus elapſo tempore $= t$ ſitum in figura repraeſentatum, ſitque angulus $COI = \varphi$, exiſtente CO recta verticali, atque ſumto elemento dt conſtante pervenimus ad hanc aequationem $dd\varphi = \frac{-2fgdt^2 \sin\varphi}{ff+kk}$, quae per $2d\varphi$ multiplicata et integrata praebet

$$d\varphi^2 = \alpha dt^2 + \frac{4fgdt^2 \cos\varphi}{ff+kk}$$

unde cognoſcitur quadratum celeritatis $vv = \alpha + \frac{4fg\cos\varphi}{ff+kk}$. Deinde poſito

posito brevitatis gratia $\frac{4fg}{ff+kk} = \lambda$, ob $d\varphi^2 = dt^2 (\alpha + \lambda \cos\varphi)$ reperitur $ds = \frac{d\varphi}{r(\alpha+\lambda\cos\varphi)}$ et $t = \int \frac{d\varphi}{r(\alpha+\lambda\cos\varphi)}$: ubi constans α et altera in ultima integratione ingressa ex statu initiali dato debent definiri.

COROLL. 1.

529. Evanescente angulo COI $= \varphi$, fit celeritas angularis $v = r(\alpha + \frac{4fg}{ff+kk})$ omnium maxima, in aequalibus autem elongationibus rectae OI a verticali OC celeritates sunt aequales: et nisi constans α sit minor, quam $\frac{4fg}{ff+kk}$, corpus integras revolutiones circa axem absolvet: quoniam tum pro angulo $\varphi = 180°$ celeritas angularis adhuc est realis.

COROLL. 2.

530. Sin autem fuerit $\alpha < \frac{4fg}{ff+gg}$, angulus COI $= \varphi$ non ultra certum limitem crescere potest, corpusque cum eo pertigerit rursus descendet, motumque oscillatorium peraget: ac ducta IK horizontali ob OK $= f\cos\varphi$, angulo elongationis COI respondebit celeritas angularis $v = r(\alpha + \frac{4g.OK}{ff+kk})$.

SCHOLION.

531. Sive corpus integras revolutiones absolvat, sive oscillando eat redeatque, determinatio motus eundem calculum postulat, atque motus penduli simplicis, quo corpusculum infinite parvum filo inertiae experti alligatum circa axem horizontalem gyratur. Quem motum cum jam fusius supra exposuerimus, superfluum foret, eosdem calculos hic repetere: sufficiet igitur, pro quovis casu pendulum simplex assignasse, quod pari motu angulari feratur. Atque hic quidem tantum longitudo hujus penduli simplicis in computum venit, cum motus ejus solum ab ejus longitudine pendeat; siquidem initio utrique eundem motum angularem tribuimus.

DEFINITIO. 9.

532. Pro motu gyratorio vel oscillatorio corporis cujusvis gravis circa axem horizontalem, *pendulum simplex isochronum* vocatur, quod cum

cum semel in pari a recta verticali elongatione parem celeritatem angularem acceperit, deinceps continuo simili motu angulari feratur.

EXPLICATIO.

Fig. 67. 533. Si corpus ponatur quodcunque AEBF, quod a sola gravitate sollicitatum circa axem horizontalem O gyretur, primo ejus centrum inertiae I spectandum est, quod si in recta verticali OC versetur, corporis situm naturalem, in quo acquiescat, indicat: angulus autem COI *elongatio a situ naturali* vocatur. Quodsi jam huic corpori in data elongatione datus motus angularis fuerit impressus, pendulum simplex isochronum ita debet esse comparatum, ut si ei in pari elongatione aequalis motus angularis imprimatur, deinceps hujus motus perpetuo sit respondurus motui corporis propositi. Vel quia totum negotium a longitudine hujus penduli simplicis pendet, si id fuerit OS atque ex communi axe O suspensum concipiatur, motu suo perpetuo motum corporis AEBF comitabitur, dummodo semel aequalem motum gyratorium acceperit. Perinde quidem est, sive hoc pendulum simplex eidem axi applicatum concipiatur, sive secus: sed quoniam utrinque elongationes a situ verticali OC perpetuo eaedem esse debent, corporisque elongatio ex situ rectae OI est aestimanda, pendulum simplex commodissime in puncto O suspensum consideratur, ut ejus situs OS perpetuo in rectam OI incidat, totaque quaestio ad determinationem puncti S revocetur.

COROLL. 1.

534. Invento hoc puncto S in recta OI producta, corpus perinde movebitur, ac si tota ejus massa in ipso hoc puncto S esset collecta: tum enim ob extensionem evanescentem habetur pendulum simplex longitudinis OS.

COROLL. 2.

538. Hoc ergo punctum S quaeri debet in recta, quae per centrum inertiae corporis ad axem gyrationis normaliter ducitur, etiamsi hic non sit necessarium, ut pendulum simplex OS ex eodem axis puncto O suspensum statuatur.

SCHOLION.

536. Cum istud pendulum simili motu latum ob massae evanescentiam *simplex* vocetur, ad hunc modum corpora quaevis extensa circa axem fixum mobilia vocari solent *pendula composita*; ita ut quaestio huc

Digitized by Google

huc reducatur, ut proposito quocunque pendulo composito, quod scilicet sit corpus rigidum, assignetur pendulum simplex isochronum, quam quaestionem nunc quidem facillime resolvere poterimus. Ceterum monendum est, filum, quo pendulum simplex axi alligatum intelligimus, non solum inertiae expers statui, sed etiam rigidum concipi oportere, ne ulla inflexio calculum turbare queat.

PROBLEMA 46.

537. Proposito corpore quocunque rigido et gravi AEBF circa axem horizontalem fixum O mobili, definire pendulum simplex isochronum OS. Fig. 67.

SOLUTIO.

Posita massa totius corporis = M ejusque centro inertiae in I, hinc ad axem ducatur recta normalis IO = f, quae jam a verticali OC distet angulo COI = φ: tum vero sit Mkk momentum inertiae corporis respectu axis per I ducti et axi gyrationis paralleli. His positis, quicunque motus corpori initio fuerit impressus, elapso tempore = t, motus variatio hac formula exprimitur: $dd\varphi = \frac{-2fg\,dt^2 \sin\varphi}{ff+kk}$. Ponatur nunc penduli simplicis isochroni longitudo OS = l, quod cum eodem angulo COS = φ a situ verticali distet, ejus motus hanc variationem patietur, ut sit $dd\varphi = \frac{-2g\,dt^2 \sin\varphi}{l}$, quae quidem formula ex praecedente fluit, ponendo $k = 0$ et $f = l$. Quare cum eadem variatio utrique evenire debeat, obtinemus $l = \frac{ff+kk}{f}$ seu $l = f + \frac{kk}{f}$.

COROLL. 1.

538. Longitudo ergo penduli simplicis isochroni OS superat distantiam centri inertiae I ab axe gyrationis O, estque intervallum IS = $\frac{kk}{f}$. Cognita vero longitudine OS = l, erit $kk = f(l-f) =$ OI. IS, ita ut pro eodem corpore rectangulum OI. IS sit constans.

COROLL. 2.

539. Si pro eodem corpore distantia OI = f varietur, patet, tam casu $f = 0$, quam $f = \infty$, pendulum simplex isochronum l evadere infinitum;

Digitized by Google

finitum"; brevissimum autem erit, si capiatur $f = k$, quo casu fit $l = 2k$; praeterea semper est $l > 2k$.

COROLL. 3.

540. Invento pendulo simplici isochrono l, quoniam oscillationes minimae corporis perinde atque istius penduli sunt isochronae, tempus cujusque oscillationis erit $= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$ min. sec. (215.). Hinc si prodeat $l = \frac{2g}{\pi\pi}$, singulae oscillationes minimae corporis absolventur minutis secundis.

SCHOLION.

541. Hinc colligitur methodus facilis cujusque corporis momentum inertiae practice definiendi. Suspenso enim corpore ex axe horizontali, circa quem liberrime gyrari queat, omni cura primo definiatur distantia centri inertiae I ab axe gyrationis O, nempe $OI = f$, quod etiam practice fieri potest: deinde corpus ad minimas oscillationes peragendas incitetur, pluribusque dato tempore numeratis, inde colligatur tempus unius oscillationis, quod sit $= \tau$ min. sec. hincque habebitur $l = \frac{2g\tau\tau}{\pi\pi}$: quo invento erit $kk = f(l - f)$, et pondus corporis M per kk multiplicatum dabit momentum inertiae, respectu axis per ejus centrum inertiae transeuntis et axi gyrationis paralleli. Potest etiam hoc experimentum multiplicari, dum corpus successive ex variis axibus, qui tamen sint inter se paralleli, suspenditur, quo certiores de vero valore kk reddamur. Quin etiam hinc vicissim longitudo penduli simplicis singulis minutis secundis oscillantis explorari potest, quandoquidem neque pendulis simplicibus uti licet, neque altitudo lapsus g uno minuto secundo absoluta satis accurate per experimenta lapsus determinari potest. Hinc autem pro corpore suspenso quantitates f et kk accurate nosse oportet, unde colligitur $l = f + \frac{kk}{f}$: tum si tempus unius oscillationis minimae τ sit observatum, habebitur $g = \frac{\pi\pi l}{2\tau\tau}$, hincque longitudo penduli simplicis singulis minutis secundis oscillantis $\frac{2g}{\pi\pi} = \frac{l}{\tau\tau}$.

DEFI-

DEFINITIO. 10.

542. Centrum oscillationis in pendulo composito est punctum, in quo si tota corporis massa esset collecta, idem motus oscillatorius esset proditurus. Sumitur autem in recta, quae per centrum inertiae corporis transiens ad axem gyrationis est normalis.

COROLL. 1.

543. Distantia ergo centri oscillationis ab axe gyrationis aequalis est longitudini penduli simplicis isochroni; ac semper ab axe gyrationis O magis distat, quam centrum inertiae, intervallo $IS = \frac{kk}{f}$.

COROLL. 2.

544. Ad centrum igitur oscillationis S inveniendum nosse oportet momentum inertiae corporis respectu axis per ejus centrum inertiae I transeuntis et axi gyrationis paralleli, quod si fuerit $= Mkk$, dividi debet per Mf, hoc est per productum ex massa corporis M in distantiam axis gyrationis a centro inertiae $OI = f$, et quotus $\frac{Mkk}{Mf}$ ostendet distantiam centri oscillationis a centro inertiae.

SCHOLION.

545. Hoc modo investigatio motus pendulorum compositorum ad centri oscillationis investigationem perduci solet, etsi ad hoc sufficit, longitudinem penduli simplicis isochroni nosse, neque ulla ratio urget, ut hoc pendulum eidem axi suspensionis, et quidem secundum rectam per centrum inertiae ad axem suspensionis normaliter ductam applicatum concipiatur. Verum hic modus rem concipiendi est commodissimus, et si corpus in situ quietis pendeat, ut recta per centrum inertiae ad axem normaliter ducta simul sit verticalis, centrum oscillationis in eadem recta profundius quam centrum inertiae erit situm; neque enim hic opus est, ut corpus tanquam in motu spectetur. Ita recta OI in verticalem OC incidens consideratur, in qua erit centrum oscillationis S profundius situm centro inertiae I, quod hic revera nomen *centri gravitatis* obtinet, ita ut sit intervallum $IS = \frac{Mkk}{Mf} = \frac{kk}{f}$. Quare calculus centri oscillationis facillime expeditur calculo, quem supra pro momento inertiae inveniendo tradidimus.

Digitized by Google

finitum"; brevissimum autem erit, si capiatur $f = k$, quo casu fit $l = 2k$; praeterea semper est $l > 2k$.

COROLL. 3.

540. Invento pendulo simplici isochrono l, quoniam oscillationes minimae corporis perinde atque istius penduli sunt isochronae, tempus cujusque oscillationis erit $= \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}$ min. sec. (215.). Hinc si prodeat $l = \frac{2g}{\pi\pi}$, singulae oscillationes minimae corporis absolventur minutis secundis.

SCHOLION.

541. Hinc colligitur methodus facilis cujusque corporis momentum inertiae practice definiendi. Suspenso enim corpore ex axe horizontali, circa quem liberrime gyrari queat, omni cura primo definiatur distantia centri inertiae I ab axe gyrationis O, nempe OI $= f$, quod etiam practice fieri potest: deinde corpus ad minimas oscillationes peragendas incitetur, pluribusque dato tempore numeratis, inde colligatur tempus unius oscillationis, quod sit $= \tau$ min. sec. hincque habebitur $l = \frac{2g\tau\tau}{\pi\pi}$: quo invento erit $kk = f(l - f)$, et pondus corporis M per kk multiplicatum dabit momentum inertiae, respectu axis per ejus centrum inertiae transeuntis et axi gyrationis parallelli. Potest etiam hoc experimentum multiplicari, dum corpus successive ex variis axibus, qui tamen sint inter se paralleli, suspenditur, quo certiores de vero valore kk reddamur. Quin etiam hinc vicissim longitudo penduli simplicis singulis minutis secundis oscillantis explorari potest, quandoquidem neque pendulis simplicibus uti licet, neque altitudo lapsus g uno minuto secundo absoluta [illegible] rate per experimenta lapsus determinari potest. Hinc [illegible] pore suspenso quantitates f et kk accurate nosse oporte[illegible] tur $l = f + \frac{kk}{f}$: tum si tempus unius oscillationis [illegible] sit vatum, habebitur $g = \frac{\pi\pi l}{2\tau\tau}$, hincque longitu[illegible] gulis minutis secundis oscillantis $\frac{2g}{\pi\pi} = \frac{l}{\tau}$

Digitized by Google

DEFINITIO. 10.

542. Centrum oſcillationis in pendulo compoſito eſt punctum, in quo ſi tota corporis maſſa eſſet collecta, idem motus oſcillatorius eſſet proditurus. Sumitur autem in recta, quae per centrum inertiae corporis tranſiens ad axem gyrationis eſt normalis.

COROLL. 1.

543. Diſtantia ergo centri oſcillationis ab axe gyrationis aequalis eſt longitudini penduli ſimplicis iſochroni: ac ſemper ab axe gyrationis O magis diſtat, quam centrum inertiae, intervallo $IS = \frac{kk}{f}$.

COROLL. 2.

544. Ad centrum igitur oſcillationis S inveniendum noſſe oportet momentum inertiae corporis reſpectu axis per ejus centrum inertiae I tranſeuntis et axi gyrationis paralleli, quod ſi fuerit $= Mkk$, dividi debet per Mf, hoc eſt per productum ex maſſa corporis M in diſtantiam axis gyrationis a centro inertiae $OI = f$, et quotus $\frac{Mkk}{Mf}$ oſtendet diſtantiam centri oſcillationis a centro inertiae.

SCHOLION.

545. Hoc modo inveſtigatio motus pendulorum [illegible] ad centri oſcillationis inveſtigationem perduci ſolet, etſi [illegible] cit, longitudinem penduli ſimplicis iſoch[illegible] noſſe, [illegible] urget, ut hoc pendulum eidem axi ſuſ[illegible], et [illegible] rectam per centrum inertiae ad axem [illegible] applicatum [illegible]cipiatur. [illegible] hic [illegible] modiſſim[illegible] ſi corpus [illegible]uieti[illegible] inertia[illegible] norm[illegible]ta ſi[illegible] lationi[illegible] recta [illegible]us q[illegible] nequ[illegible]ic opus [illegible]rpus [illegible] rect[illegible]erticalem [illegible]ens [illegible] oſc[illegible] profu[illegible] ce[illegible]

m[illegible]*ravitat*[illegible]ita [illegible]

O[illegible]lus ce[illegible]oni[illegible]

[illegible]oment[illegible]ver[illegible]

Digitized by Google

finitum"; brevissimum autem erit, si capiatur $f = k$, quo casu fit $l = 2k$; praeterea semper est $l > 2k$.

COROLL. 3.

540. Invento pendulo simplici isochrono l, quoniam oscillationes minimae corporis perinde atque istius penduli sunt isochronae, tempus cujusque oscillationis erit $= \frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{2g}}$ min. sec. (215.). Hinc si prodeat $l = \frac{2g}{\pi\pi}$, singulae oscillationes minimae corporis absolventur minutis secundis.

SCHOLION.

541. Hinc colligitur methodus facilis cujusque corporis momentum inertiae practice definiendi. Suspenso enim corpore ex axe horizontali, circa quem liberrime gyrari queat, omni cura primo definiatur distantia centri inertiae I ab axe gyrationis O, nempe OI $= f$, quod etiam practice fieri potest: deinde corpus ad minimas oscillationes peragendas incitetur, pluribusque dato tempore numeratis, inde colligatur tempus unius oscillationis, quod sit $= \tau$ min. sec. hincque habebitur $l = \frac{2g\tau\tau}{\pi\pi}$: quo invento erit $kk = f(l - f)$, et pondus corporis M per kk multiplicatum dabit momentum inertiae, respectu axis per ejus centrum inertiae transeuntis et axi gyrationis paralleli. Potest etiam hoc experimentum multiplicari, dum corpus successive ex variis axibus, qui tamen sint inter se paralleli, suspenditur, quo certiores de vero valore kk reddamur. Quin etiam hinc vicissim longitudo penduli simplicis singulis minutis secundis oscillantis explorari potest, quandoquidem neque pendulis simplicibus uti licet, neque altitudo lapsus g uno minuto secundo absoluta satis accurate per experimenta lapsus determinari potest. Hinc autem pro corpore suspenso quantitates f et kk accurate nosse oportet, unde colligitur $l = f + \frac{kk}{f}$: tum si tempus unius oscillationis minimae τ sit observatum, habebitur $g = \frac{\pi\pi l}{2\tau\tau}$; hincque longitudo penduli simplicis singulis minutis secundis oscillantis $\frac{2g}{\pi\pi} = \frac{l}{\tau\tau}$.

DEFI-

DEFINITIO. 10.

542. Centrum oscillationis in pendulo composito est punctum, in quo si tota corporis massa esset collecta, idem motus oscillatorius esset proditurus. Sumitur autem in recta, quae per centrum inertiae corporis transiens ad axem gyrationis est normalis.

COROLL. 1.

543. Distantia ergo centri oscillationis ab axe gyrationis aequalis est longitudini penduli simplicis isochroni; ac semper ab axe gyrationis O magis distat, quam centrum inertiae, intervallo $IS = \frac{kk}{f}$.

COROLL. 2.

544. Ad centrum igitur oscillationis S inveniendum nosse oportet momentum inertiae corporis respectu axis per ejus centrum inertiae I transeuntis et axi gyrationis paralleli, quod si fuerit $= Mkk$, dividi debet per Mf, hoc est per productum ex massa corporis M in distantiam axis gyrationis a centro inertiae $OI = f$, et quotus $\frac{Mkk}{Mf}$ ostendet distantiam centri oscillationis a centro inertiae.

SCHOLION.

545. Hoc modo investigatio motus pendulorum compositorum ad centri oscillationis investigationem perduci solet, etsi ad hoc sufficit, longitudinem penduli simplicis isochroni nosse, neque ulla ratio urget, ut hoc pendulum eidem axi suspensionis, et quidem secundum rectam per centrum inertiae ad axem suspensionis normaliter ductam applicatum concipiatur. Verum hic modus rem concipiendi est commodissimus, et si corpus in situ quietis pendeat, ut recta per centrum inertiae ad axem normaliter ducta simul sit verticalis, centrum oscillationis in eadem recta profundius quam centrum inertiae erit situm; neque enim hic opus est, ut corpus tanquam in motu spectetur. Ita recta OI in verticalem OC incidens consideratur, in qua erit centrum oscillationis S profundius situm centro inertiae I, quod hic revera nomen *centri gravitatis* obtinet, ita ut sit intervallum $IS = \frac{Mkk}{Mf} = \frac{kk}{f}$. Quare calculus centri oscillationis facillime expeditur calculo, quem supra pro momento inertiae inveniendo tradidimus.

Digitized by Google

EXEMPLUM.

Fig. 68. 546. Experimenta ante memorata globo ex materia homogenea confecto inſtitui ſolent, qui ope fili OB ſuſpenſus ad minimas oſcillationes incitatur, ubi quidem filum tam tenue eſt ſumendum, ut ejus maſſa prae globo pro nihilo haberi liceat. Sit igitur radius globi BI $= b$, et diſtantia puncti ſuſpenſionis O a centro globi I, quod ſimul ejus eſt centrum inertiae vel gravitatis, nempe OI $= f$, erit ut ſupra invenimus $kk = \frac{2}{5}bb$. Quare centrum oſcillationis erit in S, ut ſit IS $= \frac{2bb}{5f}$, ſeu oſcillationes convenient cum oſcillationibus penduli ſimplicis, cujus longitudo eſt $= f + \frac{2bb}{5f}$. Ut ergo hoc pendulum ſingulis minutis ſecundis oſcilletur, neceſſe eſt ſit $f + \frac{2bb}{5f} = \frac{2g}{\pi\pi}$ ſeu $ff = \frac{2gf}{\pi\pi} - \frac{2}{5}bb$, unde $f = \frac{g}{\pi\pi} \pm \sqrt{(\frac{gg}{\pi^4} - \frac{2}{5}bb)}$, ita ut pro f duplex habeatur valor, qui ſimul ſumti dent $\frac{2g}{\pi\pi}$. Hi ambo valores fient aequales, ſi globus tantus accipiatur, ut ſit $bb = \frac{5gg}{2\pi^4}$, et $b = \frac{g}{\pi\pi}\sqrt{\frac{5}{2}}$: hoc eſt in pedibus Rhenanis debet eſſe radius globi $= 2,50317$, ac tum diſtantia OI $= f$ fit $= 1,583144$ ped. ita ut punctum ſuſpenſionis ſeu axis gyrationis intra globum capi debeat. Cum autem ſit $f = \frac{g}{\pi\pi} = b\sqrt{\frac{2}{5}}$ ſeu $f = k$, evidens eſt hoc caſu globum celerrime oſcillari. Scilicet ſi ſit $I\omega = b\sqrt{\frac{2}{5}}$, ducta horizontali $\mu\nu$, quae axem gyrationis referet, erit $cos\, B\mu = \sqrt{\frac{2}{5}}$, ideoque arcus $B\mu = 50°, 46'$. Sin autem globus fuerit valde parvus, ut fieri ſolet, ad minuta ſecunda producenda ſumi debet OI $= \frac{2g}{\pi\pi} - \frac{\pi\pi bb}{5g}$: quare ut globus ex ipſo puncto B ſuſpenſus hoc praeſtet, ejus radius debet eſſe $b = \frac{(\sqrt{65}-5)g}{2\pi\pi} = 0,155136g$ proxime.

PROBLEMA. 47.

547. Si corpus rigidum circa axem horizontalem mobile pluribus conſtet partibus, quarum ſingularum centra inertiae et momenta inertiae ſint cognita, definire totius corporis centrum oſcillationis.

SO-

SOLUTIO.

Axis gyrationis horizontalis ad planum figurae in puncto O normalis concipiatur, sintque A, B, C, D centra inertiae partium, ex quibus corpus est compositum, quarum partium massae sint A, B, C, D, et momenta inertiae respectu axium ipsi axi gyrationis parallelorum et per cujusque centrum inertiae transeuntium Aa^2, Bb^2, Cc^2, Dd^2: centra autem inertiae distent ab axe gyrationis intervallis AO, BO, CO, DO; perinde enim est, sive haec intervalla ad idem axis punctum O tendant, sive ad diversa, quoniam tam momenta gravitatis quam momenta inertiae tantum a distantiis ab axe pendent, neque diversitas punctorum O quicquam eo confert. Primum ergo centrum inertiae I totius corporis, cujus massa sit $= M = A + B + C + D$, definiatur, quod in tali recta OI erit situm, ut sit AOA. *sf* AOI + BOB. *sf* BOI = COC. *sf* COI + DOD. *sf* DOI: tum vero erit: Fig. 69.

$$M.OI = A.AO.\ cof\ AOI + B.BO.\ cof\ BOI + C.CO\ cof\ COI + D.DO.\ cof\ DOI,$$

quae quantitas in superiori formula $IS = \frac{M.k}{Mf}$ loco Mf scribi debet. At momentum inertiae totius corporis respectu axis gyrationis $M(ff + kk)$ ex partibus ita componitur, ut sit:

$$A(AO^2 + aa) + B(BO^2 + bb) + C(CO^2 + cc) + D(DO^2 + dd).$$

Quare cum sit $OS = \frac{M(ff+kk)}{Mf}$, erit

$$OS = \frac{A(AO^2 + aa) + B(BO^2 + bb) + C(CO^2 + cc) + D(DO^2 + dd)}{A.AO.\ cof\ AOI + B.BO.\ cof\ BOI + C.CO.\ cof\ COI + D.DO.\ cof\ DOI}$$

COROLL. 1.

548. Si singulae partes seorsim considerentur, earumque centra oscillationis statuantur in punctis a, b, c, d, ob $Oa = \frac{A(AO^2+aa)}{A.OA}$, erit

$$OS = \frac{A.OA.Oa + B.OB.Ob + C.OC.Oc + D.OD.Od}{A.OA\ cof\ AOI + B.OB.cof\ BOI + C.OC.cof\ COI + D.OD.\ cof\ DOI}$$

COROLL. 2.

549. Invento autem centro inertiae seu gravitatis totius corporis I loco denominatoris poni potest M. OI: per praecepta autem statica centrum gravitatis totius corporis ex datis centris gravitatis partium facile colligitur.

EXEMPLUM.

550. Sit pendulum compositum ex virga cylindrica recta ACB et globo illi annexo BEDF, quod circa axem horizontalem *e Of* sit mobile, cu- Fig. 70.

Digitized by Google

jus centrum oscillationis S quaeratur. Virga autem et globus constent ex materia uniformi, ponaturque virgae longitudo AB $= a$, pondus $= A$, et extremitatis B ab axe gyrationis O distantia BO $= b$, basis autem hujus cylindri radius $= c$; erit ejus centrum inertiae in C, ut sit AC $=$ BC $= \frac{1}{2}a$, et OC $= b - \frac{1}{2}a$, momentum vero inertiae respectu axis per C ducti et axi gyrationis paralleli $= A(\frac{1}{12}aa + \frac{1}{4}cc)$. Porro globi annexi sit massa $= E$, radius BG $= e$, erit ejus centrum inertiae in G et momentum inertiae $= \frac{2}{5}Eee$. Sit jam totius corporis centrum inertiae in I erit $(A + E)$. OI $= A(b - \frac{1}{2}a) + E(e + b) = Mf$; deinde momentum inertiae respectu axis gyrationis $= A(\frac{1}{12}aa + \frac{1}{4}cc + (b - \frac{1}{2}a)^2) + E(\frac{2}{5}ee + (b + e)^2)$ quod loco $M(ff + kk)$ substitui debet. Sicque centrum oscillationis erit in S ut sit:

$$OS = \frac{A(\frac{1}{3}aa - ab + bb + \frac{1}{4}cc) + E(bb + 2be + \frac{7}{5}ee)}{A(b - \frac{1}{2}a) + E(b + e)}.$$

ergo ob OG $= b + e$ fiet

$$GS = \frac{A(be + \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}ae - \frac{1}{3}aa - \frac{1}{4}cc) - E.\frac{2}{5}ee}{A(b - \frac{1}{2}a) + E(b + e)}.$$

COROLL. 1.

551. Si axis gyrationis O capiatur in summitate virgae A, ut sit $b = a$, erit

$$OS = \frac{A(\frac{1}{3}aa + \frac{1}{4}cc) + E(aa + 2ae + \frac{7}{5}ee)}{A.\frac{1}{2}a + E(a + e)}$$

$$\text{et } GS = \frac{A(\frac{1}{2}ae + \frac{1}{6}aa - \frac{1}{4}cc) - E.\frac{2}{5}ee}{A.\frac{1}{2}a + E(a + e)}$$

si quidem sumamus punctum S supra G cadere.

COROLL. 2.

552. Si sit exempli gratia E $= 30$ A; $a = b = 3$ ped. $e = 1\frac{1}{2}$ ped. et $c = \frac{1}{100}$ ped. ita ut cc tuto negligi possit, erit OG $= 3\frac{1}{12} = 3,0833$ et OS $= \frac{3 + 285\frac{7}{24}}{1\frac{1}{2} + 92\frac{1}{2}} = \frac{828\frac{7}{24}}{94} = 3,0669$, hocque casu punctum S supra G cadit; sin autem massa virgae evanesceret, foret OS $= 3,0842$, sicque S infra G caderet;

SCHOLION.

553. Hic postremus casus ideo est notatu dignus, quod vulgo filum, si fuerit valde tenue ac leve respectu globi, vix quicquam ad centrum

Digitized by Google

trum oscillationis conferre videatur. hic enim certe, etsi globus tricies ponderosior est filo, hujus ratio sine insigni errore negligi non posset. Ponamus enim, hoc pendulum oscillationes absolvisse minutis secundis, hincque longitudinem penduli simplicis isochroni determinari oportere. Haec igitur neglecta filii massa prodiret = 3, 0842 ped. cum tamen revera tantum sit 3, 0659 ped. ita ut error 0, 0173 ped. = $2\frac{1}{2}$ lin. committeretur minime certe tolerandus. Sin autem manentibus reliquis dimensionibus, filum adhuc levius atque E = 60 A esset, foret OS = $\frac{3+570\frac{7}{12}}{1\frac{1}{2}+185} = 3,0782$, cujus loco si sumeretur 3, 0842 error committeretur = 0, 0060 ped. = $1\frac{3}{4}$ lin.

PROBLEMA. 48.

Fig. 71.

554. Si pendulum constet ex virga tenuissima OB inertiae experte rigida tamen, et globo BEDF, invenire locum, ubi alius globus datus eidem virgae affigi debeat, ut oscillationes fiant promtissimae.

SOLUTIO.

Cum in O sit axis gyrationis, sit distantia OG = b, et radius globi infra affixi BG = c; massaque hujus globi = B: tum alterius globi affigendi sit massa = L, et radius QK = e, pro loco autem ejus quaesito distantia OQ = q. His positis sit I centrum inertiae commune, erit (B + L) OI = Bb + Lq = Mf, tum vero momentum inertiae totius penduli respectu axis gyrationis = B $(\frac{2}{5}cc + bb)$ + L $(\frac{2}{5}ee + qq)$ = M $(ff + kk)$. Quare si centrum oscillationis statuatur in S, erit OS = $\frac{B(\frac{2}{5}cc+bb)+L(\frac{2}{5}ee+qq)}{Bb+Lq}$, quae longitudo minima esse debet, ut oscillationes fiant promtissimae. Hinc prodit ista aequatio:

$$2BL\,bq - BL\,(\tfrac{2}{5}cc + bb) - \tfrac{2}{5}LL\,ee + LL\,qq = 0$$

seu $Lq = -Bb + r\,(BB\,bb + BL\,bb + \frac{2}{5}BL\,cc + \frac{2}{5}LL\,ee)$

unde innotescit distantia OQ = q: ex qua porro colligitur longitudo penduli simplicis isochroni

$$OS = \frac{2}{L}r\,(BB\,bb + BL\,bb + \tfrac{2}{5}BL\,cc + \tfrac{2}{5}LL\,ee) - \frac{2Bb}{L} = 2q.$$

Hinc si ambo globi ex eadem materia fuerint confecti, ob B: L = $c^3 : e^3$ erit $OS = \frac{2r\,(c^6\,bb + c^3e^3\,bb + \frac{2}{5}c^5e^3 + \frac{2}{5}e^8) - 2c^3b}{e^3}$

et $OQ = q = \frac{r\,(c^6\,bb + c^3e^3\,bb + \frac{2}{5}c^5e^3 + \frac{2}{5}e^8) - c^3b}{e^3}$

CO-

Digitized by Google

COROLL. 1.

555. Si diametri globorum fuerint minimi, ut cc et ee prae bb negligi queant, distantia $OQ = q$ ita capi debet, ut sit $OQ = \frac{\gamma B(B+L)-B}{L}$. b, et longitudo penduli simplicis isochroni erit $= 2.OQ = 2b.\frac{\gamma B(B+L)-B}{L}$.

COROLL. 2.

556. Si globus alter KLMN plane omitteretur, foret $OS = b + \frac{2cc}{5b}$, quae major est, quam adjuncto isto globo, si fuerit $b + \frac{2cc}{5b} > 2e\gamma\frac{3}{7}$. Unde nisi sit $e > \frac{\gamma 5}{2\gamma^2}(b+\frac{2cc}{5b})$, hoc altero globo adjungendo oscillationes promptiores reddi possunt.

COROLL. 3.

557. Sin autem fuerit $e = \frac{\gamma 5}{2\gamma^2}(b+\frac{2cc}{5b})$ quantacunque etiam fuerit hujus globi massa L, pro oscillationibus celerrimis obtinendis sumi debet $OQ = q = \frac{1}{2}b + \frac{cc}{5b}$, et tum longitudo penduli simplicis isochroni erit $= b + \frac{2cc}{5b}$, omnia ac si globus KLMN removeretur.

COROLL. 4.

558. Si ambo globi fuerint aequales, ut sit $L = B$ et $e = c$, oscillationes promtissimae evadent, capiendo $OQ = q = \gamma(2bb + \frac{4}{5}cc) - b$; ac si cc prae bb negligere liceat, $OQ = OG(\gamma 2 - 1)$; hincque longitudo penduli simplicis isochroni $= 2OG(\gamma 2 - 1) = 0,828427\,OG$.

COROLL. 5.

559. Si ambo globi ex eadem materia constent, definiri potest globi KLMN radius e, ut eo rite adjungendo oscillationes fiant promtissime; scilicet e quaeri debet ex hac aequatione, $16e^{10} - 48c^5e^5 - 120bbc^3e^5 - 600\,bbc^6ee + 9c^6(5bb + 2cc)^2 = 0$.

SCHOLION.

560. Ceterum patet, quo minor sit radius e globi KLMN manente ejus massa L, eo minorem prodire distantiam $OQ = q$, ideoque eo prom-

Digitized by Google

promtiores fore oscillationes. At vero manente radio e oscillationes fient celerrimae, si massa L globi affigendi fuerit quam maxima; nam si esset $L = o$, foret $OS = b + \frac{2cc}{5b}$, qui est valor maximus, si quidem affigendo altero globo oscillationes crebriores reddi possunt. At vero si fuerit $5bb + 2cc = 2be\sqrt{10}$, seu $e = \frac{5bb+2cc}{2b\sqrt{10}}$, quantacunque fuerit hujus globi massa L, eo rite annexo oscillationes manent ejusdem durationis, et si hic globus adhuc fuerit major, oscillationes adeo tardiores evadent. Quodsi ambo globi ex materia aeque gravi fuerint confecti, magnitudo affigendi, ut motus oscillatorius fiat rapidissimus, ex aequatione decimi gradus definiri debet: verum si axis per centrum G globi BCDF transeat, ut sit $b = o$, inde prodit $e = c\sqrt{\frac{5}{2}}$; pro radio globi affigendi, et pro ejus loco $OQ = q = r(\frac{2}{5}\frac{c^5}{e^3} + \frac{3}{5}e^2) = c\sqrt{\frac{10}{27}}$, et longitudo penduli simplicis isochroni $= 2c\sqrt{\frac{10}{27}}$. Axis ergo gyrationis per centrum prioris globi transiens alterum ita trajicere debet, ut ab ejus centro distet intervallo $OQ = c\sqrt{\frac{10}{27}}$, quod minus est ejus radio $e = c\sqrt{\frac{5}{2}}$. Hujusmodi autem quaestiones circa motum oscillatorium plures proponi possent, quae autem ex stabilitis hic principiis non difficulter solventur. Plurimum autem intererit investigare, quantas vires ipse axis gyrationis inter motum sustineat.

PROBLEMA. 49.

561. Dum corpus rigidum grave circa axem horizontalem fixum OA gyratur, ad quodvis tempus definire vires, quas axis in datis duobus punctis O et A sustinet. Fig. 72.

SOLUTIO.

Repraesentet tabula planum verticale per axem gyrationis OA transiens, versetur que jam centrum inertiae corporis extra hoc planum in I, unde tam ad planum verticale, quam ad axem ducantur perpendiculares IK et IG, erit angulus $IGK = \varphi$ elongatio corporis a situ naturali, ac posita distantia $IG = f$, erit $KI = f\sin\varphi$ et $GK = f\cos\varphi$. Tum sit massa corporis $= M$, quae cum simul ejus pondus exprimat, vis sollicitans erit $= M$ in directione verticali IV urgens, cujus momentum $= Mf\sin\varphi$ tendit ad angulum IGK minuendum. Deinde consideretur

elementum corporis quodcunque dM in Z, unde ad planum verticale et axem ductis perpendiculis ZY, ZX vocentur coordinatae $OX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$, eritque $OG = \frac{\int x\,dM}{M}$, $GK = \frac{\int y\,dM}{M}$ et $KI = \frac{\int z\,dM}{M}$: posita autem distantia $XZ = \sqrt{(yy + zz)} = r$, exprimit $\int rr\,dM$ momentum inertiae corporis respectu axis OA, quod sit $= Mkk$: denique ponatur distantia punctorum axis $OA = a$, et per ambo ducantur rectae BOb, COc et EAe, FAf ipsis KG et KI parallelae. His praeparatis secundum ductum probl. 23. primum observo nullam adesse vim, cujus directio cum axe sit in eodem plano: cum autem hic momentum vis $Mf\,fi\,\varphi$ in sensum contrarium vergat, atque ibi sumsimus, erit $Vf = -Mf\,fin\,\varphi$.

Nunc igitur ob vim IV $= M$, quae axi in G secundum directionem GK applicata est concipienda, axis in punctis O et A has sustinebit vires:

$$\text{sec. OB vim} = \frac{M.\,AG}{a}\text{; sec. AE vim} = \frac{M.\,OG}{a}.$$

Quibuscum conjungendae sunt illae, quae ex viribus elementaribus contrarie applicatis nascuntur: quae sunt

$$\text{pro termino O}\begin{cases}\text{sec. Ob vis} = \frac{ff\,fi\,\varphi.\int(a-x)z\,dM}{akk}\\ \text{sec. OC vis} = \frac{ff\,fi\,\varphi.\int(a-x)y\,dM}{akk}\end{cases}$$

$$\text{pro termino A}\begin{cases}\text{sec. Ae vis} = \frac{ff\,fi\,\varphi.\int xz\,dM}{akk}\\ \text{sec. AF vis} = \frac{ff\,fi\,\varphi.\int xy\,dM}{akk}\end{cases}$$

hasque vires axis ob actionem gravitatis corporis sustinet, verum ob motum, quo jam gyratur, si celeritas gyratoria vocetur $= v$, axis in punctis O et A has vires sustinet:

$$\text{pro termino O}\begin{cases}\text{sec. OB vim} = \frac{vv\int(a-x)y\,dM}{2ag}\\ \text{sec. OC vim} = \frac{vv\int(a-x)z\,dM}{2ag}\end{cases}$$

pro

$$\text{pro termino A} \begin{cases} \text{sec. AE vim} = \frac{\mathfrak{gg}\int xy\,dM}{2ag} \\ \text{sec. AF vim} = \frac{\mathfrak{gg}\int xz\,dM}{2ag}. \end{cases}$$

COROLL. 1.

562. Si distantiae terminorum O et A a puncto G vocentur $OG = b$ et $AG = c$, ut sit $a = b + c$; tum vero ponatur $GX = u$, erit $x = b - u$ et $a - x = c + u$; ideo

$$\int (a-x)z\,dM = \int (c+u)z\,dM = Mc.\,KI + \int uz\,dM$$
$$\int (a-x)y\,dM = \int (c+u)y\,dM = Mc.\,GK + \int uy\,dM$$
$$\int xz\,dM = \int (b-u)z\,dM = Mb.\,KI - \int uz\,dM$$
$$\int xy\,dM = \int (b-u)y\,dM = Mb.\,GK - \int uy\,dM.$$

COROLL. 2.

563. His valoribus introductis axis in puncto O has vires sustinet: primo secundum directionem OB vim

$$\frac{Mc}{a} - \frac{Mc\int\int\Phi.KI}{akk} - \frac{\int\int\Phi.\int uz\,dM}{akk} + \frac{\mathfrak{gg}.Mc.GK}{2ag} + \frac{\mathfrak{gg}.\int uy\,dM}{2ag}$$

deinde secundum directionem OC vim

$$\frac{Mc\int\int\Phi.GK}{akk} + \frac{\int\int\Phi.\int uy\,dM}{akk} + \frac{\mathfrak{gg}.Mc.KI}{2ag} + \frac{\mathfrak{gg}.\int uz\,dM}{2ag}.$$

At vero in puncto A istas:

primo secundum directionem AE vim

$$\frac{Mb}{a} - \frac{Mb\int\int\Phi.KI}{akk} + \frac{\int\int\Phi.\int uz\,dM}{akk} + \frac{\mathfrak{gg}.Mb.GK}{2ag} - \frac{\mathfrak{gg}.\int uy\,dM}{2ag}$$

deinde secundum directionem AF vim

$$\frac{Mb\int\int\Phi.GK}{akk} - \frac{\int\int\Phi.\int uy\,dM}{akk} + \frac{\mathfrak{gg}.Mb.KI}{2ag} - \frac{\mathfrak{gg}\int uz\,dM}{2ag}.$$

COROLL. 3.

564. Si corpus ita fuerit comparatum, ut a plano IGK in duas partes similes et aequales dividatur, sitque $GO = GA = \frac{1}{2}a$, ob $\int uz\,dM = 0$ et $\int uy\,dM = 0$, axis in puncto O sustinebit has vires

$$\text{sec. OB vim} = \frac{1}{2}M - \frac{Mf\int\Phi.KI}{2kk} + \frac{\mathfrak{gg}.M.GK}{4g}$$

Digitized by Google

$$\text{sec. OC vim} = \frac{Mff\varphi.GK}{2kk} + \frac{\gamma\gamma.M.KI}{4g}$$

in puncto autem A sustinebit has vires

$$\text{sec. AE vim} = \tfrac{1}{2}M - \frac{Mff\varphi.KI}{2kk} + \frac{\gamma\gamma.M.GK}{4g}$$

$$\text{sec. AF vim} = \frac{Mff\varphi.GK}{2kk} + \frac{\gamma\gamma.M.KI}{4g}.$$

hoc ergo casu vires non a magnitudine distantiae OA = a pendent.

COROLL. 4.

565. Hoc ergo casu, quo $\int uyd M = 0$ et $\int uzd M = 0$, nihil impedit, quominus distantia OA = a evanescens accipiatur, atque axis in unico puncto G retineri poterit, hic quippe sustinet binas vires

$$\text{alteram secundum GK} = M - \frac{Mff\sin\varphi^2}{kk} + \frac{M\gamma\gamma f\cos\varphi}{2g}$$

$$\text{alteram secundum GH} = \frac{Mff\sin\varphi\cos\varphi}{kk} + \frac{M\gamma\gamma f\sin\varphi}{2g}$$

existente GH ipsi KI parallela.

SCHOLION.

566. Corpora, quae vulgo ad motum oscillatorium adhiberi solent, ita sunt comparata, ut plano, quod per eorum centrum inertiae ad axem gyrationis normaliter ducitur, in duas portionis aequales et similes secentur: de iis igitur locum habet, quod axis in unico puncto retineri queat. Scilicet si figura 67. repraesentet planum verticale per talis corporis centrum inertiae I ductum et ad axem gyrationis normale, qui figurae in O normaliter insistere concipiatur, existente OC recta verticali, et OH in hoc plano horizontali, axis in puncto ipso O vires modo indicatas sustinebit. Nempe si angulus COI ponatur = φ, distantia OI = f, massa corporis = M, ejus momentum inertiae respectu axis gyrationis = Mkk, et celeritas angularis in hoc statu fit = γ, sive ad angulum COI augendum tendat, sive minuendum, axis O sustinet duas vires.

Fig. 67.

$$\text{alteram secundum OC} = M - \frac{Mff\sin\varphi^2}{kk} + \frac{M\gamma\gamma f\cos\varphi}{2g}$$

$$\text{alteram secundum OH} = \frac{Mff\sin\varphi\cos\varphi}{kk} + \frac{M\gamma\gamma f\sin\varphi}{2g}.$$

Priori

Digitized by Google

Priori ergo vi deorsum sollicitatur, eamque sustentaculum sustinet: ob alteram vero vim axis in eam plagam, in qua centrum inertiae versatur, horizontaliter super sustentaculo procedere conatur, quem effectum obice arceri convenit. Quando centrum inertiae in contrariam plagam divagatur, haec vis horizontalis in contrarium dirigitur. Ceterum ambae vires ex duabus constant partibus, quarum altera actioni gravitatis, altera motui gyratorio ipsi debetur; ac ducta OL ad OI normali, hae partes ad pauciores ita redigentur, ut axis in puncto O ab his viribus sollicitetur.

$$\text{sec. OC vi} = M;\ \text{sec. OL vi} = \frac{Mff\,si\,\varphi}{kk};\ \text{sec. OI vi} = \frac{Mf\,\text{ꝟ}\,\text{ꝟ}}{2g}.$$

Si non fuerit $\int uyd M = 0$ et $\int uzd M = 0$, tum praeter istas vires axis insuper in punctis O et A fig. 72. eas virium §. 563. partes sustinet, quae has formulas integrales involvunt, quoniam reliquas partes immunes ad unicum punctum reducere licuit.

PROBLEMA. 50.

567. Si axis OA, circa quem corpus rigidum grave est mobile, non fuerit horizontalis, definire motum gyratorium ut et vires, quas axis inde sustinet. Fig. 73.

SOLUTIO.

Per axem OA ductum concipiatur planum verticale, in quo sit GC recta verticalis, ponaturque angulus OGC $= \zeta$, cujus complementum $90^\circ - \zeta$ dat axis OA inclinationem ad horizontem. Reperiatur nunc corporis centrum inertiae I extra hoc planum verticale, unde ad axem ducta normali IG $= f$, et ex G in plano verticali ad axem pariter normali GK, erit ipsum planum IGK ad planum verticale normale, ponaturque angulus IGK $= \varphi$, elongationem corporis a situ suo naturali metiens: recta enim GI in plano IGK movebitur. Statuatur massa corporis, eademque ejus pondus $= M$, ejusque momentum inertiae respectu axis OA $= Mkk$, quod perinde colligitur, ac si axis esset horizontalis: inclinatio enim tantum ad vim sollicitantem spectat. Effectus autem gravitatis eo redit, ut corpus in puncto I sollicitetur in directione verticali IV a vi $= M$, ad quam resolvendam ducantur IM et IN parallelae ipsis GO et GK, eruntque rectae IM, IV et IN in plano verticali, angulusque MIV $= \zeta$. Hinc ex vi IV $= M$ nascuntur duae vires, altera sec. IM $= M \cos \zeta$ et altera secundum IN $= M\, si\, \zeta$. Pri-

or cum sit axi parallela, nihil plane ad motum confert, sed tota in axem impenditur, quemadmodum supra docuimus. Pro motu ergo restat sola vis $IN = M \int\!\!\int \zeta$, cujus directio cum sit ipsi GK parallela, orietur momentum $= M \int\!\!\int \zeta \int\!\!\int \varphi$ tendens ad angulum IGK minuendum, atque pro motu definiendo formulae superiores pro axe horizontali inventae valebunt, nisi quod loco momenti vis sollicitantis, quod ante erat $= M \int\!\!\int \sin\varphi$, hic scribi debeat $M \int\!\!\int \sin\zeta \sin\varphi$: vel quatenus M pondus corporis denotat, ejus loco scribi debet $M \int\!\!\int \zeta$, quatenus autem in momentum inertiae ingreditur, immutatum relinqui debet. Quare motus similis erit motui penduli simplicis circa axem horizontalem, cujus longitudo $= \frac{Mkk}{M \int\!\!\int \zeta} = \frac{kk}{\int\!\!\int \zeta}$: quo ipso motus perfecte determinatur.

Quod autem ad vires attinet, quas axis interea sustinet in datis si placet punctis O et A, primo ob vim $IM = M \cos\zeta$, axis secundum suam directionem AO a tanta vi urgetur, praeterea vero in utroque O et A a vi $= \frac{GI}{OA}$. $M \cos\zeta$, in puncto A scilicet secundum directionem ipsi GI parallelam, in O vero secundum oppositam. Tum vero praeter has vires in punctis O et A ab iisdem viribus sollicitabitur, quas in problemate praecedente determinavimus, hoc tantum observato, quod pro M scribi debeat $M \int \zeta$ et $\int\!\!\int \zeta \int \varphi$ loco $\int\!\!\int \varphi$. Nempe si in fig. 72. OA sit noster axis inclinatus et reliqua maneant ut in problemate praecedente, tum axis praeter vires a vi $IM = M \cos\zeta$ natus sustinet insuper has vires. Primo in puncto O secundum directionem OB vim

Fig. 72.

$$\frac{Mc \sin\zeta}{a} - \frac{Mc \int\!\!\int \zeta \int \varphi^2}{akk} - \frac{\int\!\!\int \zeta \int \varphi . \int uzdM}{akk} + \frac{Mc \int uu \cos\varphi}{2ag} + \frac{uu \int uydM}{2ag}$$

et secundum directionem OC vim

$$\frac{Mc \int\!\!\int \zeta \int \varphi \cos\varphi}{akk} + \frac{\int\!\!\int \zeta \int \varphi . \int uydM}{akk} + \frac{Mc \int uu \int \varphi}{2ag} + \frac{uu \int uz dM}{2ag}$$

Deinde in puncto A secundum directionem AE vim

$$\frac{Mc \int \zeta}{a} - \frac{Mb \int\!\!\int \zeta \int \varphi^2}{akk} + \frac{\int\!\!\int \zeta \int \varphi . \int uzdM}{akk} + \frac{Mb \int uu \cos\varphi}{2ag} - \frac{uu . \int uydM}{2ag}$$

et secundum directionem AF vim

$$\frac{Mb \int\!\!\int \zeta \int \varphi \cos\varphi}{akk} - \frac{\int\!\!\int \zeta \int \varphi . \int uydM}{akk} + \frac{Mb \int uu \int \varphi}{2ag} - \frac{uu \int uzdM}{2ag}$$

ubi est $OA = a$, $OG = b$, $AG = c$, et celeritas angularis $= u$, integralibus sumtis ut ibi definivimus.

CO-

Digitized by Google

COROLL. 1.

568. Cum longitudo penduli simplicis isochroni sit $= \frac{kk}{ff\zeta}$, corpus circa axem inclinatum tardius oscillationes suas absolvit quam si axis esset horizontalis, ac si oscillationes fuerint minimae, tempus unius erit $= \pi r \frac{kk}{2fg\int\zeta}$ min. sec.

COROLL. 2.

569. Si axis est inclinatus, etiam vim sustinet secundum suam directionem AO, quae est $= M.\cos\zeta$, reliquae vires omnes ad axem sunt normales, et ad duo data puncta O et A revocari possunt. Fig. 73.

COROLL. 3.

570. Si corpus a plano IGK in duas partes similes et aequales bisecetur, valores integralium $\int uyd$M et $\int uzd$M evanescunt et omnes vires praeter eas, quae ex vi IM nascuntur, ad unicum punctum G reduci possunt, ut supra.

SCHOLION.

571. Haec sunt, quae de motu gyratorio corporum rigidorum circa axem fixum proponenda videbantur, ubi quidem ipsius motus determinatio eo est reducta, ut plus difficultatis non habeat, quam motus corpusculi circa axem fixum, si modo momentum inertiae fuerit exploratum. Vires autem, quas axis gyrationis inter motum sustinet, molestiorem calculum plerumque exigunt, cum ex corporis figura valores binorum integralium $\int xyd$M et $\int xzd$M erui debeant. Verum haec investigatio maximi est momenti, si ad motum corporum rigidorum circa axes non fixos progredi velimus: ubi primo quidem eos casus diligentius evolvi convenit, quibus axis sponte manet immobilis, etiamsi extrinsecus non retineatur. Proposito ergo corpore quocunque rigido, inquirendum est, utrum in eo dentur ejusmodi axes, circa quos si corpus motum gyratorium receperit, ipsum inde nullas sustineat vires: deinde etiam videndum est, a quibusnam viribus corpus circa talem axem motum sollicitari debeat, ut etiam hinc nullae vires ad axem dimovendum nascantur.

CAPUT

CAPUT VIII.

DE AXE GYRATIONIS LIBERO MOTUQUE CORPORUM RIGIDORUM CIRCA TALES AXES.

DEFINITIO. II.

572. *Axis gyrationis liber* in quovis corpore rigido est ejusmodi axis, qui dum corpus circa eum gyratur, nullas ob motum vires sustinet.

COROLL. I.

573. Si igitur corpus circa axem liberum gyrari coeperit, axis sponte in quiete manebit, neque opus est, ut is extrinsecus in situ suo retineatur: quod quidem intelligendum est, si corpus a nullis viribus sollicitetur.

COROLL. 2.

574. Corpus ergo nullis viribus subjectum, si circa talem axem liberum motum gyratorium quemcunque acceperit, hoc motu perpetuo uniformiter gyrari perget, perinde ac si axis esset fixus.

SCHOLION.

575. En igitur alium casum motus liberi, in corpora rigida cadentis, cujus explicatio jam est manifesta. Primus scilicet casus erat, quo vidimus tale corpus motu progressivo libere proferri, at si vires sollicitantes per ejus centrum inertiae transeant, motus perturbationem jam definivimus. Deinde cum ostendissem corpus, cui circa axem fixum impressus fuerit motus gyratorius, eundem motum perpetuo conservare, dum axis ille fixus retineatur, nunc evidens est, si axis iste ita fuerit comparatus, ut vires, quas sustinet, se mutuo destruant, eum sponte immotum manere, corpusque motum gyratorium perpetuo esse continuaturum, qui propterea est casus motus liberi: ubi quidem nullum est dubium, quin ejusmodi etiam dentur vires, quae dum motum gyratorium vel accelerant vel retardant, axem non afficiant, ita ut adhuc in quiete persistat, de quo deinceps tractabimus. Ante omnia autem necesse est, ut inquiramus, an in quovis corpore tales axes gyrationis liberi dentur, et quomodo ii sint investigandi? in quo negotio summam

mam afferent utilitatem ea, quae supra de ternis axibus principalibus cujusque corporis tradidimus, quippe qui simul esse axes gyrationis liberi deprehendentur.

PROBLEMA. 51.

576. Definire conditiones axium liberorum, qui dum corpora circa eos gyrantur, a nullis viribus sollicitata nullas vires sustineant.

SOLUTIO.

Quaestio haec ex probl. 7. §. 338. facile resolvetur. In genere enim si corpus circa axem quemcunque OA gyretur celeritate angulari $= \gamma$, ac pro elemento corporis quocunque dM in Z sito statuantur coordinatae orthogonales $OX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, quarum prima x in ipso axe gyrationis capiatur, vidimus axem ob hunc motum duas sustinere vires secundum Ee et Ff quae sint Fig. 32.

$$\text{vis } Ee = \frac{\gamma\gamma}{2g} \int y dM \text{ et vis } Ff = \frac{\gamma\gamma}{2g} \int z dM$$

quae applicatae sint in punctis E et F ut sit

$$OE = \frac{\int xy dM}{\int y dM} \text{ et } OF = \frac{\int xz dM}{\int z dM}.$$

Quare ut hic axis gyrationis OA sit liber, primo necesse est, ut ambae hae vires Ee et Ff seorsim evanescant, ideoque esse oportet tam $\int y dM = 0$, quam $\int z dM = 0$, unde patet, axem OA per corporis centrum inertiae I transire debere, quoniam posita corporis massa $= M$ est $\int y dM = M.GK$ et $\int z dM = M.KI$. Haec ergo est prima conditio axium gyrationis liberorum, ut per corporis centrum inertiae I transeant: verum etiamsi hae duae vires evanescant, tamen quia distantiae OE et OF fiunt infinitae, earum momenta ad axem circa punctum O vertendum prodeunt $\frac{\gamma\gamma}{2g} \int xy dM$ et $\frac{\gamma\gamma}{2g} \int xz dM$, quae nisi etiam evanescant, axis non sponte in quiete permanet. Quocirca ut axis gyrationis OA sit liber, non sufficit, ut is per corporis centrum inertiae I transeat, sed praeterea hac proprietate praeditus esse debet, ut pro eo fiat tam $\int xy dM = 0$ quam $\int xz dM = 0$. Quae cum sit proprietas axium principalium supra demonstrata, quorum respectu momenta inertiae sunt, vel maxima vel minima, manifestum est cujusque corporis axes principales, quos supra invenire docuimus, simul esse axes gyrationis liberos.

Digitized by Google

COROLL. 1.

577. In quolibet ergo corpore libero tres certe dantur axes gyrationis liberi, qui scilicet sunt ejus axes principales, circa quos ita libere gyrari possit, ut axes sponte in quiete perseverent.

COROLL. 2.

578. Si tria principalia momenta fuerint inter se inaequalia, tres tantum dantur axes gyrationis liberi; neque corpus circa ullum alium axem, etiamsi per centrum inertiae transeat, gyrari potest, quin viribus externis opus sit ad axem continendum.

COROLL. 3.

579. Sin autem momentum medium aequale sit vel maximo vel minimo, bini axes principales non determinantur, sed omnes ad tertium normales pari gaudent proprietate, ideoque etiam sunt axes gyrationis liberi.

COROLL. 4.

580. At si omnia tria momenta principalia fuerint inter se aequalia, uti fit in globo et cubo, omnes plane rectae per centrum inertiae transeuntes proprietatem axium principalium habebunt, corpusque circa eos libere gyrari poterit.

SCHOLION.

581. Quae ergo supra de axibus principalibus omnium corporum tradidimus, non solum in inventione momentorum inertiae maximum habent usum, sed etiam in praesenti investigatione totum negotium conficiunt, cum in quovis corpore axes principales iique soli sint axes gyrationis liberi, circa quos corpus ita gyrari possit, ut non opus sit vi externa ad eos in quiete retinendos. Quemadmodum ergo in quovis corpore rigido centrum inertiae est punctum maxime memorabile, cujus ratio per universam Mechanicam latissime patet, ita axes principales, qui simul sunt axes gyrationis liberi, in quovis corpore non minus sunt notatu digni, cum iis universa doctrina de motu corporum libero innitatur. Inter proprietates ergo corporum mechanicas axes hi principales post centrum inertiae praecipuum locum obtinent, atque in quovis corpore, cujus motus examinandus suscipitur, in id potissimum erit incumbendum, ut ejus axes principales exquirantur. Triplex scilicet datur corporum cognitio, prima geometrica, qua ejus extensio mensura-

Digitized by Google

menſuratur, ſecunda mechanica, qua ejus maſſa ſeu inertia ſpectatur, ac tertia phyſica, qua ejus reliquae qualitates expenduntur; cognitio igitur mechanica potiſſimum centro inertiae et axibus principalibus contineri eſt cenſenda.

PROBLEMA. 52.

582. Dum corpus circa axem gyrationis liberum movetur, invenire, a quibusnam viribus corpus ſollicitari debeat, ut nullus inde effectus in axem redundet, atque axis etiamnum ſponte in quiete perſiſtat.

SOLUTIO.

Quemcunque motum gyratorium corpus circa axem principalem ſeu liberum acceperit, modo vidimus, hunc motum perpetuo conſervatum iri, axemque ſponte in quiete eſſe perſeveraturum, cum vires ex motu natae ſe mutuo perfecte deſtruant. Nunc igitur videamus, quomodo vires ſollicitantes comparatae eſſe debeant, ut ab iis etiam axis non afficiatur, id quod ex probl. 17. facile perſpicere licet. Primo autem manifeſto excluduntur vires obliquae, unde per reſolutionem naſcerentur vires axi parallelae, quippe quae a viribus elementaribus tolli non poſſent. Relinquuntur ergo vires, quae in planis ad axem normalibus ſunt directae; ab hujusmodi autem viribus axem ita affici oſtendimus, ut primo easdem vires in plano quamque ſuo ad axem translatas ſuſtineat, tum vero inſuper vires elementaribus contrarias pariter ad axem translatas. Cum autem ob axem principalem ſit $\int xyzdM = 0$, $\int xzzdM = Q$, $\int (a-x)ydM = 0$ et $\int (a-x)zdM = 0$, vires ex elementaribus natae, quae in probl. 17. punctis O et A ſunt applicatae evaneſcunt: ideoque axis tantum ipſas vires ſollicitantes ad axem tranlatas ſuſtinebit. Quare vires ſollicitantes ita debent eſſe comparatae, ut ſi ſingulae in planis ad axem normalibus ſecundum ſuas directiones ipſi axi applicentur, ſe mutuo deſtruant. Binae igitur quaeque vires aequales et contrariae corpori in eodem plano ad axem normali applicatae hoc praeſtabunt, ut axis ab iis nullam plane vim ſentiat. Scilicet ſi IA fuerit axis gyrationis liber, atque ad eum in puncto quovis L concipiatur planum normale, in quo agant duae vires Nn et Mm aequales et contrariae, ab iis quidem motus gyratorius, quatenus in diverſis ab axe diſtantiis ſunt applicatae, mutabitur, ſed axis nihilominus ſponte in quiete perſiſtet. Conſequenter quotcunque hujusmodi binarum virium paria corpori fuerint applicata, axis ab illis nullo modo afficietur. Tab. X. Fig. 74.

Digitized by Google

COROLL. 1.

583. Propoſita ergo quacunque vi Nn, cujus directio ſit in plano ad axem normali, quod axem in puncto L ſecet, ſi praeterea axi in ipſo puncto L vis aequalis et contraria LI applicetur, ab his duabus viribus axis nullam vim ſuſtinebit.

COROLL. 2.

584. Quodſi igitur corpus a binis hujusmodi viribus Nn et LI ſollicitetur, axis manet immotus, et ſolus motus gyratorius perturbabitur ab earum momentis. Cum autem vis LI nullum habeat momentum, mutatio motus ex momento ſolius vis Nn erit definienda.

COROLL. 3.

585. Quare ſi celeritas angularis fuerit $= \omega$, momentum vis $Nn = Vf$, et corporis momentum inertiae reſpectu axis $IA = Mkk$, erit $d\omega = \pm \frac{2Vfgdt}{Mkk}$ pro elemento temporis dt: ubi ambiguitas ſigni vel accelerationem vel retardationem indicat.

SCHOLION.

586. Quando ergo corpus rigidum circa quempiam axium ſuorum principalium gyratur, ſimulque a quotcunque hujusmodi viribus, quarum ſingulae ſibi pares et contrarias ipſi axi applicatas habeant quaſi comites, motus continuationem aſſignare valemus, quoniam axis ſponte manet in quiete, motusque aeque immutatur, ac ſi axis firmiter retineretur, quem caſum jam ſupra evolvimus. Verum haec determinatio adſtricta eſt ad iſtam virium ſollicitantium rationem, minimeque adhuc patet, cujusmodi effectum aliae vires eſſent productura: hoc quidem ſaltem intelligitur, axem non in quiete eſſe permanſurum, utrum vero motum ſimplice progreſſivum ſit nacturus, an ſe inclinando ſit proceſſurus, nondum liquet. Interim tamen caſus, quo axi motus progreſſivus imprimitur, ita hunc quo in quiete perſiſtet ſimplicitate excipit, ut ejus evolutionem ſuſcipere valeamus. Obſervandum enim eſt, ſi cum motu quocunque motus progreſſivus uniformis et rectilineus conjungatur, actionem virium minime perturbari, quod principium ad praeſens inſtitutum accommodemus.

THEOREMA. 4.

587. Quem motum gyratorium corpus rigidum circa axem quieſcentem proſequitur, eundem motum circa hunc axem uniformiter in

Digitized by Google

in directum progredientem prosequi poterit, si quidem ab iisdem viribus sollicitetur.

DEMONSTRATIO.

Dum axis quiescit, et corpus quomodocunque circa eum gyratur, resolvantur singulorum elementorum motus secundum ternas directrices, quibus coordinatae x, y, z parallelae constituantur, eruntque posito temporis elemento $= dt$, celeritates hae laterales $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, atque $\frac{ddx}{dt}$, $\frac{ddy}{dt}$, $\frac{ddz}{dt}$ exhibent effectus virium corpus sollicitantium, quatenus iis singula elementa afficiuntur. Ponamus jam corpori insuper tribui motum progressivum, quo axis motu sibi parallelo uniformiter in directum proferatur celeritate $= c$ secundum eam directionem, cui coordinatae x capiuntur parallelae, ac jam singulorum corporis elementorum celeritates erunt $c + \frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$, quarum differentialia non discrepabunt a praecedentibus: ideoque motus gyratorius circa axem uniformiter in directum progredientem perinde se habebit, ac si axis quiesceret; viresque si quae affuerint, motum gyratorium aeque perturbabunt, sive axis quiescat, sive uniformiter in directum progrediatur.

COROLL. 1.

588. Si igitur corpori, dum circa axem principalem gyratur, motus progressivus tribuatur, neque ab ullis viribus sollicitetur, utrumque motum uniformiter continuabit.

COROLL. 2.

589. Ac si corpus interea ab ejusmodi viribus sollicitetur, quibus solus motus gyratorius mutetur, axis vero non afficiatur, etiam motus gyratorius mutationem patietur: motus progressivus autem manebit uniformis rectilineus.

COROLL. 3.

590. Sin autem corpus interea sollicitetur a vi, cujus directio transit per centrum inertiae, ab ea solus motus progressivus afficietur. Nam quia ab hac vi neque ullum momentum respectu axis gyrationis

Digitized by Google

nascitur, neque axis de situ suo sibi parallelo deturbatur, motus gyratorius nullam mutationem patitur.

SCHOLION.

591. Veritas hujus Theorematis etiam per ea, quae supra de motu absoluto et respectivo sunt exposita, quando corpus, ad quod motus refertur, uniformiter in directum progreditur, sufficienter stabilitur. Cum enim corpus, quod motum gyratorium circa quendam axem principalem acceperit, hunc motum perpetuo ita conservet, ut axis sponte maneat in quiete, idem eveniat necesse est, si corpus in spatio uniformiter in directum lato versetur, hujusque respectu ejus axis quiescat. Tum enim res eodem redit, ac si corpus absolute uniformiter in directum progrediatur, simulque circa axem principalem, qui perpetuo situm sibi parallelum servet, aequabiliter gyretur. Ex quo res ita concipi potest quasi in corpore duplex inesset motus, alter gyratorius, quo corpus circa quendam axem principalem gyratur, alter vero progressivus, quo axis cum corpore ita abripiatur, ut axis perpetuo situm sibi parallelum conservet. Atque hinc etiam intelligitur, a viribus supra definitis motum gyratorium perinde accelerari vel retardari oportere, ac si axis quiescceret, simulque vires, quae solum motum progressivum afficere sunt ostensae, nihil quicquam in motu gyratorio mutare, ita ut uterque motus seorsim, quasi solus adesset, considerari queat. Haec igitur, quibus tam insignis casus motus liberi corporum rigidorum continetur, omnino sunt digna, ut diligentius evolvantur.

DEFINITIO. 10.

592. *Motus mixtus ex progressivo et gyratorio* est, quo corpus partim circa quempiam axem principalem seu liberum gyratur, partim vero ita insuper movetur, ut ejus axis sibi semper maneat parallelus.

COROLL. 1.

593. Ad motum ergo talem mixtum cognoscendum, ad quodvis tempus nosse oportet, 1°. celeritatem angularem circa axem gyrationis, 2°. celeritatem qua axis motu progressivo promovetur, et 3°. directionem hujus motus progressivi, quomodo ad axem gyrationis sit inclinata.

COROLL. 2.

594. Celeritas porro angularis eodem modo aestimatur, ac si axis quiescceret: celeritas autem, ac directio motus progressi-

vi

Digitized by Google

vi ex motu axis gyrationis, vel ex motu centri inertiae judicari debet.

EXPLICATIO.

595. Idea haec motus mixti ex ideis utriusque motus progressivi et gyratorii est conflata, unde fit, ut neutra in ea pure et perfecte contineatur. Cum enim motum progressivum ita definivimus, ut omnes rectae, quas in corpore concipere licet, sibi perpetuo maneant parallelae, haec proprietas in motu mixto minime valet, sed tantum ad axem gyrationis adstringitur: interim tamen evidens est, si motus gyratorius tolleretur, vel evanesceret, motum progressivum perfectum esse remansurum. Simili modo definitio motus gyratorii supra data ad axem fixum seu quiescentem erat adstricta, nunc autem ad axem motum extenditur, quae translatio per ideam spatii moti corroboratur, dummodo ut hic assumimus, axis sibi semper maneat parallelus. Quinetiam perspicuum est, si alter motus progressivus tolleretur vel evanesceret, motum gyratorium perfectum qualem supra descripsimus esse remansurum. Quo minus erit dubitandum, quin talis motus recte ex progressivo et gyratorio mixtus appelletur, quoniam alterutro sublato alter nomen suum jure sibi vendicat.

SCHOLION.

596. Circa talem motum mixtum variae quaestiones veniunt considerandae, quarum prima est, quomodo talis motus, si nullae vires accesserint, se sit habiturus, ubi quidem jam vidimus, utrumque aequabiliter esse perrecturum. Deinde viribus accedentibus quaestionem minime in genere tractare licet, ut variatio utriusque motus a viribus quibuscunque orta definiatur; sed ea tantum ad certa virium genera est restringenda. Cum scilicet certae sint vires, quae utrumque motum seorsim ita turbant, ut genus motus non mutetur, his conjungendis eas adipiscemur vires, quarum effectum in hujusmodi motibus mixtis definire valebimus. De reliquis autem cunctis viribus nihil aliud affirmare licebit, nisi quod axis gyrationis non sit situm sibi perpetuo parallelum conservaturus. Quamdiu enim axis sibi manet parallelus, motus semper erit mixtus ex progressivo et gyratorio, atque ad genus, quod hic tractamus, erit referendus: in quo eximium hujus motus criterium cernitur.

THEOREMA. 5.

597. Si corpori rigido impressus fuerit motus mixtus ex progressivo et gyratorio, idque a nullis viribus porro sollicitetur, utrum-

utrumque motum uniformiter continuabit, et progressivus erit rectilineus.

DEMONSTRATIO.

Veritas hujus Theorematis ex praecedentibus luculenter perspicitur, cum uterque motus seorsim vi inertiae sponte se conservet, neque continuatio unius impediat continuationem alterius, quandoquidem si spatio motus aequalis et contrarius motui progressivo impressus concipiatur, motus progressivus tolleretur, et gyratorius uniformis esset mansurus, secundum ea, quae supra sunt demonstrata. Necesse autem est, quod probe notandum, ut axis gyrationis per centrum inertiae corporis transeat, simulque sit unus ex ejus axibus principalibus. Nisi enim axis ita sit comparatus, motus gyratorius mox in aliud motus genus transibit, de quo hic nihil adhuc definire licet.

COROLL. 1.

598. In hoc ergo motu mixto, quem corpus vi inertiae prosequitur, non solum centrum inertiae uniformiter in directum progredietur, sed etiam axis gyrationis perpetuo eundem situm conservabit, intereaque corpus circa eum uniformiter gyrari perget.

COROLL. 2.

599. Talis ergo motus cognoscetur, si noverimus primo directionem et celeritatem centri inertiae, tum vero celeritatem angularem ejusque sensum ac denique positionem axis gyrationis.

COROLL. 3.

600. Quoniam in omni corpore tres dantur axes principales, atque in quibusdam adeo infiniti, qui simul sunt axes gyrationis liberi, omnia corpora talis motus sunt capacia idque infinitis modis.

SCHOLION.

Fig. 75. 601. Ad hujusmodi ergo motum calculo evolvendum sit AB recta, in qua centrum inertiae I uniformiter progreditur, cujus celeritas sit $= c$. Interea autem corpus circa axem principalem MIN gyretur, qui cum recta AB perpetuo eundem angulum AIM constituat, circa quem gyretur celeritate angulari $= \gamma$. Quod si jam initio centrum inertiae fuerit in A, et elapso tempore t pervenerit in I, erit spatium motu progressivo percursum $AI = ct$, et interea motu angulari corpus circa axem

Digitized by Google

axem MN descripserit angulum $= \gamma t$, necesse est. Ceterum compages corporis easdem vires sustinebit, ac si motus progressivus abesset. Quod denique ad motum cujuscunque puncti corporis attinet, is primo definiatur quasi motus progressivus abesset, tum cum eo conjungatur celeritas progressiva secundum praecepta resolutionis motus supra tradita, sicque habebitur verus ejus puncti motus.

PROBLEMA. 53.

602. Si corpus rigidum motu feratur mixto ex progressivo et gyratorio, definire eas vires, quarum actione axis gyrationis de situ suo sibi parallelo non deflectatur, motusque ideo maneat mixtus ex progressivo et gyratorio.

SOLUTIO.

Primo perspicuum est, omnes vires, quarum directiones per centrum inertiae corporis transeunt, nihil in motu gyratorio efficere, sed tantum ad motum progressivum impendi, ita ut ab iis axis gyrationis non de situ suo deflectatur. Tales ergo vires ad id genus virium, quas quaerimus pertinent; tum vero etiam eo sunt referendae illae vires, quae solum motum gyratorium afficiunt, quas ita vidimus esse comparatas, ut si AB sit axis gyrationis, ad eumque in quovis puncto L constituatur planum normale, binae vires aequales et contrariae Nn et Ll in hoc plano applicatae hunc effectum praestent: atque harum virium altera Ll ipsi axi applicata concipi potest. Verum hujusmodi binis viribus aequivalent binae similes vires, in plano, quod axi normaliter in ipso centro inertiae I constituitur, applicatae, quae sint Kk et Ii, illis aequales et parallelae, sumto intervallo IK = LN; harum enim contrariae cum illis in aequilibrio consisterent. Sicque loco binarum quarumvis talium virium Nn et Ll semper substituere licet binas similes et aequales in plano per centrum inertiae I ad axem normaliter ducto applicatas. Quare si binas hujusmodi vires quascunque Kk et Ii cum viribus quibuscunque ipsi centro inertiae applicatis conjungamus, habebimus generatim id genus virium, quibus motus mixtus ita mutatur, ut axis gyrationis sibi maneat parallelus. Inter vires igitur centro inertiae I applicatas statuamus unam Iη ipsi Ii aequalem et contrariam, qua haec destruatur, ac jam vires quaesitae ita describi possunt, ut praeter vires centro inertiae I applicatas complectantur vires quascunque, quarum directiones sint in plano per centrum inertiae I ad axem normaliter ducto, et quotcunque hujusmodi vires corpori fuerint applicatae, mo- Fig. 76.

Digitized by Google

tus ejus mixtus aliam inde mutationem non patitur, nisi qua axis situm sibi parallelum servet.

COROLL. 1.

603. Hic ergo alias vires contemplari non licet, nisi quae vel ipsi centro inertiae sint applicatae, vel quarum directiones reperiantur in plano ad axem normali et per centrum inertiae ducto.

COROLL. 2.

604. Hujusmodi igitur viribus vel motus progressivus afficitur, vel gyratorius, vel uterque, sed tamen ita, ut axis gyrationis perpetuo situm sibi parallelum sit conservaturus.

SCHOLION.

605. En ergo vires, ad quas nostra praesens tractatio adstringitur, quarum effectum in motu corporis mixto mutando ex principiis adhuc stabilitis definire licebit: de aliis autem viribus quibuscunque, nisi forte per aequivalentiam ad tales reduci queant, certum est, ab iis axem gyrationis de situ suo deturbari, motumque ad aliud genus traduci, quod etiamnum evolvere non valemus. Cujusmodi autem effectum vires assignatae producant, tribus problematibus investigabimus, quorum primo in effectum earum virium inquiremus, quarum directiones per ipsum centrum inertiae corporis transeunt: in secundo alteram virium speciem contemplabimur, quarum directiones sitae sunt in plano, quod ad axem in ipso centro inertiae est normale. In tertio denique effectum a viribus utriusque speciei, simul sollicitantibus oriundum investigemus. Perpetuo autem corpori initio ejusmodi motum mixtum imprimi assumimus, ut gyratorius fiat circa axem principalem corporis.

PROBLEMA. 54.

606. Si corpori rigido initio impressus fuerit motus quicunque mixtus ex progressivo et gyratorio circa axem principalem, idque deinceps sollicitetur a viribus quibuscunque, quarum media directio constanter per ejus centrum inertiae transeat, determinare corporis motum.

SOLUTIO.

Quia virium sollicitantium media directio perpetuo per ejus centrum inertiae transit, motus gyratorius nullam inde mutationem patietur,

Digitized by Google

tur, sed uniformiter peragi perget, quasi axis quiesceret, unde ad quodvis tempus facillime patebit, quantus angulus jam circa axem motu gyratorio fuerit descriptus. Tota ergo quaestio reducitur ad motum progressivum, qui ex motu centri inertiae perfecte cognoscetur, corpus scilicet ita consideretur, quasi tota ejus massa in centro inertiae esset collecta, atque ex viribus, quibus quovis temporis momento sollicitatur, ejus motus eodem modo definietur, quo motum punctorum liberum a viribus quibuscunque sollicitatorum determinare docuimus, ita ut superfluum foret haec fusius prosequi. Cum autem ad quodvis tempus locus centri inertiae fuerit definitus, etiam positio axis gyrationis et quanto angulo corpus circa eum jam se converterit, patebit.

COROLLARIUM.

607. Hic ergo utrumque motum ita seorsim considerare licet, quasi alter plane non adesset, dum motus gyratorius manet aequabilis, progressivus autem perinde turbatur, ac si tota corporis massa in centro inertiae collecta ab iisdem viribus urgeretur.

PROBLEMA. 55.

608. Si corpori rigido initio impressus fuerit motus mixtus ex progressivo et gyratorio circa axem principalem, idque sollicitetur a viribus, quarum media directio constanter in plano ad axem per centrum inertiae normaliter ducto reperiatur, determinare corporis motum.

SOLUTIO.

Quia axis sibi semper manet parallelus, elapso tempore t teneat Fig. 76.
situm AB, et ducto per centrum inertiae I plano ad axem normali, in hoc sit Kk media directio virium jam corpus sollicitantium, et vis illis aequivalens sit $Kk = V$: cui in I aequalis et contraria $Ii = V$ applicata concipiatur, quae autem a pari opposita $I\eta = V$ denuo destruatur, ita ut corpus jam ab his tribus viribus Kk, Ii et $I\eta$ sollicitetur. Nunc autem a binis viribus Kk et Ii solus motus gyratorius afficitur, cujus immutatio ita definitur: Ex centro inertiae I in directionem vis Kk demittatur perpediculum, quod sit $= f$, erit momentum hujus vis $= Vf$ ad motum sive acceleratum sive retardandum tendens: tum sit massa corporis $= M$ ejusque respectu axis AB momentum inertiae $= Mkk$. Quibus positis, si celeritas angularis circa axem AB jam fuerit $= v$, quae perinde aestimatur, ac si axis quiesceret, erit $dv = +\frac{2Vfgdt}{Mkk}$: unde.

ad quodvis tempus vera celeritas angularis ω est petenda. Deinde vis $I\eta = V$ solum motum progressivum afficit, idque non aliter, ac si tota corporis massa M in ipso centro inertiae I esset collecta, ita ut corpus tanquam punctum I, quod jam a vi $I\eta = V$ sollicitetur, considerare liceat: quae determinatio cum in praecedentibus satis sit explicata, manifestum est, quomodo ad quodvis tempus tam motum progressivum, quam gyratorium assignari oporteat.

COROLL. 1.

609. Si motus progressivus initio fuerit nullus, centrum inertiae in ipso plano ad axem normali moveri incipiet, et cum vires sollicitantes perpetuo in eodem plano agant, totus centri inertiae motus in eodem plano absolvetur, ad quod axis gyrationis ubique erit normalis.

COROLL. 2.

610. Idem evenit, si prima directio motus centri inertiae fuerit ad axem gyrationis normalis; tum enim constanter in plano ad axem gyrationis normali motum suum continuabit. Secus autem evenit, si prima motus progressivi directio cum axe gyrationis angulum fecerit obliquum.

COROLL. 3.

611. Motus ergo gyratorius ex momento vis sollicitantis Kk quod est $= Vf$, motus autem progressivus ex ipsa hac vi $K\kappa = V$ ita definitur, quasi haec vis in sua directione ipsi centro inertiae applicata esset.

PROBLEMA. 56.

612. Si corpori rigido impressus fuerit motus mixtus ex progressivo et gyratorio circa quempiam axem principalem, idque deinceps sollicitetur partim a viribus, quarum media directio per ipsum centrum inertiae transit, partim vero ab ejusmodi viribus, quarum directio media in plano per centrum inertiae normaliter ad axem transeunte versatur; determinare motum corporis.

SOLUTIO.

Hujus problematis solutio sponte ex praecedente fluit, dummodo insuper ratio habeatur virium, quarum media directio per ipsum centrum inertiae transit, et quibus solum motum progressivum affici vidimus. Quare pro motu progressivo determinando praeter vires priores centro inertiae per se applicatas, eidem centro insuper applicatae concipian-

Digitized by Google

cipiantur omnes vires posteriores singulae secundum suas directiones: tum si placet tota etiam corporis massa in eodem puncto collecta consideretur, ut habeatur casus puncti seu corpusculi infinite parvi a viribus quibuscunque sollicitati, quem per praecepta superiora expedire licebit. Deinde pro motu gyratorio, omissis viribus per centrum inertiae transeuntibus, considerentur eae solae, quarum media directio est in plano per centrum inertiae ad axem normaliter ducto, atque ex singulis vel vi omnibus aequivalente colligetur momentum respectu axis gyrationis, quod si fuerit $= Vf$, mutatio motus gyratorii inde elicitur ut supra, cognito autem seorsim utroque motu universus corporis motus sponte innotescit.

COROLL. 1.

613. Ad motum ergo progressivum definiendum, omnes vires, quibus corpus sollicitatur, singulas in suis directionibus ad centrum inertiae transferri debent, per easque motus progressivus perinde determinabitur, ac si nullus motus gyratorius adesset.

COROLL. 2.

614. Ad motum autem gyratorium definiendum omnium virium sollicitantium colligantur momenta respectu axis gyrationis; hincque motus gyratorius perinde determinabitur, ac si nullus adesset motus progressivus, seu axis gyrationis teneretur fixus.

SCHOLION.

615. Corollarium prius latissime patet, uti infra videbimus, quomodocunque etiam vires sollicitantes fuerint applicatae: hic autem sufficiat id saltem pro ejusmodi viribus, quales in problemate assumsimus, admisisse: posterius vero locum non habet, nisi virium, quae per se non transeunt per centrum inertiae, media directio sita fuerit in plano ad axem normali et per centrum inertiae transeunte: alioquin enim axis sibi non maneret parallelus. Longissime ergo adhuc distamus a problemate generali, quo corporis rigidi a viribus quibuscunque sollicitati motus quaeritur: quo igitur continuo propius eo accedamus, corpus rigidum in quiete consideremus, et dum a viribus quibuscunque sollicitetur, primam motus generationem investigemus. Quamvis enim statim illud problema aggredi possemus tamen praestabit per gradus quasi eo ascendere, ut hoc modo clariorem omnium elementorum cognitionem consequamur.

Digitized by Google

CAPUT IX.

DE PRIMA MOTUS GENERATIONE IN CORPORIBUS RIGIDIS.

THEOREMA. 6.

616. Si cognitus fuerit effectus duarum virium junctim agentium in motu generando, quarum altera ipsi centro inertiae sit applicata, alterius etiam seorsim agentis effectus innotescet.

DEMONSTRATIO.

A vi corpori in ipso centro inertiae applicata generatur motus progressivus purus, quo singula ejus elementa secundum directionem vis per aequalia spatiola promoventur, quae si vis sollicitans sit $= V$ et massa corporis $= M$, tempusculo dt sunt $= \frac{Vgdt^2}{M}$. Quodsi jam corpus praeter vim hanc V centro inertiae applicatam sollicitetur ab alia vi quacunque S, effectusque harum duarum virium simul agentium fuerit cognitus, res ita concipiatur, quasi corpus insuper a vi contraria ipsi V aequali et centro inertiae applicata sollicitaretur, qua prior effectus ita turbabitur, ut totum corpus motu progressivo secundum directionem hujus vis retro feratur per spatiolum $= \frac{Vgdt^2}{M}$, qui effectus cum illo conjunctus dabit effectum solius vis S corpus sollicitantis, qui propterea innotescet.

COROLL. 1.

617. Effectus nempe vis S aequalis est effectui a binis viribus V et S simul agentibus producto, demendo hunc effectum, quem sola vis V produceret: secundum ea quae supra de resolutione motus sunt praecepta.

COROLL. 2.

618. Si ergo a duabus viribus V et S simul urgentibus corpori imprimatur motus gyratorius circa quempiam axem, a vi sola S corpori imprimetur motus mixtus ex eodem gyratorio et progressivo, qui ipsi a vi ipsi V aequali et contraria induceretur.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION.

619. Legibus juſtae methodi adverſari videbitur, quod ex effectu duarum virium ſimul agentium in effectum unius vis inquirere conemur. Verum in probl. 18. ubi vires definivimus a quibus axis gyrationis non afficiatur, vidimus has vires rariſſime ad unicam, ſemper autem ad duas reduci poſſe; quarum ergo effectus in corpus quieſcens aſſignari poterit. Quare ut unius tantum vis effectum definire valeamus, efficiendum eſt ut illarum binarum virium altera per ipſum corporis centrum inertiae tranſeat, ſicque hoc Theorema ampliſſimum nobis praeſtabit uſum. Quo accedit, ut etiam vires quaecunque corpus ſollicitantes ad duas hujusmodi vires reduci queant, quemadmodum jam docebimus.

THEOREMA. 7.

620. Quotcunque fuerint vires corpus rigidum ſollicitantes, et quomodocunque fuerint applicatae, eae ſemper ad duas reduci poſſunt, quarum altera per ipſum centrum inertiae corporis tranſeat.

DEMONSTRATIO.

Sit I centrum inertiae corporis, per quod pro lubitu ducatur recta quaecunque ID. Per directionem cujuslibet vis ſollicitantis ducatur planum ad rectam ID normale, quod eam ſecet in puncto R: ac niſi directio hujus vis in iſto plano ſit ſita, ea reſolvatur in duas vires $S\zeta$ et $S\sigma$, quarum illa ſit in plano ad ID normali, altera vero $S\sigma$ ipſi rectae ID ſit parallela. Ad certum punctum fixum D ſtatuatur planum ad rectam ID normale; ac ducta recta ISE loco vis $S\zeta$ in punctis I et E ſubſtitui poterunt vires $I\iota$ et $E\varepsilon$ ipſi parallelae, ut ſit Fig. 77.

$$\text{vis } I\iota = \text{vi } S\zeta . \frac{DR}{ID} \text{ et vis } E\varepsilon = \text{vi } S\zeta . \frac{IR}{ID}.$$

ſimili modo loco vis $S\sigma$ ſubſtituantur vires $I\eta$ et $E\varepsilon$ ipſi aequivalentes parallelae, ut ſit

$$\text{vis } I\eta = \text{vi } S\sigma . \frac{DR}{ID} \text{ et vis } E\varepsilon = \text{vi } S\sigma . \frac{IR}{ID}.$$

Talis reſolutio in omnibus viribus corpus ſollicitantibus inſtituatur, atque ex ſingulis obtinebuntur binae vires ipſi centro inertiae I applicatae, tum vero etiam binae vires $E\varepsilon$ et $E\varepsilon$ illa in plano ad axem ID in D normali ſita, haec vero ad iſtud planum normalis ſeu axi ID parallela. Omnibus viribus, quae centro inertiae I applicantur, in unam collectis, omnes vires $E\varepsilon$, quia in eodem ſunt plano, pariter in unam colligi

Fig. 78. ligi poterunt, quae sit vis Mm: similique modo omnes vires $E\varepsilon$, quia sunt inter se parallelae, etiam in unam colligi possunt, quae sit vis $N\nu$, axi ID itidem parallela, quemadmodum illa Mm in plano mMD ad axem normali versatur. Hoc modo loco omnium virium sollicitantium, quotcunque fuerint, nanciscimur tres vires, unam ipsi centro inertiae I applicatam et binas Mm et $N\nu$, quae tres autem porro ad duas reducentur hoc modo: Producatur recta IN in Q donec ejus ab axe distantia QR aequalis fiat distantiae DM ex D per N ad occursum vis Mm usque ductae: eritque ID : IR = DN : DM. Tum loco vis $N\nu$ substituere licebit vires $I\imath$ et Qq ipsi parallelas, ut sit

$$\text{vis } I\imath = \text{vi } N\nu. \frac{MN}{DM} \text{ et vis } Qq = \text{vi } N\nu. \frac{DN}{DM}.$$

Prior cum reliquis centro inertiae applicatis in unam coalescit, posterior vero Qq secundum suam directionem in ipso puncto M applicata concipi potest, sieque cum vi Mm pariter uniri potest, quae sit vis $M\mu$, ita ut nunc omnes vires sollicitantes reductae sint ad duas, alteram centro inertiae I applicatam, alteram vero istam vim $M\mu$.

COROLL. 1.

621. Quoniam tam axem ID quam in eo punctum D pro lubitu assumere licet, vires sollicitantes infinitis modis ad hujusmodi binas vires, quarum altera ipsi centro inertiae sit applicata, reduci possunt.

COROLL. 2.

622. Facta autem una hujusmodi reductione, per eadem principia loco vis $M\mu$ duae aliae ipsi parallelae substitui possunt, quarum altera centrum inertiae I afficiat, altera vero in puncto quovis alio rectae IM sit applicata, unde patet omnes reductiones ad eandem rectam IM referri.

SCHOLION.

623. Theorema hoc maximi est momenti in argumento hujus capitis evolvendo, ubi propositum nobis est in primam motus generationem inquirere, quando corpus rigidum quiescens et liberum a viribus quibuscunque sollicitatur. Cum enim hae vires quotcunque etiam fuerint semper ad binas revocari queant, quarum altera ipsi centro inertiae sit applicata, hujusque effectus sit determinatu facillimus, totum negotium eo redit, ut effectus ab unica quacunque vi productus definiatur; quod si minus successerit, cum ea vi alia quaecunque centro inertiae

Digitized by Google

inertiae applicata combinari poterit, ac si effectus inde conjunctim productus assignari potuerit, totum negotium erit confectum. Primum ergo dispiciamus, quomodo duae hujusmodi vires comparatae esse debeant, ut ab iis corpori motus circa datum axem per ejus centrum inertiae transeuntem imprimatur; hoc enim praestito facile erit institutum nostrum prosequi.

PROBLEMA. 57.

624. Definire duas vires corpori rigido applicandas, quarum alterius directio per centrum inertiae transeat, ut corpus ab iis sollicitatum circa datum axem per ejus centrum inertiae transeuntem converti incipiat.

SOLUTIO.

Incidat centrum inertiae in punctum O, sitque OA axis, circa quem motus gyratorius generari debeat; ac necesse est, ut vires sollicitantes ita sint comparatae, ut axis ab illis nihil patiatur. Hoc ergo problema continetur in probl. 18. supra §. 390. soluto, ubi in scholio §. 394. vires generaliter exhibitas ita determinari oportet, ut pro termino O omnes vires ipsi puncto O sint applicatae. Ponantur ergo vires $Pp = o$ et $Qq = o$, unde ob $KI = o$, aeque ac $OK = o$, fiet vis $O\pi = \frac{\int xy\,dM}{ab}$ et vis $O\varphi = \frac{\int xz\,dM}{ab}$. Deinde pro termino A sumantur vires $A\varrho = o$ et $A\sigma = o$, fientque vires $R\rho = \frac{\int xy\,dM}{ab}$ et $S\sigma = \frac{\int xz\,dM}{ab}$, ita ut sit vis $R\rho =$ vi $O\pi$ et vis $S\sigma =$ vi $O\varphi$: tum vero requiritur, ut sit $AR\int xydM + AS\int xzdM = a\int rrdM$. Quoniam planum OAR ob centrum inertiae I in O positum pro lubitu assumi potest, id ita assumi poterit, ut fiat $\int xzdM = o$, hincque duae tantum supersunt vires problemati satisfacientes, altera vis $O\pi = \frac{\int xydM}{ab}$ ipsi centro inertiae applicata, altera vis $R\rho = \frac{\int xydM}{ab}$ in distantia ab axe $AR = \frac{a\int rrdM}{\int xydM}$ applicanda. Hinc solutionem problematis ita brevi complectemur: cum axe gyrationis proposito IA ejusmodi binae directrices IB et IC conjungantur, ut constitutis pro quovis corporis elemento dM coordinatis illis parallelis $IX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, positaque $XZ = r$ $(yy + zz) = rr$, fiat $\int xzdM = o$. Tum sumto intervallo pro lubitu $IA = a$, et ipsi IB parallela

Fig. 43.

Fig. 79.

rallela AR $= \frac{afrrdM}{\int xydM}$, quaecunque vis Rr ipsi IC parallela et in puncto R applicata effectum propositum producet, si modo insuper centro inertiae I vis illi aequalis et contraria Iπ applicetur: et positis his viribus Rr $=$ Iπ $=$ V cum momentum respectu axis IA inde natum sit $= \frac{VafrrdM}{\int xydM}$, tempusculo dt circa axem IA generabitur angulus $d\omega = \frac{Vagdt^2}{\int xydM}$.

COROLL. 1.

625. Cum intervallum IA $= a$, a quo distantia AR pendet, pro lubitu accipi possit, omnia puncta R reperiuntur in linea recta IR faciente cum axe IA angulum, cujus tangens $= \frac{\int rrdM}{\int xydM}$, dummodo planum AIB ita sit sumtum, ut fiat $\int xzdM = 0$.

COROLL. 2.

626. Ducta hac recta IR quaelibet vis huic rectae in quovis puncto applicata et ad planum AIB normalis, si in I vis illi aequalis et contraria Iπ insuper applicetur, corpus circa axem IA converti incipiet.

COROLL. 3.

627. Proposita autem quacunque vi Rr, cui aequalis in I contrarie sit applicata, corpus circa quempiam axem per centrum inertiae transeuntem verti incipiet, de quo tantum patet, quod situs sit in plano, per centrum inertiae I ad directionem vis sollicitantis Rr normaliter ducto.

PROBLEMA. 58.

628. Si corpus rigidum quiescens a vi quacunque sollicitetur, determinare primum initium motus, qui ab ea vi in corpore generabitur, circa axem in plano ad directionem vis normali situn, si quidem fieri queat.

SOLUTIO.

Fig. 80. Sit I centrum inertiae corporis, per quod ductum concipiatur planum ad directionem vis normale, quod ipso plano tabulae referatur, cui ergo vis sollicitans Rr $=$ V normaliter insistere est intelligenda,

Digitized by Google

genda, et recta IR ad eam sit normalis, quae ponatur IR $= h$. Applicetur corpori insuper in centro inertiae vis Iπ illi aequalis et contraria, ita ut ex oppositio in planum tabulae sit normalis. Ab his duabus viribus simul agentibus corpus circa quempiam axem per centrum inertiae transeuntem converti incipiet, atque ex §. praec. patet, hunc axem in plano tabulae fore situm, qui propterea sit IA, pro cujus positione quaeri debet angulus RIA $= \eta$; ita ut ducta ex R ad eum normali RA sit RA $= h \sin \eta$ et IA $= h \cos \eta$. Quoniam autem positionem hujus axis nondum novimus, referamus singula corporis elementa ad ternas directrices IR, IP, IQ, quarum prima ex directione vis sollicitantis datur, altera IP in plano tabulae ad eam sit normalis, ac tertia IQ ipsi huic plano normaliter insistat. Sint ergo coordinatae secundum has ternas directrices IX $= x$, XY $= y$ et YZ $= z$. Deinde ad coordinatas superioribus formulis consentaneas obtinendas, ex Y ad axem gyrationis IA ducatur normalis YX', sintque istae coordinatae:

IX' $= x'$; X'Y $= y'$ et YZ $= z' = z$ ut ante,

quarum priores per praecedentes ita determinentur, ut sit

$$x' = x \cos \eta - y \sin \eta \text{ et } y' = x \sin \eta + y \cos \eta.$$

Ex his autem necesse est fiat $\int x' z dM = 0$, et tang AIR $=$ tang $\eta = \frac{\int r r dM}{\int x' y' dM}$ (625.) existente $rr = y'y' + zz$.

At vero erit

$$\int x' z dM = \cos \eta \int xz dM - \sin \eta \int yz dM$$
$$\int rr dM = \sin \eta^2 \int xx dM + 2 \sin \eta \cos \eta \int xy dM + \cos \eta^2 \int yy dM + \int zz dM$$
$$\int x' y' dM = \sin \eta \cos \eta \int xx dM + (\cos \eta^2 - \sin \eta^2) \int xy dM - \sin \eta \cos \eta \int yy dM$$

Ponamus haec integralia per totum corpus extensa:

$$\int xx dM = A; \int yy dM = B; \int zz dM = C$$
$$\int xy dM = D; \int xz dM = E; \int yz dM = F$$

atque habebimus has aequationes:

$$E \cos \eta - F \sin \eta = 0 \text{ et}$$
$$A \sin \eta^2 + D(\cos \eta^2 - \sin \eta^2). \text{ tang } \eta - B \sin \eta^2 = A \sin \eta^2 + 2D \sin \eta \cos \eta + B \cos \eta^2 + C$$

seu D tang η + B + C $= 0$: unde duplici modo nanciscimur:

$$\text{tang } \eta = \frac{E}{F} \text{ et tang } \eta = \frac{-B-C}{D}$$

qui bini valores nisi consentiant, problema sub conditione propositia, qua axis gyrationis in plano ad directionem vis normali assumitur, resolvi nequit.

Digitized by Google

Ponamus ergo vim ita esse applicatam, ut fiat $\frac{E}{F} + \frac{B+C}{D} = 0$, atque corpus gyrari incipiet circa axem IA in plano ad directionem vis normali situm, ut sit *tang* RIA $= \frac{E}{F} = \frac{-B-C}{D}$. Tum ob momentum vis $= V b \int \eta$, et momentum inertiae respectu hujus axis $\int rr dM = A \int \eta^2 + B \cos \int \eta^2 + 2D \int \eta \cos \eta + C$, tempusculo dt vertetur per angulum $d\omega = \frac{V g b dt^2 \int \eta}{A \int \eta^2 + B \cos \int \eta^2 + 2D \int \eta \cos \eta + C}$. Qui cum sit effectus binarum virium Rr et Iπ junctim agentium, ut prodeat effectus solius vis R$r = V$, addatur insuper v. $p = V$, et corpori praeter motum gyratorium imprimetur motus progressivus purus secundum directionem IQ ipsi Rr parallelam, quo tempusculo dt conficietur spatiolum $= \frac{V g dt^2}{M}$.

COROLL. 1.

629. Solutio ergo hujus problematis ad eos tantum casus extenditur, quibus vis sollicitans R$r = V$ corpori ita est applicata, ut collectis formulis integralibus expositis fiat $\frac{E}{F} + \frac{B+C}{D} = 0$.

COROLL. 2.

630. Nisi autem haec proprietas locum habeat, solutio problematis adhuc latet: hocque tantum constat, gyrationem non fieri circa axem, qui situs sit in plano ad directionem vis sollicitantis normali.

SCHOLION.

631. Mirum utique videbitur, quod cum praeparatio ex viribus, quas axis supra sustinere inventus est, petita solutionem completam polliceri sit visa, nunc tamen infiniti casus excludantur, quos nostra solutio non complectatur. Cum enim certum sit, conversionem circa nullum alium axem fieri posse, nisi qui nullas plane vires sustineat, problema 18. perfectam solutionem suppeditare deberet, si quidem ipsum in omni extensione fuisset solutum. Verum probe notandum est, in hoc problemate nullas alias vires esse assumtas, nisi quarum directiones reperiantur in planis ad axem normalibus, cum tamen vires etiam obliquae induci potuissent, dummodo vires axi parallelae inde natae se destruerent. Atque hoc revera usu venit in casibus exclusis, ubi corpus initium gyrationis capere debet circa axem, qui est inclinatus ad planum

Digitized by Google

num per centrum inertiae ad vim sollicitantem normaliter ductum, quoniam tum ex resolutione vis Rr nascitur vis tali axi parallela: cujus utique ratio haberi debet, si hoc problema in genere resolvere velimus.

PROBLEMA. 59.

632. Si corpus rigidum quiescens a vi quacunque sollicitetur, eique simul in centro inertiae vis aequalis et contraria applicata fuerit, definire axem, circa quem primum gyrari incipiet.

SOLUTIO.

Sit I centrum inertiae corporis, ac tabula referat ut ante planum per I ad directionem vis sollicitantis, quae sit $Rr = V$, normaliter ductum, in quo ponatur distantia $IR = b$. Tum sumto in hoc plano angulo $RIA = \eta$, ut ducto ex R in IA perpendiculo RA sit $IA = b\cos\eta$ et $RA = b\sin\eta$: ducatur in A ad planum normalis AD, sitque ducta ID angulus $AID = \theta$, ideoque $AD = b\cos\eta\tang\theta$ et $ID = \frac{b\cos\eta}{\cos\theta}$; quae linea ID sit axis gyrationis quaesitus ita, ut ambos angulos η et θ investigari oporteat. Corpus ergo exprimi debet per ternas coordinatas, quarum una in ipso axe ID capiatur. Dari igitur assumo relationem inter coordinatas $IX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$, quarum prima in ipsa recta IR, secunda in plano ad vim normali, ac tertia ipsi vi Rr parallela capiatur. Ex Y primo ad IA perpendicularis YX' ducatur, in plano autem ad tabulam normali AID perpendicularis $X'y$ ipsi YZ et yZ ipsi $X'Y$ parallela, erit ut ante vidimus: Fig. 80.

$$IX' = x\cos\eta - y\sin\eta;\ X'y = YZ = z;\ X'Y = yZ = x\sin\eta + y\cos\eta.$$

Tum in plano normali ex y ad ID ducatur perpendicularis yx, et habebuntur novae coordinatae, quales desideramus, quae sint $Ix = X$; $xy = Y$ et $yZ = Z$, atque ita per praecedentes determinantur.

$$X = x\cos\eta\cos\theta - y\sin\eta\cos\theta + z\sin\theta;\ Y = z\cos\theta - x\cos\eta\sin\theta + y\sin\eta\sin\theta;\ Z = x\sin\eta + y\cos\eta.$$

Hae jam coordinatae, plano IAD in planum tabulae projecto in fig. 81. repraesententur, ad quod jam $AR = b\sin\eta$ erit normalis, et vis Rr ipsi AD parallela: ducatur DV ipsi AR parallela, et vis in puncto V applicata concipiatur, ut sit vis $Vr = V$: ductisque Vv ipsi xy et Vu ipsi Ix parallela, ob angulum $rVv = \theta$; vis Vr resolvitur in binas has: vim $Vv = V\cos\theta$ et vim $Vu = V\sin\theta$, quae contrarie puncto I applicentur, quarum prior sit vis $Ii = V\cos\theta$, ad ID jam in plano tabulae normalis,

lis, altera vero axis secundum DI urgebitur. Momentum autem vis $Vv = V\cos\theta$ respectu axis ID est $= V\cos\theta.\, h\sin\eta = Vh\sin\eta\cos\theta$, et positio $YY + ZZ = RR$ momentum inertiae corporis respectu axis ID $= \int RR\,dM$, unde tempusculo dt, conversio fiet per angulum $d\omega = \frac{Vgh\,dt^2\sin\eta\cos\theta}{\int RR\,dM}$. Cum axis nullas vires sentire debeat, vis $Vv = V\cos\theta$ ipsi axi in D. applicetur, ut sit vis $Dd = V\cos\theta$, vis vero $Vu = V\sin\theta$ in sua directione perpendiculo $IT = DV = h\sin\eta$ applicata concipiatur, ex qua pro axe primo vis nascitur secundum ID urgens, quae superiorem illam destruit: tum vero posito intervallo $ID = \frac{h\cos\eta}{\cos\theta} = a$, inde oriuntur binae vires ad axem et planum tabulae normales $I\eta = D\delta = \frac{h\sin\eta}{a} V\sin\theta = V\,tang\,\eta\sin\theta\cos\theta$. Praeterea vero habentur vires $Ii = Dd = V\cos\theta$, quae per vires elementares destrui debent. At ex probl. 16. vires elementares huc accommodatae praebent binas vires Pp et Qq in punctis P et Q applicandae, ut sit

$$IP = \frac{\int XZ\,dM}{\int Z\,dM}; \text{ vis } Pp = \frac{Vh\sin\eta\cos\theta\int Z\,dM}{\int RR\,dM}$$

$$IQ = \frac{\int XY\,dM}{\int Y\,dM}; \text{ vis } Qq = \frac{Vh\sin\eta\cos\theta.\int Y\,dM}{\int RR\,dM}.$$

Cum autem motus hic in contrarium sensum incipiat, atque ibi assumsimus, hae vires praecedentibus aequivalentes statui debent; et quia ob I centrum inertiae fit $\int Y\,dM = 0$, et $\int Z\,dM = 0$, omnia ad momenta revocantur, ut esse debeat $Pp.\ IP = Dd.\ ID$ et $Qq.\ IQ = D\delta.\ ID$ sicque habebimus has duas aequationes:

$$\frac{Vh\sin\eta\cos\theta\int XZ\,dM}{\int RR\,dM} = Vh\cos\eta \text{ et}$$

$$\frac{Vh\sin\eta\cos\theta\int XY\,dM}{\int RR\,dM} = Vh\sin\eta\sin\theta \text{ sive}$$

$$\sin\eta\cos\theta\int XZ\,dM = \cos\eta\int RR\,dM \text{ et } \cos\theta\int XY\,dM = \sin\theta\int RR\,dM.$$

Nunc igitur positis integralibus ex coordinatis principalibus x, y et z natis:

$$\int xx\,dM = A;\ \int yy\,dM = B;\ \int zz\,dM = C;\ \int xy\,dM = D;\ \int xz\,dM = E,\ \int yz\,dM = F$$

ob $RR = YY + ZZ$ erit

$$\int RR\,dM = A(\int\eta^2 + \cos\eta^2\int\theta^2) + B(\cos\eta^2 + \int\eta^2\int\theta^2) + C\cos\theta^2 + 2D\int\eta\cos\eta\cos\theta^2 - 2E\cos\eta\int\theta\cos\theta + 2F\int\eta\int\theta\cos\theta$$

$$\int XY\,dM = -A\cos\eta^2\int\theta\cos\theta - B\int\eta^2\int\theta\cos\theta + C\int\theta\cos\theta + 2D\int\eta\cos\eta\int\theta\cos\theta + E\cos\eta(\cos\theta^2 - \int\theta^2) - F\int\eta(\cos\theta^2 - \int\theta^2)$$

$$\int XZ\,dM = A\int\eta\cos\eta\cos\theta - B\int\eta\cos\eta\cos\theta + D\cos\theta(\cos\eta^2 - \int\eta^2) + E\int\eta\int\theta + F\cos\eta\int\theta$$

quibus valoribus substitutis binae aequationes inventae induent has formas:

I. $-A\cos\eta\int\theta^2 - B\cos\eta - C\cos\eta\cos\theta^2 - D\int\eta\cos\theta^2 + E(1+\cos\eta^2)\int\theta\cos\theta - F\int\eta\cos\eta\int\theta\cos\theta = 0$

II. $-A\sin\theta - B\sin\theta + E\cos\eta\cos\theta - F\int\eta\cos\theta = 0$

quarum posterior praebet $tang\ \theta = \frac{E\cos\eta - F\sin\eta}{A+B}$. At II. $\cos\eta\int\theta - 1$ praebet

$$B\cos\eta\cos\theta^2 + C\cos\eta\cos\theta^2 + D\int\eta\cos\theta^2 - E\int\theta\cos\theta = 0,$$

unde colligitur $tang\ \theta = \frac{(B+C)\cos\eta + D\int\eta}{E}$; hincque tandem $tang\ \eta = \frac{EE-(A+B)(B+C)}{(A+B)D+EF}$: unde ambo anguli RIA $= \eta$ et AID $= \theta$ atque adeo axis gyrationis ID innotescit.

COROLL. 1.

633. Proposita ergo vi quacunque $Rr = V$, cui simul aequalis in ipso centro inertiae I contrarie sit applicata, si per I planum ad directionem vis normale ducatur PIR, atque ad id recta IQ perpendicularis, his ternis directricibus IR, IP, IQ pro quovis elemento corporis dM in Z sito parallelae capiantur coordinatae $IX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$, hincque ex indole corporis colligi debent sequentes sex valores:

$$\int xx\,dM = A,\ \int yy\,dM = B,\ \int zz\,dM = C;\ \int xy\,dM = D;\ \int xz\,dM = E;\ \int yz\,dM = F.$$

COROLL. 2.

634. His inventis in plano RIP ad directionem vis normali ex opposito coordinatarum $XY = y$ positivarum, seu in regione negativarum capiatur angulus RIA $= \eta$ ut sit $tang\ \eta = \frac{EE-(A+B)(B+C)}{(A+B)D+EF}$, quo invento super illo plano in regione coordinatarum $YZ = z$ positivarum erigatur

Digitized by Google

lis, altera vero axis secundum DI urgebitur. Momentum autem vis $Vv = V \cos\theta$ respectu axis ID est $= V \cos\theta . h \sin\eta = V h \sin\eta \cos\theta$, et posito $YY + ZZ = RR$ momentum inertiae corporis respectu axis ID $= \int RR dM$, unde tempusculo dt conversio fiet per angulum $d\omega = \frac{V g h dt^2 \sin\eta \cos\theta}{\int RR dM}$. Cum axis nullas vires sentire debeat, vis $Vv = V \cos\theta$ ipsi axi in D applicetur, ut sit vis $Dd = V \cos\theta$, vis vero $Vu = V \sin\theta$ in sua directione perpendiculo $IT = DV = h \sin\eta$ applicata concipiatur, ex qua pro axe primo vis nascitur secundum ID urgens, quae superiorem illam destruit: tum vero posito intervallo $ID = \frac{h \cos\eta}{\cos\theta} = a$, inde oriuntur binae vires ad axem et planum tabulae normales $I\eta = D\delta = \frac{h \sin\eta}{a} V \sin\theta = V \tang\eta \sin\theta \cos\theta$. Praeterea vero habentur vires $Ii = Dd = V \cos\theta$, quae per vires elementares destrui debent. At ex probl. 16. vires elementares huc accommodatae praebent binas vires Pp et Qq in punctis P et Q applicandas, ut sit

$$IP = \frac{\int XZ dM}{\int ZdM}; \text{ vis } Pp = \frac{V h \sin\eta \cos\theta . \int ZdM}{\int RR dM}$$

$$IQ = \frac{\int XY dM}{\int YdM}; \text{ vis } Qq = \frac{V h \sin\eta \cos\theta . \int YdM}{\int RR dM}.$$

Cum autem motus hic in contrarium sensum incipiat, atque ibi assumsimus, hae vires praecedentibus aequivalentes statui debent: et quia ob I centrum inertiae fit $\int Y dM = 0$, et $\int Z dM = 0$, omnia ad momenta revocantur, ut esse debeat Pp. $IP = Dd$. ID et Qq. $IQ = D\delta$. ID sicque habebimus has duas aequationes:

$$\frac{V h \sin\eta \cos\theta \int XZ dM}{\int RR dM} = V h \cos\eta \text{ et}$$

$$\frac{V h \sin\eta \cos\theta \int XY dM}{\int RR dM} = V h \sin\eta \sin\theta \text{ sive}$$

$$\sin\eta \cos\theta \int XZ dM = \cos\eta \int RR dM \text{ et } \cos\theta \int XY dM = \sin\theta \int RR dM.$$

Nunc igitur positis integralibus ex coordinatis principalibus x, y et z natis:

$$\int xx dM = A; \int yy dM = B; \int zz dM = C; \int xy dM = D; \int xz dM = E, \int yz dM = F$$

ob $RR = YY + ZZ$ erit

$\int RR dM$

Digitized by Google

$$\int RRdM = A(\int\eta^2 + cos\int\eta^2\int\theta^2) + B(cos\int\eta^2 + \int\eta^2\int\theta^2) + C\,cos\int\theta^2 + 2D\int\eta\,cos\int\eta\,cos\int\theta^2 - 2E\,cos\int\eta\int\theta\,cos\int\theta + 2F\int\eta\int\theta\,cos\int\theta$$

$$\int XYdM = -A\,cos\int\eta^2\int\theta\,cos\int\theta - B\int\eta^2\int\theta\,cos\int\theta + C\int\theta\,cos\int\theta + 2D\int\eta\,cos\int\eta\int\theta\,cos\int\theta + E\,cos\int\eta(cos\int\theta^2 - \int\theta^2) - F\int\eta(cos\int\theta^2 - \int\theta^2)$$

$$\int XZdM = A\int\eta\,cos\int\eta\,cos\int\theta - B\int\eta\,cos\int\eta\,cos\int\theta + D\,cos\int\theta(cos\int\eta^2 - \int\eta^2) + E\int\eta\int\theta + F\,cos\int\eta\int\theta$$

quibus valoribus substitutis binae aequationes inventae induent has formas:

I. $-A\,cos\int\eta\int\theta^2 - B\,cos\int\eta - C\,cos\int\eta\,cos\int\theta^2 - D\int\eta\,cos\int\theta^2 + E(1+cos\int\eta^2)\int\theta\,cos\int\theta - F\int\eta\,cos\int\eta\int\theta\,cos\int\theta = 0$

II. $-A\,sin\int\theta - B\,sin\int\theta + E\,cos\int\eta\,cos\int\theta - F\int\eta\,cos\int\theta = 0$

quarum posterior praebet $tang\int\theta = \frac{E\,cos\int\eta - F\,sin\int\eta}{A+B}$. At II. $cos\int\eta\int\theta - 1$ praebet

$$B\,cos\int\eta\,cos\int\theta^2 + C\,cos\int\eta\,cos\int\theta^2 + D\int\eta\,cos\int\theta^2 - E\int\theta\,cos\int\theta = 0,$$

unde colligitur $tang\int\theta = \frac{(B+C)\,cos\int\eta + D\int\eta}{E}$; hincque tandem $tang\int\eta = \frac{EE-(A+B)(B+C)}{(A+B)D+EF}$: unde ambo anguli RIA $= \eta$ et AID $= \theta$ atque adeo axis gyrationis ID innotescit.

COROLL. 1.

633. Proposita ergo vi quacunque $Rr = V$, cui simul aequalis in ipso centro inertiae I contrarie sit applicata, si per I planum ad directionem vis normale ducatur PIR, atque ad id recta IQ perpendicularis, his ternis directricibus IR, IP, IQ pro quovis elemento corporis dM in Z sito parallelae capiantur coordinatae $IX = x$, $XY = y$, et $YZ = z$, hincque ex indole corporis colligi debent sequentes sex valores:

$$\int xxdM = A,\ \int yydM = B,\ \int zzdM = C;\ \int xydM = D;\ \int xzdM = E;\ \int yzdM = F.$$

COROLL. 2.

634. His inventis in plano RIP ad directionem vis normali ex opposito coordinatarum $XY = y$ positivarum, seu in regione negativarum capiatur angulus RIA $= \eta$ ut sit $tang\,\eta = \frac{EE-(A+B)(B+C)}{(A+B)D+EF}$, quo invento super illo plano in regione coordinatarum $YZ = z$ positivarum erigatur

erigatur angulus AID $= \theta$, ut sit $tang\ \theta = \frac{E\,cos\,\eta - F\,sin\,\eta}{A+B}$ seu $tang\ \theta = \frac{(B+C)\,cos\,\eta + D\,sin\,\eta}{E}$ eritque recta ID axis gyrationis.

COROLL. 3.

635. Posita distantia IR $= b$, erit respectu hujus axis ID momentum vis sollicitantis $= V b\,sin\,\eta\,cos\,\theta$, et momentum inertiae $= \int RR\,dM$, quod etiam est $= tang\,\eta\,cos\,\theta \int XZ\,dM = cot\,\theta \int XY\,dM$, cujus valor ex praecedentibus facile eruitur: inde vero elemento temporis dt conversio fit per angulum $d\omega = \frac{V g b\,dt^2\,sin\,\eta\,cos\,\theta}{\int RR\,dM}$.

SCHOLION.

636. En ergo problema nostrum generale, in quo summa hujus capitis versatur, perfecte solutum; unde quidem casus ante tractatus sponte fluit, quippe quo est angulus $\theta = 0$: nam tum fit ex formula priori $tang\,\eta = \frac{E}{F}$ et ex posteriore $tang\,\eta = \frac{-B-C}{D}$, qui valores nisi conveniant, casus ille locum habere nequit. Vicissim autem si fuerit $DE + (B+C)F = 0$, ob $B+C = \frac{-DE}{F}$, fit $tang\,\eta = \frac{E}{F}$ et $tang\,\theta = 0$. Ceterum hic observo, ex iis quae supra de axibus principalibus sunt tradita esse

$$\int XY\,dM = \frac{-d.\int RR\,dM}{2\,d\theta}$$ sumto tantum θ variabili, et

$$\int XZ\,dM = \frac{d.\int RR\,dM}{2\,d\eta\,cos\,\theta}$$ sumto tantum η variabili.

Quibus valoribus substitutis binae conditiones principales postulant

$$\frac{\int \eta.d.\int RR\,dM}{2\,d\eta} = cos\,\eta \int RR\,dM \text{ et } \frac{-cos\,\theta.d.\int RR\,dM}{2\,d\theta} = \int \theta \int RR\,dM,$$

in quarum priore tantum η in posteriore tantum θ est variabile. Utriusque igitur idem est integrale $\int RR\,dM = \alpha \int \eta^2\,cos\,\theta^2$, unde vicissim concludo, angulos η et θ ita definiri oportere, ut quantitas $\frac{\int \eta^2\,cos\,\theta^2}{\int RR\,dM}$ fiat minimum, quoniam hinc eaedem binae aequationes resolvendae proveniunt.

Digitized by Google

reniunt. Eadem autem formula oritur, si $d\omega^2 \int RRdM$ seu $\int dM.RRd\omega^2$ reddatur minimum, in qua cum $Rd\omega$ denotet celeritatem elementi dM, ideoque $dM.RRd\omega^2$ ejus vim vivam uti vocatur, hinc colligimus istud insigne Theorema.

THEOREMA. 8.

637. Si corpus rigidum quiescens sollicitetur a vi quacunque, eique insuper in centro inertiae applicata sit vis aequalis et contraria, ei circa ejusmodi axem per centrum inertiae transeuntem primo instanti motus gyratorius imprimetur, ut totum corpus inde minimam adipiscatur vim vivam, quae est aggregatum omnium elementorum per quadrata celeritatum suarum acquisitarum multiplicatorum.

DEMONSTRATIO.

Quicunque enim axis per centrum inertiae transiens accipiatur, ejus respectu vis proposita V certum obtinebit momentum quod si Vf, tum vero etiam corpus ejus respectu certum obtinebit momentum inertiae, quod sit $= \int RRdM$: utrumque a situ axis assumti pendens; hinc autem tempusculo dt generabitur circa hunc axem angulus $d\omega = \frac{Vfgdt^2}{\int RRdM}$, et celeritas angularis infinite parva $\gamma = \frac{2Vfgdt}{\int RRdM}$: unde elementi dM ab axe intervallo $= R$ distantis celeritas fit $= R\gamma$, ideoque vis viva $= R^2\gamma^2 dM$. Totius ergo corporis vis viva tempusculo infinite parvo dt acquisita erit $= \gamma\gamma \int R^2 dM = \frac{4VVffggdt^2}{\int RRdM}$, quae ob Vg et dt constans erit minimum, si $\frac{ff}{\int RRdM}$ reddatur minimum, atque ex hac conditione positio axis determinetur. Hinc autem eadem axis determinatio resultat, quam ante invenimus: ita ut ex hoc principio minimi eadem solutio erui potuisset.

SCHOLION.

638. Quod ad usum solutionis ante inventae attinet, hoc adhuc nimis est molestum, quod unaquaque vi sollicitante indoles corporis ad peculiares coordinatas revocari debeat. Cui incommodo remedium affertur per ea quae supra de axibus principalibus cujusque corporis docuimus, quorum respectu si momenta inertiae semel fuerint inventa, facillime inde respectu omnium aliorum axium colligi possunt. Atque

Digitized by Google

etiam pro praesenti instituto sufficit, relationem corporis ad coordinatas axibus principalibus parallelas nosse, quoniam et hinc relatio ad quasvis alias ternas coordinatas derivari potest. Quamobrem problema superius ita resolvam, ut vim sollicitantem respectu axium principalium dari assumam; ac solutionem ipsam ex principio jam stabilito, quod minima vis viva generetur, petam.

PROBLEMA. 60.

639. Datis corporis rigidi axibus principalibus eorumque respectu momentis inertiae, si id a vi quacunque sollicitetur, simulque ipsi in centro inertiae applicata sit alia vis illi aequalis et contraria, definire axem, circa quem corpus primum gyrari incipiet.

SOLUTIO.

Fig. 82. Sit I centrum inertiae corporis, et rectae IA, IB, IC ejus tres axes principales, quorum respectu momenta inertiae sint Maa, Mbb, Mcc. Iam a quacunque vi corpus sollicitetur, notetur ejus transitus per planum binis axibus principalibus interceptum AIB, qui fit in puncto V, ab I distante intervallo $IV = b$: existente angulo $AIV = \vartheta$ ipsa autem vis, quasi huic puncto esset applicata, resolvatur in ternas axibus parallelas quae sint vis $VP = P$, vis $VQ = Q$, et vis $VR = R$, quibus igitur aequales et contrariae in puncto I applicatae sunt intelligendae. Ab his ergo corpus circa quempiam axem per centrum inertiae I transeuntem verti incipiet, qui sit IF ad planum BIA inclinatus angulo $FIE = \theta$ existente angulo $AIE = \eta$, quos binos angulos investigari oportet. Iam primo respectu hujus axis IF quaeratur momentum inertiae, quod cum sit $\cos AIF = \cos\eta\cos\theta$, $\cos BIF = -\sin\eta\cos\theta$, $\cos CIF = \sin\theta$ erit per superiora

$$M(aa\cos\eta^2\cos\theta^2 + bb\sin\eta^2\cos\theta^2 + cc\sin\theta^2).$$

Deinde momenta virium P, Q, R respectu axis hujus IF sunt investiganda; ex antecedentibus autem patet, ducta VM ad IE normali ut $VM = b\sin(\vartheta+\eta)$, fore vis $VR = R$, momentum $= R.VM.\cos\theta = Rb\sin(\vartheta+\eta)\cos\theta$. Verum quo reliquarum virium momenta facilius inveniri queant, puncta V, A, B, C, E, F in superficie
Fig. 83. sphaerica considerentur cujus centrum sit in I. Erunt ergo arcus AB, AC et BC quadrantes. $AV = \vartheta$, $AE = \eta$, $EF = \theta$; et vires P, Q, R in V applicatae resolvantur in binas, quarum alterae sint in superficiem sphaericam normales, alterae superficiem sphaericam tangant, ubi

Digitized by Google

ubi priores per centrum transeuntes nulla praebent momenta, unde solas posteriores considerasse sufficit, quae erunt: vis sec. VA = P *sin* AV; vis sec. VB = Q *si* BV et vis sec. VC = R *si* CV = R ob CV quadrantem. Hae vires porro resolvantur secundum directionem VF, et aliam ad eam normalem, ubi priores cum axe IF in eodem plano sitae nullum praebent momentum, alterae autem vires erunt

$$P\,si\,AV.si\,AVF - Q\,si\,BV.si\,BVF - R\,si\,CVF$$

quarum directio cum sit ad planum IFV normalis, erit etiam in plano ad axem IF normali, unde cum distantia ab axe sit $= h\,si\,FV$, ob $AV = \delta$, et $\int BVF = \int AVF$ erit momentum quaesitum $= h((P\,si\,\delta - Q\,cos\,\delta)\,si\,AVF\,\int FV - R\,cos\,AVF.si\,FV)$ at $si\,AVF.\int FV = \int FE = \int\theta$, sicque momentum habebitur

$$P\,h\int\delta\int\theta - Q\,h\,cos\,\delta\int\theta - R\,h\,cos\,AVF.\int FV$$

at ex sphaericis est $cos\,AVF.\int FV = \int(\delta+\eta)\,cos\,\theta$, ita ut momentum quaesitum sit $= P\,h\int\delta\int\theta - Q\,h\,cos\,\delta\int\theta - R\,h\int(\delta+\eta)\,cos\,\theta$, ex quo angulus tempusculo dt genitus fit

$$d\omega = \frac{g\,h\,dt^2(P\int\delta\int\theta - Q\,cos\,\delta\int\theta - R\int(\delta+\eta)\,cos\,\theta)}{M(aa\,cos\,\eta^2\,cos\,\theta^2 + bb\int\eta^2\int\theta^2 + cc\int\theta^2)}.$$

Quocirca minimum reddi debet haec expressio

$$\frac{((P\int\delta - Q\,cos\,\delta)\int\theta - R\int(\delta+\eta)\,cos\,\theta)^2}{aa\,cos\,\eta^2\,cos\,\theta^2 + bb\int\eta^2\,cos\,\theta^2 + cc\int\theta^2}$$

statuamus primo θ tantum variabile, et fiet:

$$2(aa\,cos\,\eta^2\,cos\,\theta^2 + bb\int\eta^2\,cos\,\theta^2 + cc\int\theta^2)((P\int\delta - Q\,cos\,\delta)\,cos\,\theta + R\int(\delta+\eta)\int\theta) =$$
$$2(-aa\,cos\,\eta^2\int\theta\,cos\,\theta - bb\int\eta^2\int\theta\,cos\,\theta + cc\int\theta\,cos\,\theta)((P\int\delta - Q\,cos\,\delta)\int\theta - R\int(\delta+\eta)\,cos\,\theta)$$

quae reducitur ad hanc formam

$$(P\int\delta - Q\,cos\,\delta)(aa\,cos\,\eta^2 + bb\int\eta^2)\,cos\,\theta + R\,cc\int(\delta+\eta)\int\theta = 0$$

unde oritur $tang\,\theta = \frac{(Q\,cos\,\delta - P\int\delta)(aa\,cos\,\eta^2 + bb\int\eta^2)}{R\,cc\,si(\delta+\eta)}$.

Nunc sumto η variabili obtinebimus:

$$2(aa\,cos\,\eta^2\,cos\,\theta^2 + bb\int\eta^2\,cos\,\theta^2 + cc\int\theta^2)(-R\,cos\,(\delta+\eta)\,cos\,\theta) =$$
$$2(-aa\int\eta\,cos\,\eta\,cos\,\theta^2 + bb\int\eta\,cos\,\eta\,cos\,\theta^2)((P\int\delta - Q\,cos\,\delta)\int\theta - R\int(\delta+\eta)\,cos\,\theta)$$

quae reducitur ad hanc formam

Digitized by Google

$$R\cos\theta(aa\cos\delta\cos\eta\cos\theta^2 - bb\sin\delta\sin\eta\cos\theta^2 + cc\cos(\delta+\eta)\sin\theta^2) = (Q\cos\delta - P\sin\delta)(bb-aa)\sin\eta\cos\eta\sin\theta\cos\theta^2$$

ubi si loco $Q\cos\delta - P\sin\delta$ ponatur $\frac{Rcc\sin(\delta+\eta)\tang\theta}{aa\cos\eta^2 + bb\sin\eta^2}$, facta reductione pervenitur ad hanc aequationem

$$\cos\theta^2(aa\cos\delta\cos\eta - bb\sin\delta\sin\eta)(aa\cos\eta^2 + bb\sin\eta^2) + cc\sin\theta^2 (aa\cos\delta\cos\eta - bb\sin\delta\sin\eta) = 0$$

quae per $aa\cos\delta\cos\eta - bb\sin\delta\sin\eta$ divisa praebet

$$\cos\theta^2(aa\cos\eta^2 + bb\sin\eta^2) + cc\sin\theta^2 = 0$$

aequationem impossibilem ob omnes partes positivas. Quare divisore utentes nanciscimur determinationem anguli η scilicet $\tang\eta = \frac{aa\cos\delta}{bb\sin\delta}$:

ex quo porro colligitur $\tang\theta = \frac{(Q\cos\delta - P\sin\delta)aabb}{Rcc\sqrt{(a^4\cos\delta^2 + b^4\sin\delta^2)}}$ vel ne ambiguitas signi radicalis dubium relinquat.

$$\tang\theta = \frac{(Q\cos\delta - P\sin\delta)aa\cos\eta}{Rcc\sin\delta} = \frac{(Q\cos\delta - P\sin\delta)bb\sin\eta}{Rcc\cos\delta}.$$

Hoc jam axe invento si pro $Q\cos\delta - P\sin\delta$ valor superior substituatur, colligitur momentum virium sollicitantium respectu istius axis $= \frac{Rb\sin(\delta+\eta)(aa\cos\eta^2\cos\theta^2 + bb\sin\eta^2\cos\theta^2 + cc\sin\theta^2)}{(aa\cos\eta^2 + bb\sin\eta^2)\cos\theta}$ unde angulus elementaris $d\omega$ tempusculo dt circa axem genitus erit

$$d\omega = \frac{Rgbdt^2\sin(\delta+\eta)}{M\cos\theta(aa\cos\eta^2 + bb\sin\eta^2)} = \frac{Rgbdt^2\sqrt{(a^4\cos\delta^2 + b^4\sin\delta^2)}}{Maabb\cos\theta}$$

$\sin$ in $\sin(\delta+\eta)$ loco anguli η valor repertus substituatur.

COROLL. 1.

Fig. 82. 640. Ex puncto ergo V, in quo directio vis sollicitantis planum AIB trajicit, statim invenitur in eodem plano recta IE cui axis gyrationis IF imminet: posito enim angulo $AIV = \delta$, erit $\tang AIE = \tang\eta = \frac{aa\cos\delta}{bb\sin\delta}$: neque a directione ipsius vis pendet.

CO-

COROLL. 2.

641. Quare si vis sollicitans per axem principalem IA transeat, angulus AIE sit rectus, axisque gyrationis IF erit in plano ad axem IA normali. At ob $\delta = 0$ et $\eta = 90°$ erit *tang* EIF $=$ *tang* $\theta = \frac{Qbb}{Rcc}$.

COROLL. 3.

642. Si momenta inertiae respectu axium IA et IB fuerint aequalia, erit *tang* $\eta =$ *cot* $\theta =$ *tang* $(90° - \delta)$, ideoque angulus VIE rectus: hoc igitur casu axis gyrationis IF erit ad rectam IV normalis, et $aa = bb$ fiet *tang* $\theta = \frac{(Q\cos\delta - P\sin\delta)aa}{Rcc}$.

COROLL. 4.

643. Si vis sollicitans, quae sit $= V$, et cujus directio planum AIB in puncto V trajicit, ex cujus resolutione nascuntur vires P, Q, R, sola in corpus agat, ea corpori motum assignatum circa axem inventum IF inducet, praeterea vero ipsi motum progressivum secundum suam directionem imprimet, qua tempusculo dt conficiet spatiolum $= \frac{Vgdt^2}{M}$.

SCHOLION.

644. In solutione hujus problematis jucundum sane erat perspicere, quomodo calculus, qui initio non parum intricatus videbatur, continuo ad majorem simplicitatem quasi sponte fuerit perductus, in quo eximium veritatis criterium cernitur. Plerumque enim talis calculi commoditas deprehenditur, dum in veritatis investigatione felici successu versamur, cum contra a veritatis tramite aberrantes in calculos inextricabiles illabi solemus. Ac principium quidem minimi, quo hic sum usus, elegantem suppeditavit solutionem, quae multo intricatior evasisset, si eam ut ante ex primis mechanicae principiis petere voluissemus. Nunc ergo problema, quo praesens caput absolvitur, in genere pertractare licebit.

PROBLEMA. 61.

645. Si corpus rigidum quiescens a viribus quibuscunque sollicitetur, definire primum motum elementarem, qui in eo generabitur.

SOLUTIO.

Ex Theor. VII. omnes vires sollicitantes, quotcunque fuerint, reducantur ad binas, quarum altera ipsi centro inertiae sit applicata, altera vero extra hoc centrum directa: harum prior sit = S posterior = V. His duabus viribus inventis primo sola vis V considereturr, cui aequalis in ipso centro inertiae contrarie applicata concipiatur, ut centrum ineriae etiamnunc in quiete conservetur. Dispiciatur ergo, ubi directio illius vis V per planum aliquod intra binos axes principales corporis transeat, et ex probl. praeced. quaeratur tam axis gyrationis circa quem corpus primum converti incipiet, quam angulus infinite parvus primo temposculo productus. Tum autem corpori insuper motus progressivus imprimetur, ad quem inveniendum vis illa altera V secundum suam directionem ipsam quoque centro inertiae applicata concipiatur, ita ut conjunctim cum vi priore S jam corpus sollicitet; et quia utraque centro inertiae est applicata, inde orietur motus progressivus purus, qui si cum gyratorio ante invento combinetur, habebitur totus effectus a viribus propositis productus.

COROLL. 1.

646. Si vis V evanescat, hoc est, si unica detur vis S centro inertiae applicata, quae omnibus viribus sollicitantibus aequivaleat, tum ut supra jam vidimus, corpori solus motus progressivus imprimitur.

COROLL. 2.

647. Sin autem vis S aequalis sit ei V sed directionem habeat oppositam, quod fit si vires sollicitantes ita fuerint comparatae, ut omnes quaeque in sua directione centro inertiae applicatae se mutuo destruerent, tum centrum inertiae in quiete perseverabit, solusque motus gyratorius generabitur.

COROLL. 3.

648. Reliquis casibus omnibus in corpore motus mixtus generabitur; alter progressivus, alter circa certum quendam axem per centrum inertiae transeuntem; quorum utrumque seorsim considerare ac determinare licet.

SCHOLION.

649. Idem effectus producetur ab his viribus sollicitantibus, etiam si corpus in motu versetur, verum ob hujus motus admixtionem

Digitized by Google

difficilius cognosci poterit. Si enim corpus jam circa alium axem gyretur ac nunc incitatur, non solum celeritas angularis sed etiam ipse axis gyrationis mutabitur, ita ut nunc circa alium axem per centrum inertiae transeuntem gyrari incipiat. Atque in hac axis variatione maxima motus perturbatio est sita, ad quam explicandam primo conveniet hujusmodi perturbationem momentaneam accurate determinari, quod argumentum in sequente capite evolvamus.

CAPUT X.

DE VARIATIONE MOMENTANEA AXIS GYRATIONIS A VIRIBUS PRODUCTA.

PROBLEMA. 62.

650. Si corpus rigidum, dum circa axem per centrum inertiae transeuntem gyratur, ab ejusmodi viribus sollicitetur, quae ipsi si quiesceret, motum gyratorium circa alium axem essent impressurae, determinare motus mutationem tempusculo minimo productum.

SOLUTIO.

Cum tam in motu jam insito, quam in eo, qui a viribus imprimeretur, centrum inertiae quiescat, id etiam conjunctim in quiete perseverabit. Consideretur ergo centrum inertiae I tanquam centrum sphaerae, in cujus superficie sit O polus, et IO axis circa quem corpus jam gyretur celeritate angulari $= \omega$: idque in eum sensum, quo punctum S feratur in s. Tum vero corpus ab ejusmodi viribus sollicitetur, ut si quiesceret, gyraretur circa polum S seu axem IS, tempusculoque dt verteretur per angulum qdt^2, quandoquidem vidimus hunc angulum quadrato tempusculi dt esse homogeneum, fiatque hac conversio in eum sensum, quo punctum O versus ω ferretur. Datur ergo angulus, quem hi duo axes OI et SI in I constituunt, seu in superficie sphaerica arcus circuli maximi OS, qui ponatur OS $= s$: ac tempusculo dt hic arcus OS, ob motum insitum, circa polum O gyrabitur per angulum SO$s = \omega dt$ perventurus in situm Os, ut esset arculus S$s = \omega dt \sin s$. Ob motum autem impressum idem arcus OS circa polum S gyrabitur per angulum O$S\omega = qdt^2$ perventurus in situm Sω, ut esset arculus Fig. 84.

Digitized by Google

culus $C\omega = qdt^2 \sin s$. Utroque igitur hoc motu simul punctum S in s et punctum O in ω transferetur, quia neutra translatio alteram turbat: reliqua autem puncta omnia utrumque motum percipient. Scilicet punctum quodvis o in ipso arcu OS assumtum, ut sit $Oo = \omega$, ob motum insitum circa o transferetur in m, ut sit $om = \gamma dt \sin \omega$, at ob motum genitum circa S transferetur in μ ut sit $o\mu = qdt^2$, $\sin (s - \omega)$. Prout jam fuerit vel $om > o\mu$ vel $o\mu > om$, punctum o ob utrumque motum conjunctim vel m versus vel μ versus per differentiam istorum arculorum feretur. Quare si fuerit $om = o\mu$, punctum o refera quiescet, eritque propterea polus circa quem corpus jam gyrari est censendum: ita ut ob vires sollicitantes axis gyrationis IO tempusculo dt in Io transferetur. Ad hanc igitur axis variationem momentaneam inveniendam ponamus $om = o\mu$, seu $\gamma dt \sin \omega = qdt^2 \sin (s - \omega)$ erit $\gamma \sin \omega = qdt \sin s \cos \omega - qdt \cos s \sin \omega$, unde evidens est arculum $Oo = \omega$ esse infinite parvum, ideoque $\sin \omega = \omega$ et $\cos \omega = 1$ hinque $\omega = \frac{qdt \sin s}{\gamma + qdt \cos s} = \frac{qdt \sin s}{\gamma}$. Circa hunc autem axem Io corpus tanta celeritate angulari gyratur, qua tempusculo dt puncta O et S in ω et s transferantur, unde ea cognosci poterit. Cum enim ea tempusculo dt conficiatur angulus $= \frac{O\omega}{Oo} = \frac{qdt^2 \sin s}{\omega} = dt (\gamma + qdt \cos s)$ praecedente autem tempusculo ob similem vim, quippe quae nunc non subito exorta est putanda, angulus confectus censeri debeat $= dt (\gamma - qdt \cos s)$, ita ut differentia sit $2qdt^2 \cos s$ ipsa celeritas angularis augmentum accepit $2qdt \cos s$ atque ob similem rationem quia valor q dum ad variationes continuas definiendas inducitur, duplicari debet, etiam spatiolum Oo duplo majus est censendum. Dum enim in calculo punctum O continuo progredi assumitur, hic autem in o quiescens assumatur, intervallum Oo hic inventum diversum est a spatiolo, per quod polus gyrationis profertur concipiatur enim punctum o' ut sit $Oo' = 2Oo$, ac dico fore; o polum gyrationis post tempus dt, cum initio esset O. Hoc enim posito manifestum est interea punctum o manere immotum. Quare cum hic inveniissemus $Oo = \frac{qdt \sin s}{\gamma}$, spatiolum Oo' per quod polus gyrationis transiisse est censendus erit duplo majus $= \frac{2qdt \sin s}{\gamma}$. Vires ergo, quae corpori si

quiescceret,

Digitized by Google

quieſceret, imprimerent motum gyratorium circa axem IS in ſenſum $O\omega$ quo tempusculo dt abſolveretur angulus $OS\omega = qdt^2$, motum corporis gyratorium jam inſitum circa axem IO in ſenſum Ss celeritate angulari $= \gamma$ ita turbant, ut elapſo tempusculo dt axis gyrationis ſit recta Io, a praecedente IO verſus IS vergens angulo $OIo = \frac{2qdt\sin s}{\gamma}$, ſimulque celeritas gyratoria γ augmentum capiat $= 2qdt\cos s$.

COROLL. 1.

651. Si vires ſollicitantes in ſenſum oppoſitum tenderent; quantitas q negative accipi deberet, et punctum o in arcum SO ultra O productum caderet, celeritasque gyratoria minueretur.

COROLL. 2.

652. Si arcus OS vel evaneſceret, vel ſemicirculo eſſet aequalis, axis gyrationis IO non mutaretur, ſed totus effectus in priori motu gyratorio vel accelerando vel retardando conſumeretur. Qui eſt caſus jam ſupra pertractatus, ubi oſtendimus incrementum vel decrementum celeritatis angularis eſſe $2qdt$.

COROLL. 3.

653. Si arcus OS eſt quadrans circuli, ideoque $\cos s = 0$, celeritas angularis γ nullam mutationem patietur, ſed totus effectus virium in axe gyrationis mutando inſumetur, eum vel propius ad S vel longius inde removendo.

SCHOLION. 1.

654. Hic ejusmodi tantum vires ſumus contemplati, quae corpori, ſi quieſceret, motum gyratorium ſimplicem imprimerent, centro inertiae manente immoto: cujusmodi effectum producunt vires quaecunque, ſi modo ipſis aequales et contrariae in centro inertiae applicentur, quemadmodum in ſuperiori capite fuſius eſt oſtenſum. Neque vero pro aliis viribus indagatio erit difficilior, cum eae eundem motum gyratorium ſemper producant, ac ſi ipſis aequales et contrariae centro inertiae eſſent applicatae: motus enim progreſſivus, quem corpori praeterea inducunt, etiam hic nihil in motu gyratorio, qui corpori jam ineſt, eſſet mutaturus. Quin etiam ſi in corpore praeter motum gyratorium circa axem IO jam ineſſet motus progreſſivus, is nihil a gyratione

ratione circa axem IS genita mutaretur: ex quo solutio hujus problematis latissime patet, atque etiam ad motum progressivum, quem corpus vel jam habet, vel a viribus sollicitantibus nanciscetur, extendi potest. Quae combinatio motus progressivi cum gyratorio, cum nihil habeat difficultatis, hic erat praecipuum opus, ut quantum motus gyratorius, ob alium motum gyratorium a viribus oriundum, perturbetur, sollicite definiremus.

SCHOLION. 2.

655. Si axis IO, circa quem corpus jam gyrari assumitur, esset corporis axis principalis, corpus hunc motum, si a nullis viribus sollicitaretur, perpetuo esset conservaturum, uti in antecedentibus demonstravimus. Verum si axis IO non sit principalis, etiamsi nullae vires extrinsecus urgerent, tamen motus conservari non posset, quoniam ipse motus vires suppeditat, quae ad axem gyrationis deflectendum tendunt: hoc ergo casu, si quanta variatio in axe gyrationis gignatur, explorare velimus, non sufficit, vires extrinsecus in corpus agentes contemplari, sed cum iis etiam conjungi debent vires ex ipso motu gyratorio natae, quibus axem supra affici ostendimus. Quae vires cum pendeant a positione axis gyrationis IO respectu axium principalium corporis, haud abs re erit, antequam ulterius progrediamur, in genere investigare, quomodo a viribus quibusque positio axis gyrationis respectu axium principalium corporis immutetur.

PROBLEMA. 63.

656. Data positione axis gyrationis respectu trium axium principalium corporis, isque a viribus sollicitantibus varietur, ut corpus elapso tempusculo minimo circa alium axem gyretur, definire positionem hujus axis variati respectu axium principalium.

SOLUTIO.

Fig. 85. Consideretur iterum superficies sphaerica, in cujus centro sit corporis centrum inertiae I, sintque nunc radii IA, IB, IC axes principales corporis, corpusque circa axem IO gyretur celeritate angulari ω, cujus positio cum detur respectu axium principalium, ponatur arcus $AO = \alpha$, $BO = \beta$, et $CO = \gamma$, ut sit $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$. Tum vero ponantur anguli $BAO = \lambda$, $CBO = \mu$, et $ACO = \nu$, erit ob quadrantes AB, BC, et CA

$$\cos\beta = \sin\alpha\cos\lambda; \quad \cos\gamma = \sin\beta\cos\mu; \quad \cos\alpha = \sin\gamma\cos\nu, \text{ unde fit}$$

cos

$$\cos\lambda = \frac{\cos\mathfrak{C}}{\sin\mathfrak{a}}; \cos\mu = \frac{\cos\gamma}{\sin\mathfrak{C}}; \cos\nu = \frac{\cos\mathfrak{a}}{\sin\gamma}$$

$$\sin\lambda = \frac{\cos\gamma}{\sin\mathfrak{a}}; \sin\mu = \frac{\cos\mathfrak{a}}{\sin\mathfrak{C}}; \sin\nu = \frac{\cos\mathfrak{C}}{\sin\gamma}, \text{ ergo}$$

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{\cos\gamma}{\cos\mathfrak{C}}; \operatorname{tang}\mu = \frac{\cos\mathfrak{a}}{\cos\gamma}; \operatorname{tang}\nu = \frac{\cos\mathfrak{C}}{\cos\mathfrak{a}}$$

ideoque $\operatorname{tang}\lambda \operatorname{tang}\mu \operatorname{tang}\nu = 1$: quae est relatio inter ternos angulos λ, μ, ν, ex quibus arcus $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{C}$, γ ita definiuntur, ut sit:

$$\operatorname{tang}\mathfrak{a} = \frac{\operatorname{tang}\nu}{\cos\lambda} = \frac{\cot\mu}{\sin\lambda}; \operatorname{tang}\mathfrak{C} = \frac{\operatorname{tang}\lambda}{\cos\mu} = \frac{\cot\nu}{\sin\mu}; \operatorname{tang}\gamma = \frac{\operatorname{tang}\mu}{\cos\nu} = \frac{\cot\lambda}{\sin\nu}.$$

His relationibus notatis ex datis $BAO = \lambda$ et $AO = \mathfrak{a}$ reliqua sic definiuntur, ut sit

$$\cos\mathfrak{C} = \sin\mathfrak{a}\cos\lambda; \cos\gamma = \sin\mathfrak{a}\sin\lambda; \operatorname{tang}\mu = \frac{\cot\mathfrak{a}}{\sin\lambda}; \operatorname{tang}\nu = \operatorname{tang}\mathfrak{a}\cos\lambda.$$

Quodsi jam ob vires sollicitantes tempusculo dt axis gyrationis IO abeat in Io, totum corpus, quasi interea circa axem Io esset gyratum, considerari potest, quo motu puncta A, B, C, suas distantias a puncto o conservabunt; ita ut elapso tempusculo dt, polus gyrationis v a polis principalibus A, B, C, habiturus sit distantias Ao, Bo, Co. Quare si detur angulus elementaris $OAo = d\lambda$, et $Ao = \mathfrak{a} + d\mathfrak{a}$, variatio reliquorum per differentiationem consuetam elicietur:

$$d\mathfrak{C} = \frac{d\lambda\sin\mathfrak{a}\sin\lambda - d\mathfrak{a}\cos\mathfrak{a}\cos\lambda}{\sin\mathfrak{C}}$$

$$d\gamma = \frac{-d\lambda\sin\mathfrak{a}\cos\lambda - d\mathfrak{a}\cos\mathfrak{a}\sin\lambda}{\sin\gamma}$$

$$d\mu = \frac{-d\mathfrak{a}\sin\lambda - d\lambda\sin\mathfrak{a}\cos\mathfrak{a}\cos\lambda}{\cos\mathfrak{a}^2 + \sin\mathfrak{a}^2\sin\lambda^2}; d\nu = \frac{d\mathfrak{a}\cos\lambda - d\lambda\sin\mathfrak{a}\cos\mathfrak{a}\sin\lambda}{\cos\mathfrak{a}^2 + \sin\mathfrak{a}^2\cos\lambda^2}.$$

COROLL. 1.

657. Si ab his differentialibus ad integralia progredi liceret, in corpore ad quodvis tempus ille axis, circa quem tum sit gyraturum, ejusque positio respectu axium principalium assignari posset.

COROLL. 2.

658. Hic scilicet non ad ipsum motum corporis respicimus, sed tantum id agitur, ut variatio momentanea axis gyrationis respectu axium principalium cognoscatur, ideoque ipsa celeritas gyratoria hic in computum non est ingressa.

COROLL. 3.

659. Cum in praecedente problemate arculus Oo sit determinatus, hic erit $Oo = \gamma(d\alpha^2 + d\lambda^2 \sin\alpha^2)$, tum vero pro positione hujus arculi Oo respectu arcus AO seu Ao est *tang* $AoO = \frac{d\lambda \sin\alpha}{d\alpha}$. Seu *si* $AoO = \frac{d\lambda \sin\alpha}{Oo}$ et *cos* $AoO = \frac{d\alpha}{Oo}$, ita ut hinc habeamus elementa: $d\alpha = Oo \cdot \cos AoO$ et $d\lambda = \frac{Oo \cdot \sin AoO}{\sin\alpha}$.

SCHOLION.

660. Cognitis ergo viribus, quibus corpus, dum circa quempiam axem gyratur, sollicitatur, per caput praecedens is axis, circa quem quiescens gyrari inciperet, definiri: tum vero ope praecedentis problematis variatio in axe gyrationis facta explorari poterit. Verum nisi corpus primo circa axem quempiam principalem gyretur, praeter vires externas, quibus corpus forte sollicitatur, imprimis eae vires, quae ex ipso motu gyratorio, ejusque vi centrifuga nascuntur, perpendi debent. Quas vires etiamsi supra jam in genere assignavimus, tamen easdem nunc denuo respectu axium principalium, quatenus axis gyrationis ab iis discrepat, determinari oportet: quibus cognitis, cum facile sit eas cum viribus externis conjungere, eas deinceps *solas* contemplemur, et quantum positio axis gyrationis iis turbetur, accurate investigemus.

PROBLEMA. 64.

661. Si corpus rigidum gyretur circa axem quemcunque per ejus centrum inertiae transeuntem, cujus positio respectu axium principalium detur, invenire vires hinc ad axem gyrationis turbandum natas.

SOLUTIO.

Fig. 86. Existente I centro inertiae sint IA, IB, et IC ejus axes principales, eorumque respectu momenta inertiae Maa, Mbb et Mcc. Gyretur autem

Digitized by Google

autem corpus circa axem IO, celeritate angulari $= \omega$, ex cujus quovis puncto O demittatur ad planum AIB perpendiculum OL, ductaque recta IL vocentur anguli $AIL = m$ et $LIO = n$, ita ut pro situ hujus axis IO respectu axium principalium sit $\cos AIO = \cos m \cos n$; $\cos BIO = \sin m \cos n$ et $\cos CIO = \sin n$. Iam sumtis primo axibus principalibus pro directricibus iis parallelae constituantur ternae coordinatae $IX = x$, $XY = y$ et $YZ = z$; et in Z sumto corporis elemento dM erit ex natura axium principalium $\int xy dM = 0$; $\int xz dM = 0$, et $\int yz dM = 0$, tum vero $\int (yy + zz) dM = Maa$; $\int (xx + zz) dM = Mbb$; et $\int (xx + yy) dM = Mcc$ ideoque:

$$\int xx dM = \tfrac{1}{2} M (bb + cc - aa); \quad \int yy dM = \tfrac{1}{2} M (aa + cc - bb);$$
$$\int zz dM = \tfrac{1}{2} M (aa + bb - cc).$$

Porro in plano AOB ducta IP ad IL, et in plano LOC recta IQ ad IO normali, ut rectae IO, IP et IQ sint inter se normales, quas tanquam directrices adhibeamus. Hunc in finem ducatur primo YS ipsi IP in plano AIB parallela, erit $IS = x \cos m + y \sin m$; et $YS = y \cos m - x \sin m$: atque ex Z ipsi YS agatur parallela Zy, quae erit in planum LIO normalis, et $Zy = y \cos m - x \sin m$, item $Sy = YZ = z$. Denique ex y ad IO demittatur perpendiculum yx, ut jam desideratae coordinatae sint $Ix = X$, $xy = Y$ et $yZ = Z$ fietque

$$X = IS \cos n + Sy \sin n = x \cos m \cos n + y \sin m \cos n + z \sin n$$
$$Y = yS \cos n - IS \sin n = z \cos n - x \cos m \sin n - y \sin m \sin n$$
$$Z = y \cos m - x \sin m.$$

Cum jam elementum dM in Z ob celeritatem angularem $= \omega$ exerat vim centrifugam $= \frac{\omega\omega . xZ dM}{2g}$, nascetur inde vis secundum $xy = \frac{\omega\omega Y dM}{2g}$ et vis secundum directionem ipsi yZ parallelam in x applicata $= \frac{\omega\omega Z dM}{2g}$, quae vires ipsae cum se mutuo destruant ob $\int Y dM = 0$ et $\int Z dM = 0$, earum momenta tantum erunt spectanda. Sumta ergo $IO = f$, dabitur in O vis Oq ipsi IQ parallela omnibus viribus yZ aequivalens, si modo his viribus aequales et contrariae ipsi centro inertiae I applicentur. Cum igitur ob momenta sit

$$\text{vis } Oq \cdot IO = \frac{\omega\omega}{2g} \int XY dM \text{ et}$$

$$\text{vis } Op \cdot IO = \frac{\omega\omega}{2g} \int XZ dM$$

erit

Digitized by Google

vis $Oq = \frac{\omega\omega}{2fg} \int XY dM$ et vis $Oq = \frac{\omega\omega}{2fg} \int XZ dM$.

At regrediendo ad coordinatas principales est

$\int XY dM = \int n \cos n \, (\int zz dM - \cos m^2 \int xx dM - \int m^2 \int yy dM)$ et

$\int XZ dM = \int m \cos m \cos n \, (\int yy dM - \int xx dM)$

ideoque per momenta inertiae data

$\int XY dM = M \int n \cos n \, (aa \cos m^2 + bb \int m^2 - cc)$ et

$\int XZ dM = M \int m \cos m \cos n \, (aa - bb)$.

Consequenter ex motu gyratorio nascuntur hae vires

vis $Op = \frac{M\omega\omega \int m \cos m \cos n (aa - bb)}{2fg}$ et

vis $Oq = \frac{M\omega\omega \int n \cos n \, (aa \cos m^2 + bb \int m^2 - cc)}{2fg}$

puncto O secundum directiones rectis OP et OQ parallelas applicatae, quibus autem aequales et contrariae in ipso centro inertiae I applicatae sunt intelligendae.

COROLL. 1.

662. Cum vis Oq sit ad axem gyrationis IO in O normalis, ea producta plano AOB in puncto M occurret, quod in IL producta erit situm, eritque $IM = \frac{f}{\cos n}$ et $OM = f \cdot tang\, n$ ob IOM angulum rectum.

COROLL. 2.

663. Directio autem alterius vis Op est ad planum LIO normalis utpote rectae IP in plano AIB ad IL normali parallela: atque planum pOq continuatum ad planum AIB inclinatur angulo $= 90° - n$, idque intersecat recta ad IM normali.

COROLL. 3.

664. Quoniam hae vires ex motu gyratorio ipso natae sibi aequales et contrarias in centro inertiae applicatas habent, eae solum motum gyratorium perturbabunt, neque corpori ullum motum progressivum inducent, ita ut centrum inertiae in quiete sit permansurum.

PROBLEMA. 65.

665. Inventis viribus ex motu gyratorio ipso natis ad eum perturbandum, invenire axem, circa quem hae vires corpus, si esset in quiete, gyraturae essent.

SO-

Digitized by Google

SOLUTIO.

Manentibus omnibus, ut in problemate praecedente, ita ut IA, IB, IC sint axes corporis principales, eorumque respectu momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc, sit IO axis, circa quem jam corpus gyratur celeritate $= \gamma$, et pro ejus situ anguli AIL $= m$, et LIO $= n$, existente recta OL ad planum AOB normali, ut posita IO $= f$, sit IL $= f \cos n$ et OL $= f \sin n$. Tum vero ex O ad IO ducatur normalis OM, erit IM $= \frac{f}{\cos n}$ et OM $= f \tang n$, ducta autem ad IM in plano AIB normali MA, erit IA $= \frac{f}{\cos m \cos n}$ et MA $= \frac{f \tang m}{\cos n}$. Nunc autem in O habentur vires Op et Oq, quarum Op ipsi AM parallela et Oq cum OM in directum est sita; suntque hae vires: Fig. 87.

$$\text{vis } Op = \frac{M\gamma\gamma f \sin m \cos m \cos n (aa - bb)}{2fg}$$

$$\text{vis } Oq = \frac{M\gamma\gamma f \sin n \cos n (aa \cos m^2 + bb \sin m^2 - cc)}{2fg}$$

quarum media directio planum AIB alicubi in V in recta MA secabit, ut sit MO : MV $=$ Oq : Op, unde colligitur MV $= \frac{ff \sin m \cos m (aa - bb)}{\cos n (aa \cos m^2 + bb \sin m^2 - cc)}$, hincque *tang* MIV $= \frac{f \sin m \cos m (aa - bb)}{aa \cos m^2 + bb \sin m^2 - cc}$: ex quo concluditur *tang* AIV $= \frac{(bb - cc) \sin m}{(aa - cc) \cos m}$, quem angulum supra vocavimus δ, at distantia IV $= \frac{f \sqrt{(a^4 \cos m^2 + b^4 \sin m^2 + c^4 - 2cc(aa \cos m^2 + bb \sin m^2))}}{\cos n (aa \cos m^2 + bb \sin m^2 - cc)}$ quam supra vocavimus $= b$, ut sit $b = \frac{f(bb - cc) \sin m}{\cos n \sin \delta (aa \cos m^2 + bb \sin m^2 - cc)}$ seu $b = \frac{f(aa - cc) \cos m}{\cos n \cos \delta (aa \cos m^2 + bb \sin m^2 - cc)}$. Nunc igitur in puncto V illas vires applicatas concipere licet, quae sunt

$$\text{vis sec. VM} = \frac{M\gamma\gamma f \sin m \cos m \cos n (aa - bb)}{2fg}$$

$$\text{vis sec. VT} = \frac{M\gamma\gamma f \sin n \cos n (aa \cos m^2 + bb \sin m^2 - cc)}{2fg}$$

quarum haec secundum VR ipsi LO et VN ipsi ML parallelam resoluta dat

vim

vim sec. $VR = \frac{M\alpha\alpha\int n \cos n^2 (aa\cos m^2 + bb\int m^2 - cc)}{2fg}$

et vim sec. $VN = \frac{M\alpha\alpha\int n^2 \cos n (aa\cos m^2 + bb\int m^2 - cc)}{2fg}$

quarum illa VR supra littera R est indicata. At quod supra erat $Q\cos\delta - P\int\delta$, qua expressione vis ad IV in plano AIB normalis denotatur, hic est vis $VM\cos MIV$ — vis $VN\int MIV$, unde prodit

$$Q\cos\delta - P\int\delta = \frac{M\alpha\alpha\int m\cos m\cos n^3 (aa-bb)(aa\cos m^2 + bb\int m^2 - cc)}{2f\gamma(a^4\cos m^2 + b^4\int m^2 + c^4 - 2cc(aa\cos m^2 + bb\int m^2))}$$

Cum porro sit $tang\,\delta = \frac{(bb-cc)\int m}{(aa-cc)\cos m}$ erit

$$\cos\delta = \frac{(aa-cc)\cos m}{\gamma(a^4\cos m^2 + b^4\int m^2 + c^4 - 2cc(aa\cos m^2 + bb\int m^2))}.$$

His definitis sit jam IF axis ille, circa quem istae vires corpus, si quiescerent, essent gyraturae, ductoque ex F in planum AIB perpendiculo FE, vocentur anguli $AIE = \eta$ et $EIF = \theta$, ac per probl. 60. consequimur:

$$tang\,\eta = \frac{aa\cos\delta}{bb\int\delta} = \frac{aa(aa-cc)\cos m}{bb(bb-cc)\int m}, \text{ et}$$

$$tang\,\theta = \frac{Q\cos\delta - P\int\delta}{Rcc\cos\delta}.\ bb\int\eta = \frac{\int m\cos n(aa-bb)\,bb\int\eta}{cc(aa-cc)\int n}.$$

Denique tempusculo dt circa hunc axem IF angulus $d\omega$ generabitur, ut sit:

$$d\omega = \frac{\alpha\alpha dt^2\int n\cos n\gamma(a^4(aa-cc)^2\cos m^2 + b^4(bb-cc)^2\int m^2)}{2aabb\cos\theta}$$

$$\text{seu } d\omega = \frac{\alpha\alpha(aa-cc)dt^2\cos m\int n\cos n}{2bb\int\eta\cos\theta} = \frac{\alpha\alpha(bb-cc)dt^2\int m\int n\cos n}{2aa\cos\eta\cos\theta}.$$

COROLL. 1.

666. Si pro axe gyrationis proposita IO ponantur anguli $OIA = \mathfrak{a}$; $OIB = \mathfrak{G}$; $OIC = \gamma$; at pro axe gyrationis elementaris IF anguli $FIA = \mathfrak{A}$; $FIB = \mathfrak{B}$; $FIC = \mathfrak{C}$; erit;

$\cos\mathfrak{a} = \cos m\cos n$; $\cos\mathfrak{G} = \sin m\cos n$; $\cos\gamma = \sin n$, atque
$\cos\mathfrak{A} = \cos\eta\cos\theta$; $\cos\mathfrak{B} = -\sin\eta\cos\theta$; $\cos\mathfrak{C} = \sin\theta$.

CO-

Digitized by Google

COROLL. 2.

667. Deinde ob $tang\ \eta = \frac{aa(aa-cc)\,cos\,\alpha}{bb(bb-cc)\,cos\,\mathfrak{C}}$, si ponatur brevitatis gratia $\sqrt{(a^4(aa-cc)^2\,cos\,\alpha^2 + b^4(bb-cc)^2\,cos\,\mathfrak{C}^2)} = W$ erit $sin\,\eta = \frac{aa(aa-cc)\,cos\,\alpha}{W}$ et $cos\,\eta = \frac{bb(bb-cc)\,cos\,\mathfrak{C}}{W}$. Porro autem posito

$$\sqrt{(a^4b^4(aa-bb)^2\,cos\,\alpha^2\,cos\,\mathfrak{C}^2 + a^4c^4(aa-cc)^2\,cos\,\alpha^2\,cos\,\gamma^2 + b^4c^4(bb-cc)^2\,cos\,\mathfrak{C}^2\,cos\,\gamma^2)} = \Omega$$

habebitur:

$$cos\,\mathfrak{A} = \frac{bbcc(bb-cc)\,cos\,\mathfrak{C}\,cos\,\gamma}{\Omega};\quad cos\,\mathfrak{B} = \frac{aacc(cc-aa)\,cos\,\alpha\,cos\,\gamma}{\Omega}$$

$$cos\,\mathfrak{C} = \frac{aabb(aa-bb)\,cos\,\alpha\,cos\,\mathfrak{C}}{\Omega}\ \text{et}\ d\omega = \frac{\varkappa\varkappa\Omega\,dt^2}{2aabbcc}.$$

SCHOLION.

668. Quod ad sensum attinet, in quem gyratio circa axem IF fiet, quoniam angulus elementaris $d\omega = \frac{\varkappa\varkappa\Omega\,dt^2}{2aabbcc}$ semper est positivus, notandum est, in indagatione hujus valoris vim VR ut positivam esse spectatam, unde secundum figuram punctum E in sensum Ee versus A motu gyratorio feretur. Etsi enim haec ratio tantum in figura, ubi anguli m, n, η, θ sunt positivi et recto minores, locum habet, tamen hinc ratio sensus recte concludi potest; quo semel in calculum introducto deinceps generatim veritati inhaerebimus. Ceterum evidens est, si axis IO in quempiam principalium cadat, fore $d\omega = 0$; namque si $\alpha = 0$, fit $\mathfrak{C} = \gamma = 90°$, ideoque $cos\,\mathfrak{C} = cos\,\gamma = 0$ quo casu utique quantitas Ω evanescit: simul vero perspicuum est, nullo alio casu hanc perturbationem $d\omega$ evanescere posse, ideoque plures tribus non dari axes gyrationis liberos, nisi forte duo momenta principalia fuerint aequalia.

PROBLEMA. 66.

669. Si corpus gyretur circa axem quemcunque per ejus centrum inertiae transeuntem, ab axibus principalibus diversum, definire variationem momentaneam, quam cum ipse axis gyrationis tum celeritas angularis patietur.

Digitized by Google

SOLUTIO.

Fig. 88. Transferantur omnia, quae in praecedente problemate sunt inventa ad superficiem sphaericam centro inertiae I descriptam, in qua A, B, C sint poli axium principalium, eorumque respectu momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc. Tum vero sit O polus axis illius, circa quem corpus jam gyratur celeritate angulari $= \omega$ in sensum ABC. Ex C per O ducto circulo maximo COM qui est quadrans, erunt arcus $AM = m$ et $MO = n$: tum in quadrante BA producto capiatur $AE = \eta$, et ducto quadrante CE arcus $ES = \theta$, ut sit $tang\ \eta = \frac{aa(aa-cc)\cos m}{bb(bb-cc)\sin m}$ seu $\frac{bb\sin m\sin\eta}{aa-cc} = \frac{aa\cos m\cos\eta}{bb-cc}$ atque $tang\ \theta = \frac{bb\sin m\sin\eta.(aa-bb)\cos n}{cc(aa-cc)\sin n} = \frac{aa\cos m\cos\eta.(aa-bb)\cos n}{cc(bb-cc)\sin n}$. His ita definitis ob vires corporis centrifugas corpus conabitur circa polum S gyrari in sensum Eε, ita ut tempusculo dt describturum esset angulum $d\omega = \frac{\omega\omega(aa-cc)dt^2\cos m\sin n\cos n}{2bb\sin\eta\cos\theta} = \frac{\omega\omega(bb-cc)dt^2\sin m\sin n\cos n}{2aa\cos\eta\cos\theta}$ seu $d\omega = \frac{\omega\omega(aa-bb)dt^2\sin m\cos m\cos n^2}{2cc\sin\theta}$. Ducatur ergo arcus circuli maximi OS, qui sit $= s$, quem deinceps determinemus, atque in probl. 62. erit $q = \frac{\omega\omega(aa-bb)\sin m\cos m\cos n^2}{2cc\sin\theta}$, hincque ob motum gyratorium elementarem corpus gyrabitur circa polum o, ut sit arculus $Oo = \frac{\omega(aa-bb)dt\sin m\cos m\cos n^2 s}{cc\sin\theta}$; celeritas autem angularis ω augmentum accipiet $d\omega$ ut sit $d\omega = \frac{\omega\omega(aa-bb)dt\sin m\cos m\cos n^2\cos s}{cc\sin\theta}$.

Nunc igitur primo quaeri debet positio arcus OS, seu angulus COS, quo ad arcum CO inclinatur: quem in finem consideretur triangulum OCS, in quo est $OC = 90° - n$; $CS = 90° - \theta$ et angulus $OCS = m + \eta$, unde reperitur:

$$\cot COS = \frac{\cos n\, tang\,\theta}{\sin(m+\eta)} - \frac{\sin n\cos(m+\eta)}{\sin(m+\eta)}.$$

Est

Est vero $tang\,(m+\eta) = \frac{aa(aa-cc)\cos m^2 + bb(bb-cc)\sin m^2}{(aa-bb)(cc-aa-bb)\sin m \cos m}$, atque $\frac{\cos n \, tang\,\theta}{\sin(m+\eta)} = \frac{aabb(aa-bb)\sin m \cos m \cos n^2}{cc\sin n(bb(bb-cc)\sin m^2 + aa(aa-cc)\cos m^2)}$ unde fit

$$tang\,\text{COS} = \frac{cc\sin n(aa(aa-cc)\cos m^2 + bb(bb-cc)\sin m^2)}{(aa-bb)\sin m\cos m(aabb\cos n^2 + cc(aa+bb)\sin n^2 - c^4\sin n^2}$$

Porro ex eodem triangulo OCS colligitur,

$$\cos s = \cos(m+\eta)\cos n\cos\theta + \sin n\sin\theta = \sin\theta\left(\sin n + \frac{\cos n\cos(m+\eta)}{tang\,\theta}\right)$$

seu $\cos s = \frac{\sin n\sin\theta(aabb-(aa+bb)cc+c^4)}{aabb} = \frac{(aa-cc)(bb-cc)\sin n\sin\theta}{aabb}$

unde fit $d\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{v}\mathfrak{v}(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)\sin m\cos m\sin n\cos n^2}{aabbcc}\cdot dt$.

Denique positis $OA = \alpha$; $OB = \mathfrak{C}$, $OC = \gamma$ erit arculus $Oo = \frac{\mathfrak{v}\,dt}{aabbcc}\sqrt{\left(\begin{array}{c} a^4b^4(aa-bb)^2\cos\alpha^2\cos\mathfrak{C}^2 + a^4c^4(aa-cc)^2\cos\alpha^2\cos\gamma^2 + b^4c^4(bb-cc)^2\cos\mathfrak{C}^2\cos\gamma^2 \\ -(aa-bb)^2(aa-cc)^2(bb-cc)^2\cos\alpha^2\cos\mathfrak{C}^2\cos\gamma^2 \end{array}\right)}$

et $d\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{v}\mathfrak{v}(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)\cos\alpha\cos\mathfrak{C}\cos\gamma}{aabbcc}\cdot dt$

Verum si ex o ad CO perpendiculum ducatur op, per regulas trigonometriae sphaericae, arculi elementares Op et op ita rationaliter exprimuntur ut sit:

$$Op = \frac{\mathfrak{v}(aa-bb)\,dt\cos\alpha\cos\mathfrak{C}(aabb-(aa-cc)(bb-cc)\cos\gamma^2)}{aabbcc\sin\gamma}$$

$$op = \frac{\mathfrak{v}\,dt\cos\gamma(aa(aa-cc)\cos\alpha^2 + bb(bb-cc)\cos\mathfrak{C}^2}{aabc\sin\gamma}.$$

COROLL. 1.

670. Cum sit $d\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{v}\mathfrak{v}(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)\cos\alpha\cos\mathfrak{C}\cos\gamma}{aabbcc}\,dt$

patet si trium momentorum principalium duo fuerint inter se aequalia, tum celeritatem angularem plane non immutari.

COROLL. 2.

671. Introductis distantiis α, $\mathfrak{C}$, γ poli O a polis principalibus A, B, C erit

$$tang\ \text{COS} = \frac{cc\,cof\gamma\,(aa(aa-cc)\,cof\alpha^2 + bb(bb-cc)\,cof\mathfrak{C}^2)}{(aa-bb)\,cof\alpha\,cof\mathfrak{C}\,(aa\,bb-(aa-cc)(bb-cc)\,cof\gamma^2)}$$

ducto autem arcu AO erit $tang\ \text{AOC} = \frac{-cof\mathfrak{C}}{cof\alpha\,cof\gamma}$, unde concluditur

$$tang\ \text{AOS} = \frac{aa\,cof\alpha\,(bb(bb-aa)\,cof\mathfrak{C}^2 + cc(cc-aa)\,cof\gamma^2)}{(bb-cc)\,cof\mathfrak{C}\,cof\gamma\,((bb-aa)(cc-aa)\,cof\alpha^2 - bb\,cc)}.$$

COROLL. 3.

672. Haec formula pro angulo AOS analoga eſt illi pro angulo COS, indeque oritur, ſi litterae a, b, c, item α, $\mathfrak{C}$, γ in ordine uno loco promoveantur: hoc autem modo ſignum prodiret negativum, id quod rei naturae eſt conſentaneum, cum angulus AOS in ſenſum contrarium cadat reſpectu prioris.

COROLL. 4.

673. Si arcus OS quadrantem AC ſecet in puncto R colligitur:

$$tang\ \text{AR} = \frac{aa\,cof\alpha\,(bb(aa-bb)\,cof\mathfrak{C}^2 + cc(aa-cc)\,cof\gamma^2)}{cc\,cof\gamma\,(aa(aa-cc)\,cof\alpha^2 + bb(bb-cc)\,cof\mathfrak{C}^2)}$$

ac ſi idem arcus SO productus occurrat quadranti BA in Q erit per analogiam:

$$tang\ \text{BQ} = \frac{bb\,cof\mathfrak{C}\,(cc(bb-cc)\,cof\gamma^2 + aa(bb-aa)\,cof\alpha^2)}{aa\,cof\alpha\,(bb(bb-aa)\,cof\mathfrak{C}^2 + cc(cc-aa)\,cof\gamma^2)}$$

$= cot\ \text{AQ}$.

COROLL. 5.

674. Cum tempusculo dt arcus CO $= \gamma$ minuatur particula Op, erit per differentialia

$$aa\,bb\,cc\,d\gamma\,ſi\,\gamma = \varkappa\,(bb-aa)\,dt\,cof\alpha\,cof\mathfrak{C}\,(aa\,bb-(aa-cc)(bb-cc)\,cof\gamma^2)$$

hincque per analogiam:

$$aa\,bb\,cc\,d\mathfrak{C}\,ſi\,\mathfrak{C} = \varkappa\,(aa-cc)\,dt\,cof\gamma\,cof\alpha\,(aa\,cc-(cc-bb)(aa-bb)\,cof\mathfrak{C}^2)$$

$$aa\,bb\,cc\,d\alpha\,ſ\alpha = \varkappa\,(cc-bb)\,dt\,cof\mathfrak{C}\,cof\gamma\,(bb\,cc-(bb-aa)(cc-aa)\,cof\alpha^2).$$

SCHOLION.

675. Aſſumſimus in ſolutione, quod probe eſt notandum, corpus circa axem IO in ſenſum ABC gyrari, ad quem ergo caſum formulae inventae

Digitized by Google

inventae sunt accommodatae : sin autem corpus gyraretur in sensum contrarium, formulae facillime eo referentur, statuendo celeritatem gyratoriam v negativam. Atque sic problema hoc difficillimum, quo variatio momentanea quaeritur, dum corpus circa axem non-principalem gyretur, satis commode resolvimus, cum formulae postremae, ad quas tandem solutio est perducta, non adeo sint intricatae, ut simpliciores expectare licuisset. Neque etiam suspicio ullius erroris in calculo commissi locum habet, cum formula qua incrementum celeritatis angularis dv exprimitur, ad omnes tres axes principales aeque referatur, tum derivatio anguli AOS ex angulo COS rem firmissime evincit : ac tandem aequationes in postremo coroll. exhibitae hanc proprietatem habere deprehenduntur, ut sit $da \int \alpha \cos \alpha + d\mathfrak{C} \int \mathfrak{C} \cos \mathfrak{C} + d\gamma \int \gamma \cos \gamma = 0$, uti conditio principalis $\cos \alpha^2 + \cos \mathfrak{C}^2 + \cos \gamma^2 = 1$ exigit. Ternae autem postremae aequationes, cum ea quae differentiale dv definit, plenam problematis solutionem continet, ubi quidem quaelibet trium illarum omitti potest. Si corpus insuper a viribus externis sollicitaretur, solutio non multo difficilior evaderet, quemadmodum in sequente problemate ostendetur.

PROBLEMA. 67.

676. Si corpus rigidum, dum circa axem quemcunque per ejus centrum inertiae transeuntem gyratur, a viribus quibuscunque sollicitetur, definire variationem momentaneam tam in ipso axe quam in celeritate angulari inde ortam.

SOLUTIO.

Sit IO axis, circa quem corpus nunc gyretur celeritate angulari $= v$, in sensum ABC, ac primo dispiciatur ejus situs respectu axium principalium IA, IB, IC, quorum respectu momenta inertiae sint Maa, Mbb, Mcc, positisque arcubus $OA = \alpha$, $OB = \mathfrak{C}$, $OC = \gamma$, per problema praecedens quaeratur, quantum tempusculo dt tum axis gyrationis IO, quam celeritas angularis ob solum motum gyratorium mutari debeat. Scilicet si polus gyrationis ex O abeat in o, vidimus fore incrementum distantiae $CO = \gamma$: Fig. 88.

$$Co - CO = \frac{v(aa-bb)dt \cos\alpha \cos\mathfrak{C}(aa\,bb-(aa-cc)(bb-cc)\cos\gamma^2)}{aa\,bb\,cc\int\gamma}$$

atque incrementum anguli BCO

$$OCo = \frac{\gamma\gamma dt \cos\gamma (aa(aa-cc)\cos\alpha^2 + bb(bb-cc)\cos\mathfrak{C}^2)}{aabb\sin\gamma^2}$$

quibus elementis situs puncti o sine ambiguitate definitur. Praeter hanc autem axis gyrationis mutationem celeritas angularis γ capiet incrementum $= \frac{\gamma\gamma(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)\cos\alpha\cos\mathfrak{C}\cos\gamma}{aabbcc} dt$. Deinde perpendantur vires sollicitantes, utrum corpori motum progressivum imprimant: cujus rei facillimum est judicium, dum omnes vires secundum suas quaeque directiones ipsi centro inertiae applicatae concipiantur: si enim se mutuo in aequilibrio teneant, corpori nullus motus progressivus imprimetur: sin autem detur vis illis aequivalens, ab hac motus progressivus in corpore generabitur, ex primis principiis facile definiendus. Tum isti vi aequivalenti aequalis et contraria ipsi centro inertiae applicetur, ut jam hoc centrum in quiete teneatur, atque hac vi cum iis, quibus corpus actu sollicitatur, conjuncta, omnes revocentur ad duas, quarum altera in centro inertiae altera in alio quodam puncto sit applicata, quae duae vires erunt aequales sed contrariae. Porro ex praecedente capite quaeratur axis, circa quem corpus ab istis viribus converti incipiet simulque angulus conversionis momentaneae, unde per probl. 62. sine ullo respectu ad mutationem jam inventam habito, quoniam haec est infinite parva, quasi corpus adhuc circa axem Oo gyraretur, quaeratur variatio in axe et celeritate angulari inde orta, quarum illa ad incrementa vel decrementa tam in arcu CO quam in angulo BCO nata reducatur. Denique haec terna elementa cum iis, quae jam ante ex motu gyratorio sunt definita, conjungatur, sicque obtinebitur vera variatio tam in axe IO quam in celeritate angulari ab utraque causa simul producta,

SCHOLION.

677. Dum virium sollicitantium effectus exploratur, variatio axis inde orta eodem modo per angulum elementarem OCo et differentiam arcuum CO et Co exprimi potest, quo hic usi sumus. Scilicet quaeratur primo axis, circa quem corpus, si quiesceret, a viribus verteretur, qui sit IS, sitque qdt^2 angulus conversionis tempusculo dt productus circa S in sensum $O\omega$, ac pro puncto S ponatur arcus $AE = \eta$ et $ES = \vartheta$, qui valores a praecedentibus, ex ipso motu gyratorio ortis probe sunt distinguendi. Cum ergo sit $AM = ACM = m$, ut *sit* $\cos m =$

Digitized by Google

$m = \frac{\cos\alpha}{\sin\gamma}$, et $\sin m = \frac{\cos\zeta}{\sin\gamma}$, erit MCE $= m + \eta$, et ex triangulo OCS reperitur:

$$\cos \mathrm{OS} = \cos s = \cos(m+\eta)\sin\gamma\cos\theta + \cos\gamma\sin\theta \text{ et}$$

$$\cot \mathrm{COS} = \frac{\sin\gamma\tan\theta}{\sin(m+\eta)} - \frac{\cos\gamma\cos(m+\eta)}{\sin(m+\eta)}.$$

Nunc autem ex probl. 62. polus gyrationis O transfertur in o ut sit $Oo = \frac{2qdt\sin s}{\varkappa}$ et incrementum celeritatis angularis

$$2qdt\cos s = 2qdt\,(\sin\gamma\cos\theta\cos(m+\eta) + \cos\gamma\sin\theta).$$

Deinde ex Oo elicitur

$$Op = Oo\cos \mathrm{COS} = \frac{2qdt\sin s}{\varkappa}\cos \mathrm{COS} \text{ et}$$

$$op = Oo\sin \mathrm{COS} = \frac{2qdt\sin s}{\varkappa}\sin \mathrm{COS} = \frac{2qdt}{\varkappa}\cos\theta\sin(m+\eta)$$

ideoque angulus $OCo = \frac{2qdt\cos\theta\sin(m+\eta)}{\varkappa\sin\gamma}$.

Hinc vero porro deducitur

$$\mathrm{CO} - \mathrm{C}o = Op = op\cot \mathrm{COS} = \frac{2qdt}{\varkappa}(\sin\gamma\sin\theta - \cos\gamma\cos\theta(m+\eta).$$

Tantum ergo superest, ut haec elementa cum illis, quae ex motu gyratorio sunt eruta combinentur, ut obtineatur axis gyrationis variatus cum incremento vel decremento celeritatis angularis.

PROBLEMA. 68.

678. Si ad aliquod tempus detur situs corporis rigidi circa quempiam axem per ejus centrum inertiae transeuntem gyrantis, atque tam axis gyrationis quam celeritas angularis utcunque varietur, invenire mutationem momentaneam in corporis situ ortam.

SOLUTIO.

Cum centrum inertiae corporis quiescat, situs corporis referatur ad sphaeram fixam, eodem centro descriptam, intra quam corpus motum suum absolvat. In hac sphaera capiatur circulus magnus VXZY in eoque punctum fixum Z: atque ad datum tempus $= t$ axes corporis principales in superficie sphaerica respondeant punctis A, B, C, ut AB, BC, Tab.XII. Fig. 89.

Digitized by Google

BC, CA sint quadrantes: ad quorum situm symbolis repraesentandum sint arcus circulorum maximorum ZA = l, ZB = m, ZC = n, erit $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$; ac ponantur anguli XZA = λ, XZB = μ, XZC = ν, erit ex sphaericis

$$\cos(\mu - \lambda) = -\cot l \cot m;\ \cos(\nu - \mu) = -\cot m \cot n;\ \cos(\nu - \lambda) = -\cot l \cot n$$

ergo $\cos(\mu-\lambda)\cos(\nu-\lambda) = \cot l^2 \cot m \cot n = -\cot l^2 \cos(\nu-\mu)$, unde fit

$$\cot l^2 = \frac{-\cos(\mu-\lambda)\cos(\nu-\lambda)}{\cos(\nu-\mu)};\quad \cot m^2 = \frac{-\cos(\lambda-\mu)\cos(\nu-\mu)}{\cos(\nu-\lambda)},$$

$$\cot n^2 = \frac{-\cos(\lambda-\nu)\cos(\mu-\nu)}{\cos(\mu-\lambda)}.$$

Cum vero sit $\cos(\nu-\mu) - \cos(\mu-\lambda)\cos(\nu-\lambda) = \sin(\mu-\lambda)\sin(\nu-\lambda)$ erit

$$\cos l^2 = -\cot(\mu-\lambda)\cot(\nu-\lambda);\ \cos m^2 = -\cot(\lambda-\mu)\cot(\nu-\mu);\ \cos n^2 = -\cot(\lambda-\nu)\cot(\mu-\nu).$$

Hac relatione inter quantiates l, m, n, λ, μ, ν, quae tempusculo dt suis differentialibus crescere sunt censendae, notata, sit nunc O polus gyrationis arcusque AO = α, BO = ξ, CO = γ, ut sit:

$\cos\alpha^2 + \cos\xi^2 + \cos\gamma^2 = 1$: erit $\cos BAO = \frac{\cos\xi}{\sin\alpha}$, et $\sin BAO = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$,

at in triangulo ZAB est $\cos ZAB = \frac{\cos m}{\sin l}$ et $\sin ZAB = -\cos ZAC = \frac{-\cos n}{\sin l}$, ita ut sit pro triangulo ZAO

$$\sin ZAO = \frac{\cos\gamma\cos m - \cos\xi\cos n}{\sin\alpha\sin l};\quad \cos ZAO = \frac{\cos\xi\cos m + \cos\gamma\cos n}{\sin\alpha\sin l}$$

unde colligitur $\cos ZO = \cos\alpha\cos l + \cos\xi\cos m + \cos\gamma\cos n$,

$$\text{et } \cot AZO = \frac{\cos\alpha - \cos l(\cos\alpha\cos l + \cos\xi\cos m + \cos\gamma\cos n)}{\cos\gamma\cos m - \cos\xi\cos n},$$

hincque ad quodvis tempus polus gyrationis O innotescit.

Deinde posito celeritate angulari = $\varkappa$ in sensum ABC, tempusculo dt punctum A circa O describit arculum $Aa = \varkappa dt \sin\alpha$ quare ducta $a\omega$ ad ZA normali erit

$$A\omega = \varkappa dt.\frac{\cos\gamma\cos m - \cos\xi\cos n}{\sin l};\quad a\omega = \varkappa dt.\frac{\cos\xi\cos m + \cos\gamma\cos n}{\sin l}$$

unde differentialia quantitatum l et λ deducuntur,

Digitized by Google

$dl \sin l = \varkappa dt (\cos \mathfrak{C} \cos n - \cos \gamma \cos m)$, et
$-d\lambda \int l^2 = \varkappa dt (\cos \mathfrak{C} \cos m + \cos \gamma \cos n)$

similique modo reperietur:

$dm \sin m = \varkappa dt (\cos \gamma \cos l - \cos \alpha \cos n)$; $-d\mu \int m^2 = \varkappa dt (\cos \gamma \cos n + \cos \alpha \cos l)$

$dn \sin n = \varkappa dt (\cos \alpha \cos m - \cos \mathfrak{C} \cos l)$; $-d\nu \int n^2 = \varkappa dt (\cos \alpha \cos l + \cos \mathfrak{C} \cos m)$.

Quocirca si ad quodvis tempus t dentur quantitates α, $\mathfrak{C}$, γ, et $\varkappa$, ideoque earum differentialia tempusculo dt nata, hinc colliguntur variationes eodem tempusculo in arcubus l, m, n, et angulis λ, μ, ν productae: Praeterea vero variatio in polo gyrationis O facta facile concluditur, quia tantum opus est, ut arcus ZO et angulus AZO differentientur, ponendo solum arcus α, $\mathfrak{C}$, γ variabiles, quia hoc modo polus O in situm sequentem o transfertur. Erit ergo $(Zo - ZO) \sin ZO = d\alpha \int \alpha \cos l + d\mathfrak{C} \int \mathfrak{C} \cos m + d\gamma \int \gamma \cos n$ et cum sit

$\cot AZO (\cos \gamma \cos m - \cos \mathfrak{C} \cos n) = \cos \alpha - \cos l \cos ZO$ erit

$$\frac{OZo}{\sin AZO^2} (\cos \gamma \cos m - \cos \mathfrak{C} \cos n) + \cot AZO (d\gamma \int \gamma \cos m - d\mathfrak{C} \int \mathfrak{C} \cos n) = d\alpha \int \alpha \int l^2 - d\mathfrak{C} \int \mathfrak{C} \cos l \cos m - d\gamma \int \gamma \cos l \cos n$$

hincque reducendo:

$$\frac{OZo}{\int AZO^2} = \frac{\sin l^2 (d\alpha \int \alpha (\cos \gamma \cos m - \cos \mathfrak{C} \cos n) + d\mathfrak{C} \int \mathfrak{C} (\cos \alpha \cos n - \cos \gamma \cos l) + d\gamma \int \gamma (\cos \mathfrak{C} \cos l - \cos \alpha \cos m))}{(\cos \gamma \cos m - \cos \mathfrak{C} \cos n)^2}$$

ac denique angulus elementaris

$$OZo = \frac{d\varkappa \int \alpha (\cos \gamma \cos m - \cos \mathfrak{C} \cos n) + d\mathfrak{C} \int \mathfrak{C} (\cos \alpha \cos n - \cos \gamma \cos l) + d\gamma \int \gamma (\cos \mathfrak{C} \cos l - \cos \alpha \cos m)}{1 - (\cos \alpha \cos l + \cos \mathfrak{C} \cos m + \cos \gamma \cos n)^2}$$

in quam formulam bis ternae litterae α, $\mathfrak{C}$, γ, et l, m, n aequaliter ingrediuntur, ut natura rei postulat.

COROLL. 1.

679. Si ex O in Zo arculus Op perpendiculariter ducatur erit

$$po = \frac{d\alpha \int \alpha \cos l + d\mathfrak{C} \int \mathfrak{C} \cos m + d\gamma \int \gamma \cos n}{\sin ZO}$$ et

$$Op = \frac{d\alpha \int \alpha (\cos \gamma \cos m - \cos \mathfrak{C} \cos n) + d\mathfrak{C} \int \mathfrak{C} (\cos \alpha \cos n - \cos \gamma \cos l) + d\gamma \int \gamma (\cos \mathfrak{C} \cos l - \cos \alpha \cos m)}{\sin ZO}$$

COROLL. 2.

680. Porro ex $\sin BAO = \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha}$ et $\cos BAO = \frac{\cos \mathfrak{C}}{\int \alpha}$ colligitur an-

gulus $OA\omega = \frac{-d\alpha \cos\alpha \cos\gamma - d\gamma \sin\alpha \sin\gamma}{\sin\alpha \cos\zeta}$ hincque elementum $O\omega = r\sqrt{\frac{(d\alpha^2 + d\gamma^2)\sin\alpha^2 \sin\gamma^2 + 2\,d\alpha\, d\gamma \sin\alpha \cos\alpha \sin\gamma \cos\gamma}{\cos\zeta}}$, quod cum aeque referatur ad α, ζ, γ ob $d\alpha \sin\alpha \cos\alpha + d\zeta \sin\zeta \cos\zeta + d\gamma \sin\gamma \cos\gamma = 0$ reducitur ad $O\omega = r(d\alpha^2 \sin\alpha^2 + d\zeta^2 \sin\zeta^2 + d\gamma^2 \sin\gamma^2)$.

COROLL. 3.

681. Ponamus $ZO = v$ et cum sit $\cos v = \cos\alpha \cos l + \cos\zeta \cos m + \cos\gamma \cos n$ erit *tang* $AZO = \frac{\cos\gamma \cos m - \cos\zeta \cos n}{\cos\alpha - \cos l \cos v}$, et ob analogiam, quia B ad alteram partem ipsius ZO in figura cadit $-$ *tang* $BZO = \frac{\cos\alpha \cos n - \cos\gamma \cos l}{\cos\zeta - \cos m \cos v}$ unde fit *tang* $AZB = tang\,(\mu - \lambda) = \frac{\cos n}{\cos l \cos m}$; qui valor cum supra invento $\cos(\mu - \lambda) = \frac{-\cos l \cos m}{\sin l \sin m}$ egregie consPirat, eritque $\sin(\mu - \lambda) = \frac{-\cos n}{\sin l \sin m}$.

COROLL. 4.

682. Hinc ergo pro differentiis ternorum angulorum λ, μ, ν, has adipiscimur determinationes.

$$\sin(\mu - \lambda) = \frac{-\cos n}{\sin l \sin m};\ \sin(\nu - \mu) = \frac{-\cos l}{\sin m \sin n};\ \sin(\lambda - \nu) = \frac{-\cos m}{\sin l \sin n}$$

$$\cos(\mu - \lambda) = \frac{-\cos l \cos m}{\sin l \sin m};\ \cos(\nu - \mu) = \frac{-\cos m \cos n}{\sin m \sin n};\ \cos(\lambda - \nu) = \frac{-\cos l \cos n}{\sin l \sin n}.$$

SCHOLION.

683. Quae hactenus de mutatione momentanea, quam motus gyratorius tam per se quam ob vires sollicitantes subit exposuimus, fundamentum constituunt universae Theoriae de motu corporum rigidorum, quandoquidem ex cognita mutatione elementari ad ipsam motus determinationem transitus per calculum integralem patet. Aggrediamur ergo motum liberum hujusmodi corporum, quo sive proprio quasi instinctu

Digitized by Google

ſtinctui ſive viribus ſollicitantibus libere obſequi poſſunt, ac primo quidem vires ſollicitantes externas removeamus, corpora ſibi tantum relicta contemplaturi, ut extrinſecus nihil accedat, quod ad motum quicquam conferat. Quoniam autem indoles axium principalium, quibus corpus eſt praeditum, hic imprimis in computum ingreditur, inde naturale quaſi diſcrimen in corporibus conſtitui conveniet, prout momenta inertiae eorum reſpectu fuerint comparata. Tres igitur corporum claſſes conſtituamus, ad quarum primam ea referamus corpora, quorum momenta reſpectu axium principalium ſint inter ſe aequalia; ad ſecundam vero claſſem ea corpora, in quibus duo momenta reſpectu axium principalium ſint aequalia, tertium vero illis inaequale. Tertia vero claſſis in genere omnia ea corpora complectatur, quorum momenta reſpectu axium principalium inter ſe ſint inaequalia.

CAPUT XI.

DE MOTU LIBERO CORPORUM RIGIDORUM TERNIS AXIBUS PRINCIPALIBUS PARIBUS PRAEDITORUM ET A NULLIS VIRIBUS SOLLICITATORUM.

DEFINITIO. 11.

684. Corpus rigidum *tres axes principales pares* habere dicitur, quando ejus momenta inertiae reſpectu axium principalium inter ſe ſunt aequalia.

COROLL. 1.

685. In talibus ergo corporibus omnes rectae per ejus centrum inertiae ductae vicem axium principalium gerunt, eorumque reſpectu momenta inertiae inter ſe erunt aequalia.

COROLL. 2.

686. Quaecunque igitur ternae rectae ſe mutuo in centro inertiae normaliter ſecantes pro directricibus aſſumantur, ſi ſitus cujusvis corporis elementi dM per coordinatas illis parallelas x, y, et z definiatur, erit per totum corpus $\int xyd\mathrm{M} = 0$, $\int xzd\mathrm{M} = 0$ et $\int yzd\mathrm{M} = 0$.

Digitized by Google

COROLL. 3.

687. Quodsi tale corpus circa rectam quamvis per centrum inertiae transeuntem acceperit motum gyratorium, eum ob suam inertiam perpetuo conservabit, ut ea recta maneat immota; nisi a viribus externis perturbetur.

SCHOLION. 1.

688. Dari hujusmodi corpora, quorum momenta respectu axium principalium sint inter se aequalia, eo minus dubitare licet, cum in superioribus, ubi corpora homogenea sumus contemplati, plures corporum species hac proprietate gaudentes assignaverimus. Inter quas primum locum tenet globus ex materia homogenea confectus, tum vero eo referenda sunt corpora quinque regularia; porro etiam dantur cylindri, coni et coni truncati, qui eadem proprietate sunt praediti. Atque in genere si corpora non constent ex materia homogenea, innumerabilia exhiberi poterunt genera cujusvis figurae, in quibus aequalitas inter momenta inertiae respectu axium principalium locum obtineat. Atque de hujusmodi corporibus tantum in hoc capite agetur, motusque, cujus sunt capacia dum a nullis viribus externis urgentur, definietur. Character ergo essentialis hujusmodi corporum in hoc consistit: ut positis ternis coordinatis orthogonalibus x, y, z ad centrum inertiae relatis primo sit ut jam notavimus $\int xyd\mathrm{M} = \int xzd\mathrm{M} = \int yzd\mathrm{M} = 0$ tum vero $\int xxd\mathrm{M} = \int yyd\mathrm{M} = \int zzd\mathrm{M}$. Sicque momentum inertiae respectu axis cujuscunque per centrum inertiae ducti erit $= 2\int xxd\mathrm{M}$. Hoc criterio quasi primum corporum genus constituitur, atque in cognitione mechanica nomine *corporum regularium* commode insigniri posset, cum omnes plane rectae per centrum inertiae ductae pari proprietate sint praeditae.

SCHOLION. 2.

689. Etsi in hoc capite tantum de motu corporum ternos axes principales pares habentium tanquam de casu simplicissimo tractare constituimus; tamen a proprietate, quae etiam ad reliqua corporum genera pateat, exordiri conveniet. Scilicet quomodocunque corporis rigidi motus fuerit perturbatus, is semper pro quovis temporis puncto resolvi potest in binos motus, quorum alter sit progressivus alter gyratorius circa quempiam axem per centrum inertiae ductum. Quae propositio cum fundamentum motus omnium corporum rigidorum contineat, ejus demonstrationem in sequente Theoremate tradamus.

THEO-

Digitized by Google

THEOREMA. 9.

690. Quomodocunque corpus rigidum moveatur, ejus motus quovis momento eſt compoſitus ſeu mixtus ex motu progreſſivo et ex gyratorio, circa axem aliquem per ejus centrum inertiae tranſeuntem.

DEMONSTRATIO.

Si corporis centrum inertiae moveatur, in quo motus progreſſivus conſiſtit, quippe qui perpetuo cum motu centri inertiae congruit, hunc mente ſaltem tollendo, dum ſpatium cum corpore pari celeritate in oppoſitum ferri concipiatur, de motu qui adhuc in corpore ineſt, demonſtrandum eſt, eum eſſe gyratorium circa quempiam axem per centrum inertiae tranſeuntem, qui ſublato motu progreſſivo quieſcat ſaltem per tempus infinite parvum. Hoc autem modo centrum inertiae corporis in quietem redigitur, et quomodocunque corpus circa hoc centrum moveatur, praeter id ſemper quaepiam linea recta quieſcet, quae propterea erit axis gyrationis, id quod ſequenti modo oſtendo. Circa corpus concipiatur ſuperficies ſphaerica centrum ſuum in ejus centro inertiae habens, quae ut quieſcens conſideretur, ad quam ſingula corporis puncta per rectas ex centro ad ſuperficiem ductas referantur. Centro igitur quieſcente punctum corporis ad P relatum tempusculo dt transferatur in p, ductoque per P circulo maximo OPB ad ſpatiolum Pp normali, in eo capiatur aliud quodvis punctum Q, quod interea transferatur in q, ita ut totus arcus interceptus PQ in pq perveniſſe ſit cenſendus, unde cum omnia corporis puncta perpetuo easdem inter ſe diſtantias ſervent, erit $pq = PQ$. Quia autem arculi Pp et Qq ſunt infinite parvi, et angulus pPQ rectus arcus, illi aequales eſſe nequeunt, niſi etiam arculus qQ ad PQ ſit normalis. Continuentur ambo arcus PQ et pq, donec ſibi occurrant in O et cum ſit $OP = Op$ et $OQ = Oq$, motu illo totus arcus OPQ in Opq erit translatus, ideoque punctum O in loco ſuo immotum perſtiterit neceſſe eſt. Quare ducta ex centro per hoc punctum O recta, eam totam interea in quiete perſeveraſſe manifeſtum eſt, quae igitur erit axis gyrationis. Ex quo perſpicitur corpus circa centrum inertiae quieſcens commoveri non poſſe, quin ſimul tota quaedam linea recta per id centrum ducta maneat immota, ideoque motum eſſe gyratorium. Sin autem centrum inertiae ipſum moveatur, univerſus corporis motus erit compoſitus ſeu mixtus ex motu progreſſivo et gyratorio circa quempiam axem per ejus centrum inertiae tranſeuntem. Fig. 90.

Digitized by Google

COROLL. 1.

691. Quomodocunque ergo corpus rigidum moveatur, ad ejus motum cognoscendum, primo consideretur ejus centrum inertiae, cujus motus dabit motum progressivum, hoc deinde sublato quaeratur punctum O, unde axis gyrationis innotescet.

COROLL. 2.

692. Ad hoc autem punctum O inveniendum, posito arcu $OP = v$, ob angulum $O = \frac{Pp}{\sin v} = \frac{Qq}{\sin(v+PQ)}$, erit $Qq.\sin v = Pp.\cos PQ.\sin v + Pp\sin PQ.\cos v$, hincque, $\tan g\, v = \frac{Pp.\sin PQ}{Qq - Pp.\cos PQ}$ unde patet punctum O semper realiter determinari.

COROLL. 3.

693. Ex motibus punctorum P et Q per spatiola Pp et Qq etiam facile definitur celeritas angularis circa axem gyrationis, quae est $= \frac{ang.O}{dt} = \frac{Pp}{dt.Jv} = \frac{r(Pp^2 - 2Pp.Qq.\cos PQ + Qq^2)}{dt\sin PQ}$ ideoque nulla esse nequit, nisi ambo spatiola Pp et Qq evanescant.

SCHOLION.

694. Etsi haec demonstratio ex sphaericis maxime est evidens, tamen ejus vim eo magis perpendi convenit, quod non defuerint viri alioquin perspicacissimi, quibus adeo visum est fieri posse, ut omnia puncta superficiei sphaericae centro quiescente aequalibus celeritatibus circumferantur. Hoc scilicet obtineri posse sunt arbitrati, si sphaera dum circa unum quempiam axem gyratur, simul circa alium axem ad illum normalem pari velocitate circumagatur. Nunc autem hac demonstratione allata evictum est, etiamsi sphaera non solum circa duos axes sed etiam tres pluresve simul circumagatur, ejus motum tamen semper ita fore comparatum, ut quovis momento tota quaedam recta in quiete permaneat. Nulla enim vis demonstrationi infertur, si quis objiciat puncta P et Q non simplici motu, ut hic assumsimus, sed composito circa aliquot axes simul ferri; quomodocunque hic motus fuerit compositus, tamen haec puncta, P et Q post tempusculum dt in alia certa puncta p et q perveniant necesse est, ut arcus pq aequalis sit arcui PQ, et quoniam arcum PQ ad spatiolum Pp normalem assumsimus, is etiam ad Qq normalis esse debet. Ac si quis adhuc dubitet, num punctum

Digitized by Google

ctum O, in quo concurſum arcuum PQ et pq productorum conſtituimus, in eodem loco permaneat, ei ſaltem concedendum eſt, id adhuc in circulo maximo Opq repertum iri, quoniam ante cum punctis P et Q in eodem circulo maximo erat ſitum: pervenit ergo in o, et arcus op aequalis eſſe deberet arcui OP; verum arcus Op aequalis eſt arcui OP, ex quo punctum o in O cadat neceſſe eſt.

PROBLEMA. 69.

695. Dato motu duorum corporis rigidi punctorum, cujus centrum inertiae quieſcit, invenire axem per centrum inertiae tranſeuntem, circa quem hoc inſtanti gyratur.

SOLUTIO.

Relatis ut ante, omnibus corporis punctis ad ſuperficiem ſphaericam quieſcentem ABCD circa centrum inertiae deſcriptam, moveatur tempuſculo dt punctum P per ſpatiolum $Pp = dp$, et aliud quodvis punctum R per ſpatiolum $Rr = dr$; ponaturque arcus circuli maximi $PR = q$. Vocentur anguli $RPp = m$ et $SRr = n$, inter quos autem jam certa quaedam relatio intercedere debet, ut arcus pr aequalis fiat arcui $PR = q$. Sit jam O polus gyrationis, indeque ad P et R ductis quaſi meridianis OP et OR, erunt anguli $OPR = 90 + m$ et $ORP = 90° - n$, quoniam arcus OP et OR ad ſpatiola Pp et Rr ſunt normales. Hinc datis in triangulo ſphaerico POR latere $PR = q$, cum angulis $OPR = 90 + m$ et $ORP = 90° - n$, reperitur. Fig. 90.

$$\cot \text{OP} = \frac{\text{ſi OPR}}{\text{ſi PR. tang ORP}} + \frac{\text{coſ PR coſ OPR}}{\text{ſ PR}} = \frac{\text{coſ m ſ n}}{\text{coſ n ſ q}} = \frac{\text{ſi m coſ q}}{\text{ſ q}}$$

$$\cot \text{OR} = \frac{\text{ſi ORP}}{\text{ſ PR. tang OPR}} + \frac{\text{coſ PR coſ ORP}}{\text{ſ PR}} = \frac{-\text{ſ m coſ n}}{\text{coſ m ſ q}} + \frac{\text{ſ n coſ q}}{\text{ſ q}}$$

ſive

$$\text{tang OP} = \frac{\text{coſ n ſ q}}{\text{coſ m ſ n} - \text{ſ m coſ n coſ q}}; \quad \text{tang OR} = \frac{\text{coſ m ſ q}}{-\text{ſ m coſ n} + \text{coſ m ſ n coſ q}}$$

unde punctum O innoteſcit. Tum vero cum ſit

$$Pp : Rr = \text{ſ OP} : \text{ſ OR} = \text{ſ ORP} : \text{ſ OPR}$$

erit $dp : dr = \text{coſ } n : \text{coſ } m$ ſeu $dp \text{ coſ } m = dr \text{ coſ } n$, unde relatio inter ſpatiola dp, dr et angulos m et n colligitur. Denique pro ipſa celeritate angulari, ea aequalis eſt angulo POp per dt diviſo, hoc eſt $= \frac{Pp}{dt \text{ ſ OP}}$, qui valor abit in $\frac{dp\sqrt{(\text{coſ m}^2 \text{ſ n}^2 + \text{coſ n}^2 \text{ſ q}^2 + \text{ſ m}^2 \text{coſ n}^2 \text{coſ q}^2 - 2\text{ſ m coſ m ſ n coſ n coſ q})}}{dt \text{ coſ n ſ q}}$.

CO-

Digitized by Google

COROLL. 1.

696. Cum ejusmodi relatio inter spatiola dp, dr et angulos m, n intercedere debeat, ut sit $dp\ cos\, m = dr\ cos\, n$, haec relatio ita in figura repraesentari potest, ut demissis ex p et r in arcum PR perpendiculis $p\pi$ et $r\varrho$ fiat $P\pi = R\varrho$.

COROLL. 2.

697. Haec proprietas autem per se est manifesta; cum enim arcus pr aequalis sit arcui $\pi\varrho$, arcui PR aequalis esse nequit, nisi sit $P\pi = R\varrho$. Celeritas autem angularis ita commodius exprimitur, ut sit $= \frac{dp\sqrt{(1-(sin\, m\, sin\, n + cos\, m\, cos\, n\, cos\, q)^2)}}{dt\, cos\, n\, sin\, q}$.

COROLL. 3.

698. Si puncta P et R semicirculo distent, ut sit $sin\, q = 0$ et $cos\, q = -1$. necessario debet esse $cos\, m\, sin\, n + sin\, m\, cos\, n = 0$, seu $tang\, m = -tang\, n$ et $m = -n$, ideoque $dp = dr$. Puncta enim opposita sphaerae alium motum nisi aequalem habere nequeunt; hoc autem casu circa axem gyrationis nihil determinatur.

COROLL. 4.

699. Cognito autem motu duorum punctorum sibi non oppositorum, situs axis gyrationis cum celeritate angulari innotescet, unde deinceps motus omnium corporis punctorum definiri potest.

SCHOLION.

700. Haec, ut jam monui, non solum ad corpora, in quibus tres axes principales pares existunt, pertinent, sed in genere ad omnia corpora rigida; quae quomodocunque agitentur dum eorum centrum inertiae fixum manet, quovis temporis momento eorum motus est gyratorius circa quempiam axem per centrum inertiae transeuntem. Sin autem centrum inertiae non maneat fixum, quovis temporis momento motus erit compositus ex tali motu gyratorio et motu progressivo; neque alius motus in corpora rigida cadere potest. Quare ad motum corporis rigidi perfecte cognoscendum, duplicem motum investigari oportet, alterum ejus centri inertiae, qui est motus progressivus, alterum vero gyratorium, cujus cognitio postulat, ut ad quodvis tempus axem gyrationis cum celeritate angulari assignare valeamus. Ac si axis quidem gyrationis perpetuo maneat idem, determinatio motus per principia

Digitized by Google

pia ante hac passim exposita nihil habet difficultatis; sin autem ipse gyrationis axis continuo varietur, haec principia minime sufficiunt, sed confugiendum erit ad ea, quae in capitibus praecedentibus fusius sunt explicata. In hoc tamen capite, ubi de motu corporum ternis axibus paribus praeditorum et a nullis viribus sollicitatorum agimus, istis subsidiis non indigemus, sed per vulgaria principia totum negotium unica propositione expedire poterimus.

PROBLEMA. 70.

701. Si corpus rigidum tribus axibus paribus praeditum quomodocunque projiciatur, neque deinceps ab ullis viribus sollicitetur, definire motum quo progreditur.

SOLUTIO.

Motus corpori primum impressus resolvatur in progressivum et gyratorium circa quempiam axem per centrum inertiae transeuntem, quorum utrumque seorsim considerare licet. Ac primo quidem motus progressivus ita continuabitur, ut centrum inertiae uniformiter in directum progrediatur, quae proprietas omni motui progressivo est communis, etiamsi corpus non ad hoc genus referatur. Quod autem ad motum gyratorium corpori primum impressum attinet, hic indoles hujus generis corporum imprimis solutionem suppeditat, cum enim axis gyrationis, quicunque fuerit, proprietate axium principalium gaudeat, motus gyratorius initio impressus ita perpetuabitur, ut axis gyrationis constanter in quiete perseveraret, si nullus motus progressivus adesset; hoc autem accedente axis gyrationis motu sibi parallelo cum centro inertiae uniformiter in directum promovebitur, atque interea motus gyratorius aequabiliter absolvetur.

COROLL. 1.

702. Quicunque ergo motus tam progressivus quam gyratorius corpori initio imprimatur, centrum inertiae cum axe gyrationis ita uniformiter in directum progredietur, ut axis sibi perpetuo maneat parallelus, corpusque circa eum uniformiter gyrari pergat.

COROLL. 2.

703. Etiamsi corpus non ad hoc genus pertineat, tamen si ei initio praeter motum progressivum motus gyratorius circa quempiam axem principalem imprimatur, uterque motus perinde continuabitur.

Digitized by Google

COROLL. 3.

704. Quin etiam si insuper vires externae accedant, quarum media directio per centrum inertiae transeat, iis solus motus progressivus perinde afficietur, ac si tota corporis massa in isto centro esset collecta; motus autem gyratorius manebit uniformis, et axis gyrationis constanter situm sibi parallelum conservabit.

SCHOLION.

705. Cum etiamnum vires sollicitantes removeamus et in solam motus impressi continuationem inquiramus, motus omnium corporum primi generis perfecte definivimus, ut nihil amplius desiderari possit: pro reliquis autem corporibus jam partem aliquam expedivimus, quando scilicet motus gyratorius primum impressus fit circa axem principalem, quae quidem determinatio per cognita jam pridem subsidia mechanica absolvi potuit. In aliis ergo corporum generibus difficultas tum demum occurrit, quando corpori primum motus gyratorius non circa quempiam axem principalem imprimitur: ad quod negotium pertractandum primum peculiare genus constituam eorum corporum, in quibus duo dantur momenta inertiae respectu axium principalium aequalia. Quod genus, praeterquam quod calculus haud mediocriter contrahitur, hoc commodi habet, ut in eo adhuc infiniti dentur axes principales, ita ut infinitis modis ejusmodi motus, qualem jam definivimus, existere possit; cum contra in tertio genere, in quo momenta principalia inter se sunt inaequalia, praeter tres axes determinatos nullus alius detur, circa quem corpus libere gyrari queat. In his igitur generibus id nobis est propositum, ut quicunque motus talibus corporibus fuerit impressus, ejus continuationem investigemus: ubi ad quodvis tempus primo positio axis gyrationis ratione axium principalium corporis cum celeritate angulari, deinde vero situs ipsorum axium principalium ratione spatii absoluti determinari debebit, qui modus hoc arduum argumentum tractandi maxime videtur idoneus, tam ad calculum evolvendum, quam ad ipsam cognitionem nostram illustrandam. Ad utrumque autem in praecedentibus capitibus necessaria adminicula exposuimus.

CAPUT

Digitized by Google

CAPUT XII.

DE MOTU LIBERO CORPORUM RIGIDORUM DUABUS AXIBUS PRINCIPALIBUS PARIBUS PRAEDITORUM ET A NULLIS VIRIBUS SOLLICITATORUM.

DEFINITIO. 12.

706. Corpus rigidum *duos axes principales pares habere* dicitur, quando inter ejus momenta inertiae respectu axium principalium duo sunt aequalia.

COROLL. 1.

707. Hujus generis ergo corpora innumerabiles habent axes principales; statim enim ac duo axes principales aequalia habent momenta inertiae, omnes rectae in eorum plano per centrum inertiae ductae aeque pro axibus principalibus haberi possunt, eodemque momento inertiae sunt praeditae.

COROLL. 2.

708. Hic igitur axis ille principalis, cujus momentum inertiae reliquis est inaequale, erit singularis, atque omnes rectae per centrum inertiae ad eum normaliter ductae paria habebunt momenta inertiae, et tanquam axes principales spectari poterunt.

COROLL. 3.

709. Cognito itaque axe singulari, positio binorum reliquorum non determinatur, sed eorum loco pro lubitu binae rectae quaecunque, tam inter se quam ad illum normales accipi possunt, dummodo per centrum inertiae transeant.

SCHOLION.

710. Cum igitur supra in genere pro axibus principalibus IA, IB, IC posuerimus momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc, hortum duo in isthoc capite aequalia statuamus. Sit igitur primus axis IA singularis, reliquorumque momenta inertiae inter se aequalia, ut fit $bb = cc$; ex

Digitized by Google

quo formulae supra inventae mirifice contrahentur. Etsi autem hoc casu situs binorum axium IB et IC non determinatur, tamen eos tanquam determinatos spectabimus, ut eorum ope situs corporis ad quodvis tempus facilius assignari possit. Hujus autem generis utique infinita dantur corpora, atque inter homogenea imprimis huc pertinent cylindri, coni, atque in genere omnia corpora rotunda, quae conversione figurae cujuscunque circa quempiam axem fixum nascuntur; ita ut hoc genus fere omnia corpora, quae quidem a geometris considerari solent, in se complectatur. Quemadmodum ergo haec corpora ratione motus se sint habitura, dum a nullis viribus sollicitantur, in hoc capite investigabimus, ac primo quidem ad quodvis tempus in positionem axis gyrationis ratione axium principalium inquiramus, nondum solliciti quemnam motum hi ipsi axes sint habituri, quem deinceps definire conabimur.

PROBLEMA. 71.

711. Si corpori rigido duobus axibus principalibus paribus praedito motus quicunque gyratorius initio fuerit impressus, neque ullae adsint vires externae, ad quodvis tempus positionem axis gyrationis ratione axium principalium assignare.

SOLUTIO.

Fig. 89. Centro inertiae corporis I in centro sphaerae, ad cujus superficiem omnia reducamus, constituto sint IA, IB, IC axes corporis principales, ac respectu primi IA momentum inertiae $= Maa$, respectu binorum reliquorum autem IB et IC sint momenta inertiae inter se aequalia $= Mcc$, ut sit $bb = cc$. Nunc autem elapso ab initio tempore $= t$, corpus gyretur circa axem IO in sensum ABC celeritate angulari $= \mathfrak{u}$, ita ut situs puncti O respectu punctorum A, B, C definiri debeat. Ponantur ergo arcus circulorum maximorum $OA = \alpha$, $OB = \beta$, et $OC = \gamma$, qui tanquam variabiles sunt tractandi; atque problema 66. ad hunc casum quo $bb = cc$ translatum dabit primo $d\mathfrak{u} = 0$, unde patet celeritatem angularem manere invariabilem, ideoque adhuc esse aequalem ei, quae initio corpori fuerit impressa. Quare si haec prima celeritas angularis ponatur $= \varepsilon$ erit $\mathfrak{u} = \varepsilon$. Deinde vero ex §. 674. habebimus has aequationes.

I. $aac^4\, d\alpha\, si\, \alpha = 0$

II. $aac^4\, d\beta\, si\, \beta = \varepsilon aacc\,(aa - cc)\, dt\, cos\, \alpha\, cos\, \gamma$

III. $aac^4\, d\gamma\, si\, \gamma = \varepsilon aacc\,(cc - aa)\, dt\, cos\, \alpha\, cos\, \beta$

ex

ex quarum prima discimus, arcum AO $= \alpha$ esse constantem, ideoque aequalem illi, quo initio axis gyrationis distabat ab axe singulari IA. Cum igitur sit $\cos\gamma = r(\sin\alpha^2 - \cos\zeta^2)$, reliquarum aequationum altera praebet:

$$\frac{d\zeta \sin\zeta}{r\sqrt{(\sin\alpha^2 - \cos\zeta^2)}} = \frac{s(aa-cc)\,dt\cos\alpha}{cc}$$

cujus integrale est $A\cos.\frac{\cos\zeta}{\sin\alpha} = C + \frac{s(aa-cc)t\cos\alpha}{cc}$, ideoque

$$\cos\zeta = \sin\alpha\cos\left(C + \frac{s(aa-cc)t\cos\alpha}{cc}\right) \text{ et}$$

$$\cos\gamma = \sin\alpha\sin\left(C + \frac{s(aa-cc)t\cos\alpha}{cc}\right).$$

Quare si initio ubi $t = 0$; fuerit AO $= \mathfrak{A}$, BO $= \mathfrak{B}$, et CO $= \mathfrak{C}$, erit $\alpha = \mathfrak{A}$, et $\cos\mathfrak{B} = \sin\mathfrak{A}\cos C$, unde fit constans $\cos C = \frac{\cos\mathfrak{B}}{\sin\mathfrak{A}}$ et $\sin C = \frac{\cos\mathfrak{C}}{\sin\mathfrak{A}}$. Quocirca habebimus

$$\cos\zeta = \cos\mathfrak{B}\cos\frac{s(aa-cc)t\cos\mathfrak{A}}{cc} - \cos\mathfrak{C}\sin\frac{s(aa-cc)t\cos\mathfrak{A}}{cc}$$

$$\cos\gamma = \cos\mathfrak{B}\sin\frac{s(aa-cc)t\cos\mathfrak{A}}{cc} + \cos\mathfrak{C}\cos\frac{s(aa-cc)t\cos\mathfrak{A}}{cc}$$

unde si initio motus cognoverimus situm axis gyrationis respectu axium principalium, seu arcus $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, et $\mathfrak{C}$, pro quovis tempore elapso t situm axis gyrationis respectu eorundem axium principalium seu arcus α, ζ, γ assignare valemus.

COROLL. 1.

712. Si igitur initio corpori impressus fuerit motus gyratorius circa axem IE, ad axes principales IA, IB, IC inclinatum angulis $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, celeritate angulari $= s$ in sensum ABC; quomodocunque deinceps axis gyrationis varietur, celeritas angularis perpetuo manebit eadem $= s$; et axis gyrationis IO eodem angulo $\mathfrak{A}$ ad axem principalem singularem IA inclinabitur.

COROLL. 2.

713. Tum vero si momentum inertiae respectu axis singularis IA fit $= Maa$, respectu binorum reliquorum autem $= Mcc$ pro tempore

Digitized by Google

elapso $= t$, quia s angulum denotat, ponatur angulus $\frac{s(aa - cc)t \cos \mathfrak{A}}{cc}$ $= T$, qui cum tempore t uniformiter crescit; atque hoc tempore corpus gyrabitur circa axem IO, ut sit $AO = AE = \mathfrak{A}$ et $\cos BO = \cos \mathfrak{B} \cos T - \cos \mathfrak{C} \sin T$; $\cos CO = \cos \mathfrak{B} \sin T + \cos \mathfrak{C} \cos T$.

COROLL. 3.

714. Quia arcus AO perpetuo manet aeque magnus $= \mathfrak{A}$, situs puncti O commodissime ex angulo BAO innotescet, et cum sit $\cos BAO = \frac{\cos BO}{\sin \mathfrak{A}}$ et $\sin BAO = \frac{\cos CO}{\sin \mathfrak{A}}$ erit

$$\cos BAO = \frac{\cos \mathfrak{B} \cos T - \cos \mathfrak{C} \sin T}{\sin \mathfrak{A}} \text{ et } \sin BAO = \frac{\cos \mathfrak{B} \sin T + \cos \mathfrak{C} \cos T}{\sin \mathfrak{A}}.$$

COROLL. 4.

715. Si fuerit $cc = aa$, qui est casus ante tractatus quo omnia tria momenta inertiae sunt inter se aequalia, erit $T = 0$, et $BO = \mathfrak{B}$, item $CO = \mathfrak{C}$, polus scilicet gyrationis O respectu axium principalium maneret immotus, uti jam ante invenimus.

SCHOLION.

716. Formulae hae multo simpliciores reddi possunt, sed rei dignitas mereretur, ut id potius singulari propositione quam in transitu prosequamur.

PROBLEMA. 72.

717. Iisdem positis, quae in praecedente problemate sunt constituta, definire promotionem poli gyrationis O respectu axium principalium.

SOLUTIO.

Fig. 91. Maneant omnia uti in praecedente solutione, et cum poli pares B et C in circulo BC pro lubitu accipi queant, quadrans AB ita constituatur, ut per polum E, circa quem corpus primum gyrari incipit, transeat. Cum igitur hic polus gyrationis perpetuo eandem a polo principali A servet distantiam, ejus motus fiet per circulum minorem EFG centro A descriptum, cujus distantia sit arcus $AE = \alpha$, quem supra per $\mathfrak{A}$ indicavimus. Erit ergo $BE = \mathfrak{B} = 90° - \alpha$, et $CE = \mathfrak{C} = 90°$.

Digitized by Google

90°. Quare si elapso tempore $= t$, polus gyrationis ex E pervenerit in O, ob $cos \mathfrak{C} = 0$, erit

$$cos BAO = \frac{cos \mathfrak{B} \, cos T}{sin^2} = cos T, \text{ et } sin BAO = \frac{cos \mathfrak{B} \, sin T}{sin^2} = sin T,$$

ideoque ipse angulus BAO $=$ T. At angulus T ita ex tempore t definitur, ut sit $T = \frac{\varepsilon (aa - cc) t \, cos^2}{cc} = BAO$, unde hanc egregiam solutionem consequimur. Si momentum inertiae respectu axis principalis singularis IA fuerit $= Maa$, et respectu binorum reliquorum parium IB et IC $= Mcc$, corpus autem initio circa axem IE in sensum BCA celeritate angulari $= \varepsilon$ gyrari coeperit ; tum respectu axium principalium, quos quasi in quiete spectamus, polus gyrationis per circulum minorem EFG circa polum A descriptum uniformiter proferetur, ita ut elapso tempore $= t$ conficiat angulum $EAO = \frac{\varepsilon (aa - cc) t \, cos AE}{cc}$, motusque fiat in sensum BC conformem motui gyratorio, si quidem fuerit $aa > cc$; in contrarium autem si $aa < cc$.

COROLL. 1.

718. Polus gyrationis his casibus quiescet. 1°. si AE $= 0$, seu corpus circa axem principalem IA gyrari inceperit. 2°. si AE $= 90°$ seu si corpus circa quemcunque axem ad IA normalem gyrari inceperit : ac 3°. si $aa = cc$, hoc est si corpus habuerit omnes tres axes principales pares.

COROLL. 2.

719. Si fuerit $aa > cc$, polus gyrationis E circa A in eundem sensum BC in quem fit gyratio circumferetur celeritate angulari $= \frac{\varepsilon (aa - cc) cos AE}{cc}$, sin autem fuerit $aa < cc$, in sensum contrarium circumferetur celeritate angulari $= \frac{\varepsilon (cc - aa) cos AE}{cc}$.

COROLL. 3.

720. Ipse autem arcus circuli minoris EO, per quem axis gyrationis tempore t procedit, est $= \frac{\varepsilon (aa - cc) t \, sin AE \, cos AE}{cc}$

$=$

$= \frac{3(aa-cc)t\,\text{si}\,2AE}{cc}$, quod ergo ſpatium ceteris paribus eſt maximum, ſi $AE = \frac{1}{2}\,AB = 45°$, hoc eſt ſi axis gyrationis aequaliter diſtet ab axibus principalibus.

COROLL. 4.

721. Poſita ratione diametri ad peripheriam $= 1 : \pi$, polus gyrationis totam circumferentiam EFGE percurret tempore $= \frac{2\pi cc}{8(aa-cc)\cos AE}$ min. ſec. huncque motum perpetuo uniformem conſervabit.

SCHOLION.

722. Hic nondum de ipſo corporis motu agimus, ſed quod probe eſt notandum, corpus, quaſi quieſceret, vel aliud ipſi aequale in quiete contemplamur, in eoque ad quodvis tempus axem gyrationis IO definire docuimus, circa quem corpus motum tum ſit gyraturum, neque hic ſumus ſolliciti, quemnam ſitum hic axis gyrationis tum reſpectu ſpatii abſoluti ſit habiturus. Nunc igitur iſtam completam motus cognitionem aggrediamur.

PROBLEMA. 73.

723. Si corpori rigido duobus axibus principalibus praedito impreſſus fuerit initio motus gyratorius quicunque, ad datum tempus tam ſitum axium principalium quam axis gyrationis reſpectu ſpatii abſoluti aſſignare.

SOLUTIO.

Fig. 89. Sphaera ex centro inertiae corpori circumſcripta cingatur ſuperficie ſphaerica immobili ZXVY, atque elapſo tempore t ſphaera mobilis cum corpore eum teneat ſitum, ut axium ternorum principalium poli ſint in A, B, C, reſpectu quorum primi IA momentum inertiae ſit $= Maa$, reſpectu autem binorum reliquorum $= Mcc$. Ductis inde ad punctum quoddam fixum Z arcubus AZ, BZ et CZ, ponamus ut in probl. 68. $AZ = l$, $BZ = m$, et $CZ = n$, ut ſit $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$, tum vero ſint anguli $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$ et $XZC = \nu$, et quia motus gyratorius, uti jam oſtendimus, manet aequabilis, ſit ejus celeritas angularis $= \varepsilon$ in ſenſum ABC directa. Porro quoniam axis gyratio-

Digitized by Google

gyrationis perpetuo ab axe IA aeque maneat remotus. Sit arcus AO = α, et aequalis initiali AE, ubi assumamus initio polum gyrationis E in ipso arcus AB positum fuisse. Ex praecedentibus ergo si ponamus $\frac{\varepsilon(aa-cc)t\cos\alpha}{cc} = T$, erit nunc elapso tempore $= t$ angulus BAO $= T$: unde si ponamus arcus BO $= \zeta$ et CO $= \gamma$, erit $\cos\zeta = \sin\alpha\cos T$ et $\cos\gamma = \sin\alpha\sin T$ ob BAC angulum rectum. His positis ob $\varkappa = \varepsilon$ ex §. 678. habemus has aequationes.

$$dl\sin l = \varepsilon dt\sin\alpha(\cos n\cos T - \cos m\sin T); \quad -d\lambda\sin l^2 = \varepsilon dt\sin\alpha(\cos m\cos T + \cos n\sin T)$$

$$dm\sin m = \varepsilon dt\sin\alpha(\cos l\sin T - \cos n\cot\alpha); \quad -d\mu\sin m^2 = \varepsilon dt\sin\alpha(\cos n\sin T + \cos l\cot\alpha)$$

$$dn\sin n = \varepsilon dt\sin\alpha(\cos m\cot\alpha - \cos l\cos T); \quad d\nu\sin n^2 = \varepsilon dt\sin\alpha(\cos l\cot\alpha + \cos m\cos T)$$

quae quo facilius ad integrationem perduci queant, consideremus arcum ZO $= v$, et cum sit $\cos v = \cos\alpha\cos l + \sin\alpha(\cos m\cos T + \cos n\sin T)$ erit differentiando

$$dv\sin v = dl\sin l\cos\alpha + dm\sin m\sin\alpha\cos T + dn\sin n\sin\alpha\sin T + dT\sin\alpha\cos m\sin T - dT\sin\alpha\cos n\cos T$$

substitutis autem pro $dl\sin l$, $dm\sin m$, $dn\sin n$ illis valoribus fit

$$dv\sin v = -dT\sin\alpha(\cos n\cos T - \cos m\sin T) = -dT\sin\alpha.\frac{dl\sin l}{\varepsilon dt\sin\alpha}.$$

Cum igitur sit $dT = \frac{\varepsilon(aa-cc)dt\cos\alpha}{cc}$ oritur

$$dv\sin v = \frac{-(aa-cc)\cos\alpha}{cc}.dl\sin l$$ et integrando

$$\cos v = C - \frac{(aa-cc)\cos\alpha\cos l}{cc} = \cos\alpha\cos l + \sin\alpha(\cos m\cos T + \cos n\sin T)$$

ut ergo jam una habeatur aequatio integralis

$$C = \frac{aa}{cc}\cos\alpha\cos l + \sin\alpha\cos m\cos T + \sin\alpha\cos n\sin T.$$

Hinc autem concludere licet integrationem particularem, ponendo arcum l constantem, et $\cos m = \sin l\cos T$ atque $\cos n = \sin l\sin T$, ut fiat $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$, simulque primae aequationi $dl\sin l = 0$ satisfiat, reliquae vero dabunt:

$$dm\sin m = dT\sin l\sin T = \varepsilon dt\sin\alpha(\cos l\sin T - \cot\alpha\sin l\sin T)$$

$$dn\sin n = -dT\sin l\cos T = \varepsilon dt\sin\alpha(\cot\alpha\sin l\cos T - \cos l\cos T)$$

ex quarum utraque prodit $d\,T\,/\,l = \varepsilon dt\,fi\,\alpha\,(cof\,l - cot\,\alpha\,fl) = \frac{\varepsilon(aa-cc)\,dt\,cof\alpha\,fl}{cc}$, seu $fi\,\alpha\,cof\,l - cof\,\alpha\,fi\,l = \frac{(aa-cc)\,cof\alpha\,fl}{cc}$, hinc-

que $tang\,l = \frac{cc\,tang\,\alpha}{aa}$, simul autem arcus $ZO = v$ fiet constans, nempe $cof\,v = cof\,\alpha\,cof\,l + fi\,\alpha\,fl$ consequenter $ZO = v = \alpha - l$ et $tang\,AZO = 0$, ita ut puncta A, Z et O semper sint in eodem circulo maximo. Denique vero pro situ arcus ZA habebitur $-d\lambda\,fl^2 = \varepsilon dt\,fi\,\alpha\,fl$, hincque $\lambda = \frac{-\varepsilon t\,fi\,\alpha}{fi\,l}$. Cognito autem angulo XZA $= \lambda$ reliqui XZB $= \mu$ et XZC $= \nu$ ex his formulis definientur:

$$fi\,(\mu-\lambda) = \frac{-cof\,n}{fl\,fm};\quad fi\,(\nu-\lambda) = \frac{cof\,m}{fl\,fn};\ \text{seu}$$

$$cof\,(\mu-\lambda) = \frac{-cof\,l\,cof\,m}{fl\,fm};\quad cof\,(\nu-\lambda) = \frac{-cof\,l\,cof\,n}{fl\,fn}$$

seu $tang\,(\mu-\lambda) = \frac{cof\,n}{cof\,l\,cof\,m} = \frac{tang\,T}{cof\,l}$ et $tang\,(\nu-\lambda) = \frac{-cot\,T}{cof\,l}$.

Cum autem haec solutio sit particularis, generalem sequenti modo eliciemus.

SOLUTIO GENERALIS.

Ponamus $cof\,m = fi\,l\,cof\,\Theta$ et $cof\,n = fin\,l\,fin\,\Theta$, ut sit $cof\,l^2 + cof\,m^2 + cof\,n^2 = 1$, eritque

$$d\,l\,fi\,l = \varepsilon dt\,fi\,\alpha\,(fl\,fi\,\Theta\,cof\,T - fl\,cof\,\Theta\,fl\,T)$$

sive $dl = \varepsilon dt\,fi\,\alpha\,fi\,(\Theta - T)$, tum vero habebitur

$$dm\,fi\,m = d\Theta\,fl\,fi\,\Theta - d\,l\,cof\,l\,cof\,\Theta = \varepsilon dt\,fi\,\alpha\,(cof\,l\,fl\,T - cot\,\alpha\,fl\,fi\,\Theta)$$

Ideoque

$$d\Theta\,fi\,l\,fi\,\Theta = \varepsilon dt\,fi\,\alpha\,(cof\,l\,cof\,\Theta\,fi\,(\Theta - T) + cof\,l\,fl\,T - cot\,\alpha\,fl\,fi\,\Theta)$$

at ob $T = \Theta - (\Theta - T)$ est $fi\,T = fi\,\Theta\,cof\,(\Theta - T) - cof\,\Theta\,fi\,(\Theta - T)$ unde per $fin\,\Theta$ dividendo erit

$$d\Theta\,fi\,l = \varepsilon dt\,fi\,\alpha\,(cof\,l\,cof\,(\Theta - T) - cot\,\alpha\,fi\,l).$$

Statuamus jam $\Theta - T = \Phi$, erit $d\Theta = d\Phi + \frac{\varepsilon(aa-cc)\,dt\,cof\,\alpha}{cc}$, et

$$d\Phi\,fi\,l + \frac{\varepsilon(aa-cc)\,dt\,cof\,\alpha\,fi\,l}{cc} = \varepsilon dt\,fi\,\alpha\,cof\,l\,cof\,\Phi - \varepsilon dt\,cof\,\alpha\,fl$$

seu

$$\text{seu } d\varphi \sin l = \varepsilon dt \sin\alpha \cos l \cos\varphi - \frac{\varepsilon\alpha\alpha dt \cos\alpha \sin l}{cc}$$

quae aequatio cum praecedente $dl = \varepsilon dt \sin\alpha \sin\varphi$ est conjungenda et resolvenda, quae quidem continent tres variabiles l, t, et φ, quarum media ob $\varepsilon dt = \frac{dl}{\sin\alpha \sin\varphi}$ facile eliminatur; oritur enim

$$d\varphi \sin l = \frac{dl \cos l \cos\varphi}{\sin\varphi} - \frac{\alpha\alpha dl \cos\alpha \sin l}{cc \sin\alpha \sin\varphi}, \text{ seu}$$

$$\frac{\alpha\alpha dl \cos\alpha \sin l}{cc \sin\alpha} = dl \cos l \cos\varphi - d\varphi \sin l \sin\varphi$$

cujus integrale est:

$$C - \sin l \cos\varphi = C - \frac{\alpha\alpha cc \sin\alpha \cos l}{cc \sin\alpha}.$$

Statuamus brevitatis gratia $\frac{\alpha\alpha \cos\alpha}{cc \sin\alpha} = D$, ut sit

$$\cos\varphi = \frac{C - D\cos l}{\sin l}, \text{ et } \sin\varphi = \frac{1}{\sin l}\sqrt{(1 - CC + 2CD\cos l - (1+DD)\cos l^2)}$$

quo valore in altera aequatione substituto oritur

$$\varepsilon dt = \frac{dl \sin l}{\sin\alpha \sqrt{(1 - CC + 2CD\cos l - (1+DD)\cos l^2)}}$$

cujus integrale est

$$\varepsilon t + E = \frac{1}{\sin\alpha \sqrt{(1+DD)}} A \sin \frac{CD - (1+DD)\cos l}{\sqrt{(1 - CC + DD)}}$$

$$\text{seu } \frac{CD - (1+DD)\cos l}{\sqrt{(1 - CC + DD)}} = \sin((\varepsilon t + E)\sin\alpha \sqrt{(1+DD)})$$

unde ad quodvis tempus arcus $ZA = l$, indeque angulus $\varphi = \Theta - T$, hincque angulus $\Theta = \varphi + T$ innotescit, quo invento erit $\cos m = \sin l \cos\Theta$ et $\cos n = \sin l \sin\Theta$. Porro fiet $\cos ZO = \cos\alpha \cos l + \sin\alpha \sin l \cos\varphi = \cos\alpha \cos l + C \sin\alpha - D \sin\alpha \cos l$, seu $\cos ZO = C \sin\alpha - \frac{(\alpha\alpha - cc)\cos\alpha \cos l}{cc}$. Denique pro angulo $XZA = \lambda$ obtinemus:

$$-d\lambda \sin l^2 = \varepsilon dt \sin\alpha \sin l \cos\varphi, \text{ seu } d\lambda = \frac{-\varepsilon dt \sin\alpha (C - D\cos l)}{\sin l^2}$$

ubi si loco εdt superior valor substituatur provenit

$$d\lambda = \frac{-dl(C-D\cos l)}{\sin l\,r\,(1-CC+2CD\cos l-(1+DD)\cos l^2)}$$

cujus integrale elicitur

$$\lambda = E + A\,\mathfrak{fi}\,\frac{-D+C\cos l}{\sin l}$$

ſicque omnia in genere ſunt determinata.

COROLL. 1.

724. Ex ſolutione generali naſcitur ſolutio particularis prius eruta, ſi ponatur conſtans $C = r\,(1+DD)$; tum enim in aequatione $st + E = \frac{1}{\mathfrak{fi}\,a.\,r\,(1+DD)}\,A\,\sin\frac{CD-(1+DD)\cos l}{r\,(1-CC+DD)}$, ob denominatorem $r\,(1-CC+DD) = 0$, etiam numerator $CD-(1+DD)\cos l$ evaneſcere debet, unde fit $\cos l = \frac{D}{r\,(1+DD)}$ et $\sin l = \frac{1}{r\,(1+DD)}$, ideoque $\tang l = \frac{1}{D} = \frac{cc}{aa}\tang a$.

COROLL. 2.

725. Sumta autem conſtante $C = r\,(1+DD)$ fit $\cos\varphi = \frac{r\,(1+DD)-D\cos l}{\sin l} = 1$, ideoque $\varphi = 0$ et $\Theta = T$, unde colligitur $\cos m = \mathfrak{fi}\,l\cos T$ et $\cos n = \sin l \int T$, ac denique $\lambda = E + A\,\mathfrak{fi}\,\frac{-D+\cos l\,r\,(1+DD)}{\sin l} = E + A\int 0$. Verum ob $\varphi = 0$, ad hoc incommodum evitandum, ſumatur aequatio $d\lambda \sin l = -\varepsilon dt\,\mathfrak{fi}\,a$, unde fit ut ante $\lambda = E - \frac{\varepsilon t\,\mathfrak{fi}\,a}{\sin l}$.

SCHOLION.

726. Solutio generalis ideo tot involvit conſtantes arbitrarias, ut ubicunque punctum fixum Z in ſphaera immobili accipiatur, ad id poſſit accommodari. Cum autem punctum Z ab arbitrio noſtro pendeat, id ſemper ita accipere licebit, ut pro eo ſolutio particularis locum ſit habitura: quae cum ſit ſimpliciſſima maxime nobis perſpicuam cognitionem motus largietur, cum idem motus, ſi ad alia puncta fixa referretur, vehementer perturbatus videri debeat. Quare punctum hoc fixum Z non pro lubitu ſed ita aſſumamus, ut ſolutio illa particularis locum inveniat.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA. 74.

727. Si corpori rigido duobus axibus principalibus paribus praedito impressus fuerit initio motus gyratorius circa axem quemcunque per centrum inertiae transeuntem motus hujus continuationem determinare.

SOLUTIO.

In centro sphaerae immobilis concipiatur centrum inertiae corporis, quod etiam quiescit; atque initio axes corporis principales fuerint in A, B, C, quorum primi IA respectu momentum inertiae sit $= Maa$, respectu vero binorum reliquorum $= Mcc$: tum autem acceperit corpus motum gyratorium circa axem IE in sensum BCA, celeritate angulari $= s$ sitque arcus $AE = \alpha$. Quo nunc hujus motus impressi continuationem investigemus, solutione particulari utentes, in arcu AB, quem in sphaera immobili tanquam meridianum fixum spectemus, capiatur AZ ita ut sit $tang\ AZ = \frac{cc\,tang\,\alpha}{aa}$ sumaturque Z pro puncto illo fixo, ad quod deinceps situm corporis perpetuo referamus, ponamus autem $AZ = l$, ut sit $ZE = \alpha - l$. Iam elapso tempore $= t$ pervenerint poli axium principalium in A′, B′, C′; et vidimus fore adhuc $ZA' = ZA = l$, et in eodem arcu A′Z reperiri punctum O, circa quod tanquam polum corpus nunc gyretur celeritate angulari $= s$ in sensum B′C′A′. Ex praecedentibus autem, ubi angulum XZA posuimus $= \lambda$, quoniam ejus negativum hic angulum AZA′ denotat, qui initio erat $= 0$, erit hic angulus $AZA' = \frac{s\,t\,sin\,\alpha}{sin\,l}$: unde ad quodvis tempus positio axis principalis IA′ cognoscitur. Sint bini reliqui in B′ et C′, atque §. 717. invenimus, fore angulum $B'A'O = \frac{s(aa-cc)\,t\,cos\,\alpha}{cc}$: quare invento puncto A′ capiatur angulus $ZA'B' = \frac{s(aa-cc)\,t\,cos\,\alpha}{cc}$, et sumto arcu A′B′ quadrante, erit B′ alter duorum reliquorum polorum principalium, unde sponte tertius C′ patet. Fig. 92.

COROLL. 1.

728. Axis ergo principalis IA uniformiter gyratur circa lineam IZ fixam, sed non ad corpus pertinentem; ita ut sit arcus $AZ = A'Z = l$

existente $tang\ l = \frac{cc\,tang\,\alpha}{aa}$, et tempore t absolvatur angulus $AZA' = \frac{\varepsilon t \sin\alpha}{\int l}$: cujus ergo motus celeritas angularis in sensum AA' seu BCA erit $= \frac{\varepsilon \sin\alpha}{\int l}$.

COROLL. 2.

729. Interea autem arcus in corpore AB, qui initio in AZ cadebat, ita circa ZA dum tempore t in ZA' procedit, gyratur ut conficiat angulum $ZA'B' = \frac{\varepsilon(aa-cc)t\cos\alpha}{cc}$, cujus ergo motus celeritas angularis est $= \frac{\varepsilon(aa-cc)\cos\alpha}{cc}$.

COROLL. 3.

730. Motus ergo corporis potest repraesentari tanquam compositus ex duplici gyratorio. Primo scilicet corpus gyrabitur circa suum polum principalem singularem A celeritate angulari $= \frac{\varepsilon(aa-cc)\cos\alpha}{cc}$ in sensum CB; tum vero interea ipse hic polus A gyrabitur circa punctum Z in spatio absoluto fixum celeritate angulari $= \frac{\varepsilon \sin\alpha}{\int l}$.

COROLL. 4.

731. Posito arcu $ZA = l$, sit celeritas angularis, qua punctum A circa punctum fixum Z gyratur $= \zeta$, in sensum AA', quae duo elementa ut data considerentur, erit $tang\ \alpha = \frac{aa}{cc} tang\, l$ et $\varepsilon = \frac{\zeta \int l}{\int \alpha}$. Hinc celeritas angularis, qua interea arcus AB circa A gyratur in sensum contrarium, erit $= \frac{\zeta(aa-cc)\int l}{cc\,tang\,\alpha} = \frac{\zeta(aa-cc)\cos l}{aa}$.

SCHOLION. 1.

732. Hic corporis motus commodissime eodem modo repraesentari potest, quo motum vertiginis terrae concipimus, quatenus axis seu

seu poli in coelo progrediuntur. Corpus nempe tanquam terra spectetur, cujus alter polus sit A, in coelo autem punctum Z polus ecliptica, a quo polus terrae constanter eandem servet distantiam $ZA = l$, et circa quem gyretur celeritate angulari $= \zeta$ in sensum AA', qui motus respondet processui poli terrestris in coelo. Interea autem dum arcus AB vel $A'B'$ gyratur circa A vel A', ab area ZA recedens in sensum CB celeritate angulari $= \frac{\zeta(aa-cc)\cos l}{aa}$, hic motus respondebit motui diurno terrae. Revera autem talis motus maxime discrepat a motu vertiginis terrae, cum hic motus meridiani AB circa polum A sit admodum lentus respectu motus angularis poli A circa punctum fixum Z, cum contra in terra motus diurnus sit velocissimus prae motu poli circa polum ecliptica. Quod si ergo motus polorum terrae circa polos ecliptica esset velocissimus, contra vero motus vertiginis circa polos terrae tardissimus, causam hujus motus neutiquam in viribus externis quaeri conveniret, cum terra per se ob inertiam tali motu cieri posset. Nunc autem cum contrarium eveniat, hujus phoenomeni causa manifesto in viribus externis, quibus terra sollicitatur, est sita.

SCHOLION. 2.

733. Memoratu hic omnino dignum est, quod motus corporis, qui revera circa axem variabilem IO fiebat, quasi sponte reductus fuerit ad binos motus gyratorios, qui autem probe a se invicem sunt distinguendi, dum alter fit circa axem verum et in corpore existentem, alter vero circa axem quasi extra corpus existentem et ad spatium absolutum relatum. Ad quem motum clarius menti exponendum, corpus PRQS hasta APQa transfixum concipiatur, quae per ejus centrum inertiae I transeat, ejusque axem principalem singularem referat: tum vero hasta terminis suis A et a ita annulo ZAza inseratur, ut corpus libere circa eam gyrari queat: annulus autem in punctis oppositis Z et z habeat cardines, qui extrinsecus ita firmiter retineantur, ut annulus circa eos pariter libere circumferri possit. Quod si jam corpus PRQS circa hastam Aa in gyrum agatur simulque annulus AzaZ circa cardines Z et z circum feratur, ejusmodi motus orietur qualem hic descripsimus, ubi hasta refert axem verum in corpore existentem et cum corpore motum, cardines vero vero Z et z axem alterum extra corpus fixum. Bini autem hi motus gyratorii in hoc conveniunt, quod uterque altero sublato abeat in verum motum gyratorium circa axem fixum; si enim annulus

mulus quiescat, corpus circa hastam quiescentem Aa seu axem PQ fixum gyrabitur: sin autem dematur motus circa hastam, solusque annulus circa cardines Z et z gyretur, in corpore orietur motus gyratorius simplex circa axem fixum ad cardines Z et z pertingentem.

SCHOLION. 3.

734. Talis motus fieri dicitur circa axem mobilem, qui probe distinguendus est a motu circa axem variabilem, qualem in praecedentibus consideravimus. Corpus enim circa axem variabilem gyrari dicitur, quando continuo circa aliam lineam per ejus centrum inertiae ductam gyratur, quae etiam eo instanti revera quiescat; atque de tali axe omnia sunt intelligenda, quae supra de motu gyratorio sunt exposita. Quando autem dicimus corpus circa axem mobilem gyrari, quae idea nunc demum nobis nata est censenda, axis quidem erit certa quaedam linea in corpore existens invariabilis, quae autem ipsa cum corpore moveatur; ita ut iste axis mobilis nunquam quiescat. Ita axis terrae qui hoc nomen genere solet, non est axis variabilis sed mobilis, cum in terra sit linea quaedam fixa, sed labente tempore ad alia atque alia coeli puncta dirigatur: qui ergo etiam abstractione facta a motu terrae annuo nullo temporis puncto quiescit, etiamsi ejus motus sit tardissimus. Verum quovis tempore alia quaedam linea in terra assignari potest, quae tum revera quiescat, successu temporis autem continuo mutetur: hujusque respectu terra circa axem variabilem gyrari est dicenda. Ob motum autem aequinoctiorum tardissimum prae motu diurno differentia inter verum terrae axem et axem variabilem quovis tempore locum habentem fere penitus est imperceptibilis; quae autem si esset notabilis, in Astronomia summam attentionem postularet, cum observationes pro elevatione poli instituta non situm axis veri, sed axis variabilis eo tempore ostendant, circa quem scilicet tum quiescentem terra gyretur.

PROBLEMA. 75.

735. Si corpori rigido duobus axibus principalibus paribus praedito motus quicunque imprimatur, corpusque a nullis viribus externis sollicitetur, neque usquam retineatur, quominus motum suum libere prosequi possit, determinare motum, quo moveri perget.

SOLUTIO.

Primum dispiciatur, utrum ob motum impressum centrum inertiae moveatur nec ne? si enim moveatur, corpus habebit motum progressivum

greſſivum ſeorſim conſiderandum, quo uniformiter in directum progredietur, atque mente ſaltem hunc motum tollere licebit, dum ſcilicet ipſum ſpatium motu contrario proferri concipiatur. Sublato ergo motu progreſſivo, cujus ratio perinde eſt comparata, ac ſi praeterea nullus alius motus in corpore ineſſet, centrum corporis inertiae tanquam quieſcens conſiderari poterit: circa quod quomodocunque corpus agitetur, linea quaepiam recta per id ducta primo ſaltem initio quieſcet, quae ejus erit axis gyrationis. Tum ſi iſte axis conveniat cum aliquo axium principalium, hoc eſt, ſi vel incidat in axem principalem ſingularem vel ad eum ſit normalis, etiam hic motus manebit aequabilis, axisque quieſcet, vel adjuncto motu progreſſivo ſibi jugiter manebit parallelus. At ſi axis ille, circa quem corpus primum gyrari coepit, neque cum axe principali ſingulari congruat, neque ad eum ſit normalis, corpus circa axem variabilem gyrabitur, qui quomodo continuo varietur, in praecedentibus abunde oſtendimus. Clarius etiam hic motus perſpicietur per reductionem illam ad axem mobilem, qua corpus circa ipſum axem principalem ſingularem aequabiliter gyratur, dum ipſe hic axis circa quosdam polos extra corpus fixos circumfertur pariter motu uniformi.

SCHOLION.

736. Hoc problemate univerſum argumentum, quod hoc capite tractandum ſuſcepimus, exhauritur, ita ut corporum rigidorum duobus axibus principalibus paribus praeditorum, et a nullis viribus ſollicitatorum, motus liberos in genere determinare atque ad quovis caſus accommodare valeamus. Superſunt ergo corpora tertiae claſſis, quorum momenta inertiae principalia ſunt inaequalia, quibus ſequens caput deſtinatur.

Digitized by Google

CAPUT XIII.

DE MOTU LIBERO CORPORUM RIGIDORUM TERNIS AXIBUS PRINCIPALIBUS DISPARIBUS PRAEDITORUM, ET A NULLIS VIRIBUS SOLLICITATORUM.

PROBLEMA. 76.

737. Si corpori rigido cuicunque impressus fuerit initio motus gyratorius quicunque, neque id ab ullis viribus externis sollicitetur; ad quodvis tempus positionem axis gyrationis respectu axium principalium assignare.

SOLUTIO.

Fig. 89. Cum centrum inertiae corporis I perpetuo quiescat, in eo constituatur centrum sphaerae, ad cujus superficiem omnia reducamus: sintque IA, IB, IC, axes corporis principales, et momenta inertiae respectu axis IA $= Maa$, respectu axis IB $= Mbb$, et respectu axis IC $= Mcc$, quae inter se inaequalia assumimus, quoniam si duo vel adeo omnia essent inter se aequalia, casus ad praecedentia capita revolveretur. Nunc elapso tempore t sit recta IO axis gyrationis, cujus situm respectu axium principalium definiri oportet; ponatur celeritas angularis, qua corpus jam circa hunc axem IO gyratur $= \omega$, fiatque gyratio in sensum ABC. Vocentur arcus circulorum maximorum, qui quaeruntur, OA $= \alpha$, OB $= \zeta$, et OC $= \gamma$, qui tempore variantes pro variabilibus sunt habendi, ita autem inter se pendent, ut sit $\cos\alpha^2 + \cos\zeta^2 + \cos\gamma^2 = 1$. Deinde vero etiam celeritas angularis ω hic erit variabilis, cum sit (670.)

$$\frac{d\omega}{\omega\omega} = \frac{(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)\cos\alpha\cos\zeta\cos\gamma}{aabbcc}\,dt,$$

tum vero ex §. 674. variabilitas arcuum α, ζ, γ, ita determinatur per has ternas aequationes:

I. $aa\,bb\,cc\,d\alpha\sin\alpha = \omega(cc-bb)\,dt\cos\zeta\cos\gamma\,(bb\,cc-(bb-aa)(cc-aa)\cos\alpha^2)$

II. $aa\,bb\,cc\,d\zeta\sin\zeta = \omega(aa-cc)\,dt\cos\gamma\cos\alpha\,(aa\,cc-(cc-bb)(aa-bb)\cos\zeta^2)$

III. aa

Digitized by Google

III. $aa\,bb\,cc\,d\gamma\,\text{si}\,\gamma = \mathfrak{z}\,(bb - aa)\,dt\,\text{cos}\,\alpha\,\text{cos}\,\beta\,(aa\,bb - (aa - cc)\,(bb - cc)\,\text{cos}\,\gamma^2)$.

Cum autem sit $\dfrac{dt\,\text{cos}\,\alpha\,\text{cos}\,\beta\,\text{cos}\,\gamma}{aabbcc} = \dfrac{d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}\mathfrak{z}(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)}$

hae aequationes abeunt in istas:

I. $d\alpha\,\text{si}\,\alpha\,\text{cos}\,\alpha = \dfrac{-d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}(aa-bb)(aa-cc)}\,(bb\,cc - (bb - aa)\,(cc - aa)\,\text{cos}\,\alpha)^2$

II. $d\beta\,\text{si}\,\beta\,\text{cos}\,\beta = \dfrac{d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}(aa-bb)(bb-cc)}\,(aa\,cc - (cc - bb)\,(aa - bb)\,\text{cos}\,\beta^2)$

III. $d\gamma\,\text{si}\,\gamma\,\text{cos}\,\gamma = \dfrac{-d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}(aa-cc)(bb-cc)}\,(aa\,bb - (aa - cc)\,(bb - cc)\,\text{cos}\,\gamma^2)$

sive has integrabiles:

I. $+\dfrac{d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} = \dfrac{-(bb-aa)(cc-aa)\,d\alpha\,\text{si}\,\alpha\,\text{cos}\,\alpha}{bbcc-(bb-aa)(cc-aa)\,\text{cos}\,\alpha^2}$

II. $+\dfrac{d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} = \dfrac{-(cc-bb)(aa-bb)\,d\beta\,\text{si}\,\beta\,\text{cos}\,\beta}{aacc-(cc-bb)(aa-bb)\,\text{cos}\,\beta^2}$

III. $+\dfrac{d\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}} = \dfrac{-(aa-cc)(bb-cc)\,d\gamma\,\text{si}\,\gamma\,\text{cos}\,\gamma}{aabb-(aa-cc)(bb-cc)\,\text{cos}\,\gamma^2}$

quarum integralia sunt:

$$\frac{A}{\mathfrak{z}\mathfrak{z}} = bb\,cc - (bb - aa)\,(cc - aa)\,\text{cos}\,\alpha^2$$

$$\frac{B}{\mathfrak{z}\mathfrak{z}} = aa\,cc - (cc - bb)\,(aa - bb)\,\text{cos}\,\beta^2$$

$$\frac{C}{\mathfrak{z}\mathfrak{z}} = aa\,bb - (aa - cc)\,(bb - cc)\,\text{cos}\,\gamma^2$$

ubi quidem constantium A, B, C, binae sunt arbitrariae, at tertiam ita definiri oportet, ut fiat

$$A\,(cc - bb) + B\,(aa - cc) + C\,(bb - aa) = 0.$$

Vel posito

$$A = \mathfrak{A}\,(bb - aa)\,(cc - aa);\quad B = \mathfrak{B}\,(cc - bb)\,(aa - bb);$$
$$C = \mathfrak{C}\,(aa - cc)\,(bb - cc)$$

 debet

debet esse $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}=0$. Hinc ergo erit

$$\cos\alpha^2=\frac{bbcc\gamma\gamma-\mathfrak{A}(bb-aa)(cc-aa)}{(bb-aa)(cc-aa)\gamma\gamma}=\frac{bbcc}{(bb-cc)(cc-aa)}-\frac{\mathfrak{A}}{\gamma\gamma}$$

$$\cos\mathfrak{C}^2=\frac{aacc}{(cc-bb)(aa-bb)}-\frac{\mathfrak{B}}{\gamma\gamma}$$

$$\cos\gamma^2=\frac{aabb}{(aa-cc)(bb-cc)}-\frac{\mathfrak{C}}{\gamma\gamma}.$$

Ponamus brevitatis gratia:

$\frac{bbcc}{(bb-aa)(cc-aa)}=\mathfrak{D}$; $\frac{aacc}{(aa-bb)(cc-bb)}=\mathfrak{E}$; et $\frac{aabb}{(aa-cc)(bb-cc)}=\mathfrak{F}$;

ut sit $\mathfrak{D}+\mathfrak{E}+\mathfrak{F}=1$, uti est $\mathfrak{A}+\mathfrak{B}+\mathfrak{C}=0$. erit

$$\cos\alpha=\frac{r(\mathfrak{D}\gamma\gamma-\mathfrak{A})}{\gamma};\ \cos\mathfrak{C}=\frac{r(\mathfrak{E}\gamma\gamma-\mathfrak{B})}{\gamma};\text{ et }\cos\gamma=\frac{r(\mathfrak{F}\gamma\gamma-\mathfrak{C})}{\gamma},$$

quibus valoribus in aequatione primum inventa substitutis habebitur:

$$\frac{(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)dt}{aabbcc}=\frac{\gamma d\gamma}{r(\mathfrak{D}\gamma\gamma-\mathfrak{A})(\mathfrak{E}\gamma\gamma-\mathfrak{B})(\mathfrak{F}\gamma\gamma-\mathfrak{C})}$$

Cujus integratio, pauciſſimis casibus exceptis, receptas expreſſiones arcuum circularium vel logarithmorum reſpuit.

COROLL. 1.

738. Nisi ergo duo corporis momenta principalia inter se fuerint aequalia, motus gyratorius circa axem variabilem non est uniformis; ac determinatio quidem celeritatis angularis ad quodvis tempus maximam parit difficultatem.

COROLL. 2.

739. Inventa autem celeritate angulari γ ad tempus elapsum $=t$, facile positio axis gyrationis respectu axium principalium definitur per formulas pro arcubus α, $\mathfrak{C}$, γ, inventas.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA. 77.

740. Iisdem positis, atque in praecedente problemate, ex dato axe gyrationis, circa quem corpus initio data celeritate angulari gyrari coepit, ad datum tempus celeritatem angularem et axis gyrationis positionem respectu axium principalium determinare.

SOLUTIO.

Sit IE axis, circa quem corpus initio gyrari coepit, celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ABC, pro cujus loco sint arcus AE $= a$, BE $= b$, et CE $= c$. Tum vero cum momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc, sint inaequalia, sit aa maximum, bb medium, et cc minimum, ponanturque numeri hinc formandi $\frac{bbcc}{(aa-bb)(aa-cc)} = A$; $\frac{aacc}{(aa-bb)(bb-cc)} = B$; et $\frac{aabb}{(aa-cc)(bb-cc)} = C$; atque $\frac{aabbcc}{(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)} = D$, ut sit $A - B + C = 1$ et $DD = ABC$. Pro praecedentibus ergo formulis erit $\mathfrak{D} = A$, $\mathfrak{E} = -B$, et $\mathfrak{F} = C$, et elapso tempore t celeritas angularis ω ex hac aequatione differentiali determinari debet, Fig. 89.

$$\frac{dt}{2D} = \frac{\omega d\omega}{\sqrt{(A\omega\omega - \mathfrak{A})(-B\omega\omega - \mathfrak{B})(C\omega\omega - \mathfrak{C})}}$$

cujus integratio ita est instituenda, ut posito $t = 0$ fiat $\omega = \varepsilon$. Deinde vero habebitur pro arcubus AO $= \alpha$, BO $= \beta$ et CO $= \gamma$,

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{(A\omega\omega - \mathfrak{A})}}{\omega}; \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{(-B\omega\omega - \mathfrak{B})}}{\omega}; \quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{(C\omega\omega - \mathfrak{C})}}{\omega};$$

qui cum initio fuerint a, b, c, constantes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ita determinantur, ut sit

$$\mathfrak{A} = (A - \cos a^2)\varepsilon\varepsilon; \quad \mathfrak{B} = -(B + \cos b^2)\varepsilon\varepsilon; \quad \mathfrak{C} = (C - \cos c^2)\varepsilon\varepsilon.$$

Quamobrem habebimus:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon\cos a^2 - A\varepsilon\varepsilon + A\omega\omega)}}{\omega}$$

$$\cos\beta = \frac{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon\cos b^2 + B\varepsilon\varepsilon - B\omega\omega)}}{\omega}$$

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon\cos c^2 - C\varepsilon\varepsilon + C\omega\omega)}}{\omega}$$

et integrari oportet hanc formulam

$$dt = \frac{D\,\mathfrak{y}\,d\mathfrak{y}}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon\cos\mathfrak{a}^2 - A\varepsilon\varepsilon + A\mathfrak{y}\mathfrak{y})(\varepsilon\varepsilon\cos\mathfrak{b}^2 + B\varepsilon\varepsilon - B\mathfrak{y}\mathfrak{y})(\varepsilon\varepsilon\cos\mathfrak{c}^2 - C\varepsilon\varepsilon + C\mathfrak{y}\mathfrak{y})}}.$$

Ad has formulas contrahendas, statuamus $\frac{\mathfrak{y}\mathfrak{y} - \varepsilon\varepsilon}{\varepsilon\varepsilon} = v$, ut fiat $\mathfrak{y} = \varepsilon\sqrt{(1+v)}$ atque

$$2\varepsilon dt = \frac{D\,dv}{\sqrt{(\cos\mathfrak{a}^2 + Av)(\cos\mathfrak{b}^2 - Bv)(\cos\mathfrak{c}^2 + Cv)}}$$

quae ita integrari debet, ut posito $t = 0$ fiat $v = 0$, tum vero erit

$$\cos\alpha = \frac{\varepsilon}{\mathfrak{y}}\sqrt{(\cos\mathfrak{a}^2 + Av)};\ \cos\beta = \frac{\varepsilon}{\mathfrak{y}}\sqrt{(\cos\mathfrak{b}^2 - Bv)};$$

$$\cos\gamma = \frac{\varepsilon}{\mathfrak{y}}\sqrt{(\cos\mathfrak{c}^2 + Cv)};$$

vel etiam:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{(\cos\mathfrak{a}^2 + Av)}}{\sqrt{(1+v)}};\ \cos\beta = \frac{\sqrt{(\cos\mathfrak{b}^2 - Bv)}}{\sqrt{(1+v)}};\ \cos\gamma = \frac{\sqrt{(\cos\mathfrak{c}^2 + Cv)}}{\sqrt{(1+v)}}.$$

Quodsi ergo ad datum tempus t valorem ipsius v assignare valuerimus, tam celeritatem angularem $\mathfrak{y} = \varepsilon\sqrt{(1+v)}$ quam positionem axis gyrationis IO respectu axium principalium cognoscemus.

COROLL. 1.

741. Si in statu initiali arcuum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, unus evanescat, reliqui erunt quadrantes, et axis gyrationis primus in aliquem axium principalium incidit, circa quem corpus constanter motu aequabili gyrari perget.

COROLL. 2.

742. Cum sit $\frac{d\mathfrak{y}}{\mathfrak{y}\mathfrak{y}} = \frac{dt\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}{D}$, et D sit quantitas positiva, patet, quamdiu polus gyrationis O in spatio ABC fuerit situs, seu cosinus arcuum α, β, γ positivi, celeritatem gyratoriam, quatenus in sensum ABC dirigitur, augeri.

COROLL. 3.

Fig. 94. 743. Sin autem polus gyrationis, productis quadrantibus in spatia αABb; βBCc; γCAa, quae sunt etiam quadrantes, cadat, celeritas minuetur:

Digitized by Google

nuetur ; augebitur autem in quadrantibus $\alpha A\alpha$, $\beta B\beta$, $\gamma C\gamma$, perinde atque in principali ABC.

SCHOLION. 1.

744. Haec probe notasse juvat , ne formula irrationali utentes ambiguitate signi decipiamur , quare si fuerint cosinus arcuum a , b , c positivi vel saltem eorum productum positivum , primo initio celeritas v crescit , ideoque v positivum consequitur valorem. Formula autem integranda ita est comparata , ut neque algebraice neque per arcus circulares vel logarithmos expediri queat , sed ejus integrale per quadraturas nobis concedi postulare cogimur. Tametsi enim per arcus sectionum conicarum negotium expediri potest , tamen inde nihil plane lucrari licet , ut praestare videatur, consueto more per quadrataras uti. Quodsi enim talis scribendi ratio $\Pi x\,(f)$ denotet arcum sectionis conicae , cujus semiparametur $= 1$ et semiaxis transversus $= f$, qui arcus a vertice captus respondeat abscissae $= x$; ita ut si $f > 0$; sectio conica sit ellipsis , si $f < 0$, hyperbola , et si $f = \infty$ parabola , nostra formula integranda $\int \frac{dv}{\gamma(a+Av)(b-Bv)(c+Cv)}$ ubi brevitatis ergo litteras a, b , c, pro $\cos a^2$, $\cos b^2$, $\cos c^2$ pono, ad partem algebraicam, arcum ellipticum, et arcum hyperbolicum reducitur. Erit enim

$$\int \frac{dv}{\gamma(a+Av)(b-Bv)(c+Cv)} = \text{Const} + \frac{2A\gamma(b-Bv)(c+Cv)}{(Ac-Ca)\gamma(a+Av)}$$
$$+ \frac{2}{\gamma A(Bc+Cb)}\,\Pi\,\frac{A(Bc+Cb)}{B(Ac-Ca)}\left(1-\gamma\frac{A(b-Bv)}{C}\right)\left(\frac{A(Bc+Cb)}{B(Ac-Ca)}\right)$$
$$- \frac{2}{\gamma C(Ba+Ab)}\,\Pi\,\frac{C(Ba+Ab)}{B(Ac-Ca)}\left(\gamma\frac{(Ba+Ab)(c+Cv)}{(Bc+Cb)(a+Av)}-1\right)$$
$$\left(\frac{-C(Ba+Ab)}{B(Ac-Ca)}\right)$$

ubi sumsi esse $Ac > Ca$, si enim secus eveniret, literas a, A, et c, C, inter se permutari deberent. Hinc autem certe nullam utilitatem ad calculum prosequendum adipiscimur, multo minus inde ad datum tempus t valorem ipsius v colligere licebit , in quo tamen cardo quaestionis versatur. Ceterum casus, quo $Ac = Ca$, hinc excluditur, qui autem ob hoc ipsum faciliorem evolutionem admittit, et quem propterea seorsim tractari operae erit pretium.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION. 2.

745. Casus hinc sponte excluduntur, quibus arcuum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ quidam evanescit, quoniam tum primo motus initio axis gyrationis in aliquem axium principalium incideret, ideoque idem perpetuo conservaretur. Quod etiam nostrae formulae declarant, nam si $\mathfrak{a} = 0$, et $\cos \mathfrak{a} = 1$, erit $\cos \mathfrak{b} = 0$ et $\cos \mathfrak{c} = 0$, unde formulae $\cos \mathfrak{G} = \frac{\Gamma - Bv}{\Gamma(1+v)}$ et $\cos \gamma = \frac{\Gamma Cv}{\Gamma(1+v)}$ subsistere nequeunt, nisi sit $v = 0$, et $\varkappa = \varepsilon$, ita ut sit $\cos \mathfrak{G} = 0$ et $\cos \gamma = 0$, ac polus gyrationis O constanter maneat in A. Idem evenit si $\mathfrak{c} = 0$, ubi polus gyrationis O constanter manet in C, et $\varkappa = \varepsilon$. Hoc autem minus apparet, si initio E fuerit in B, seu $\mathfrak{b} = 0$ et $\cos \mathfrak{a} = 0$ atque $\cos \mathfrak{c} = 0$; formulae enim dant

$$\cos \alpha = \frac{\Gamma Av}{\Gamma(1+v)}; \quad \cos \mathfrak{G} = \frac{\Gamma(1-Bv)}{\Gamma(1+v)}; \text{ et } \cos \gamma = \frac{\Gamma Cv}{\Gamma(1+v)}$$

ubi v videtur valorem positivum habere posse. At cum sit

$$2\varepsilon dt = \frac{Ddv}{v\Gamma AC(1-Bv)} = \frac{dv\Gamma B}{v\Gamma(1-Bv)}, \text{ ob } D = \Gamma ABC,$$

haec aequatio ita integrata, ut posito $v = 0$ fiat $t = 0$, dat

$$\frac{2\varepsilon t}{\Gamma B} = l\frac{1+1}{1-1} - l\frac{1+\Gamma(1-Bv)}{1-\Gamma(1-Bv)}$$

unde manifestum est, nonnisi elapso tempore infinito, hoc est nunquam, litteram v valorem nihilo majorem acquirere posse. Semper ergo polus gyrationis O puncto B manebit affixus, atque $\varkappa = \varepsilon$. Ceterum si arcuum $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, unicus tantum sit quadrans, primo initio celeritas angularis non mutatur ob $d\varkappa = 0$; deinceps vero res ita se habebit. Sit primo $\mathfrak{a} = 90°$, seu cadat punctum E in quadrantem BC, ut sit $\cos \mathfrak{c} = \sin \mathfrak{b}$, erit $\cos \alpha = \frac{\Gamma Av}{\Gamma(1+v)}$; $\cos \mathfrak{G} = \frac{\Gamma(\cos \mathfrak{b}^2 - Bv)}{\Gamma(1+v)}$; et $\cos \gamma = \frac{\Gamma(\sin \mathfrak{b}^2 + Cv)}{\Gamma(1+v)}$; unde patet v obtinere valorem positivum, foreque

$$2\varepsilon dt = \frac{Ddv}{\Gamma Av(\cos \mathfrak{b}^2 - Bv)(\sin \mathfrak{b}^2 + Cv)}.$$

Cum ergo sit $\cos \alpha > 0$ erit $\alpha < 90°$, et polus gyrationis a quadrante BC propius ad A accedet, fietque $\varkappa > \varepsilon$, idemque eveniet, si polus gyrationis fuerit in quadrante AB. At si polus gyrationis sit in quadrante AC, ob $\cos \mathfrak{b} = 0$, erit

cos

$$\cos\alpha = \frac{\Gamma(\cos\alpha^2 + Av)}{\Gamma(1+v)}; \cos\mathfrak{G} = \frac{\Gamma - Bv}{\Gamma(1+v)}; \cos\gamma = \frac{\Gamma(\cos\mathfrak{c}^2 + Cv)}{\Gamma(1+v)}$$

ac neceſſe eſt, ſit v quantitas negativa creſcens ſaltem ab initio. Sit ergo $v = -u$, et cum εdt poſitivum valorem habere debeat, capi oportet ΓBu negative, et fiet $\mathfrak{G} > 90°$, ideoque polus gyrationis magis a B recedet, et celeritas $\omega = \varepsilon\Gamma(1-a)$ minuetur.

SCHOLION. 3.

746. Praeterire hic non poſſum inſignem hujus motus proprietatem, quae in hoc conſiſtit, quod corporis vis viva perpetuo maneat eadem. Hic autem notari convenit, ſi corpus circa quempiam axem gyretur celeritate angulari $= \omega$, ſitque ejus momentum inertiae reſpectu hujus axis $= Mkk$, fore ejus vim vivam $= Mkk\,\omega\omega$. Hoc praemiſſo cum ſit noſtro caſu $Mkk = M(aa\cos\alpha^2 + bb\cos\mathfrak{G}^2 + cc\cos\gamma^2)$, tum vero $\omega\omega\cos\alpha^2 = \varepsilon\varepsilon(\cos\mathfrak{a}^2 + Av)$; $\omega\omega\cos\mathfrak{G}^2 = \varepsilon\varepsilon(\cos\mathfrak{b}^2 - Bv)$; $\omega\omega\cos\gamma^2 = \varepsilon\varepsilon(\cos\mathfrak{c}^2 + Cv)$; erit corporis circa axem IO celeritate angulari $= \omega$ gyrantis vis viva $= M\varepsilon\varepsilon(aa\cos\mathfrak{a}^2 + bb\cos\mathfrak{b}^2 + cc\cos\mathfrak{c}^2 + v(Aaa - Bbb + Ccc))$. Eſt vero $Aaa - Bbb + Ccc = 0$, ideoque vis viva non pendet ab v, et primae impreſſae ſemper manet aequalis. Quod autem in genere $Mkk\,\omega\omega$ exprimat corporis vim vivam, ſeu aggregatum omnium particularum per quadrata celeritatum multiplicatarum, evidens eſt, concipiatur enim elementum corporis dM ab axe gyrationis diſtans intervallo $= r$, eſt ejus celeritas $= \omega r$, ideoque ejus vis viva $= \omega\omega rrdM$: unde fit totius corporis vis viva $= \omega\omega\int rrdM = Mkk\,\omega\omega$ ob $\int rrdM = Mkk$.

PROBLEMA. 78.

747. Poſitis adhuc iisdem, ſi initio axis gyrationis ita fuerit comparatus, ut ſit $\cos\mathfrak{a}^2 : \cos\mathfrak{c}^2 = A : C = cc(bb - cc) : aa(aa - bb)$, ad quodvis tempus elapſum t poſitionem axis gyrationis reſpectu axium principalium definire.

SOLUTIO.

Ponamus $\cos\mathfrak{a}^2 = An$; ut ſit $\cos\mathfrak{c}^2 = Cn$, erit $\cos\mathfrak{b}^2 = 1 - (A+C)n = 1 - (1+B)n$: Hinc poſito $\omega = \varepsilon\Gamma(1+v)$ erit

$$\cos\alpha = \frac{\Gamma A(n+v)}{\Gamma(1+v)}; \cos\mathfrak{G} = \frac{\Gamma(1-n-Bn-Bv)}{\Gamma(1+v)}; \cos\gamma = \frac{\Gamma C(n+v)}{\Gamma(1+v)}$$

Digitized by Google

atque $2\mathfrak{s}dt = \frac{dv\,\Gamma B}{(n+v)\,\Gamma(1-n-Bn-Bv)}$ ob $D = ABC$.

Hic autem assumimus initio polum gyrationis E intra quadrantem ABC extitisse, ut cosinus tam arcuum a, b, c, quam saltem mox ab initio α, $\mathfrak{G}$, γ, sint positivi. Hinc igitur integrando adipiscimur.

$$2\mathfrak{s}t = \frac{\Gamma B^n}{\Gamma(1-n)}\, l\,\frac{\Gamma(1-n)+\Gamma(1-n-Bn)}{\Gamma(1-n)-\Gamma(1-n-Bn)} - \frac{\Gamma B}{\Gamma(1-n)}\, l\,\frac{\Gamma(1-n)+\Gamma(1-n-Bn-Bv)}{\Gamma(1-n)-\Gamma(1-n-Bn-Bv)}$$

Ponamus ad abbreviandum $\frac{\Gamma(1-n)}{\Gamma B} = \Gamma m$, ut fiat

$$2\mathfrak{s}t\,\Gamma m = l\,\frac{\Gamma m+\Gamma(m-n)}{\Gamma m-\Gamma(m-n)} - l\,\frac{\Gamma m+\Gamma(m-n-v)}{\Gamma m-\Gamma(m-n-v)}$$ et

sumto e pro numero, cujus logarithmus est $= 1$, statuatur $e^{2\mathfrak{s}t\,\Gamma m} = T$, fietque $\frac{\Gamma m+\Gamma(m-n-n)}{\Gamma m-\Gamma(m-n-v)}\,T = \frac{\Gamma m+\Gamma(m-n)}{\Gamma m-\Gamma(m-n)}$

unde porro colligitur,

$$\Gamma(m-n-v) = \frac{\Gamma m+\Gamma(m-n)-T(\Gamma m-\Gamma(m-n))}{\Gamma m+\Gamma(m-n)+T(\Gamma m-\Gamma(m-n))}\,\Gamma m$$

eritque $1-n = Bm$ et $cof\,b^2 = B(m-n)$ dum est $cof\,a^2 = An$ et $cof\,c^2 = Cn$; invento autem v est primo $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}\,\Gamma(1+v)$ et

$$cof\,\alpha = \frac{\Gamma A(n+v)}{\Gamma(1+v)};\quad cof\,\mathfrak{G} = \frac{\Gamma B(m-n-v)}{\Gamma(1+v)};\quad cof\,\gamma = \frac{\Gamma C(n+v)}{\Gamma(1+v)}.$$

Quo haec magis contrahamus sit $\frac{\Gamma m+\Gamma(m-n)}{\Gamma m-\Gamma(m-n)} = k$, unde fit $\Gamma(m-n) = \frac{k-1}{k+1}\Gamma m$, et $\Gamma(m-n-v) = \frac{k-T}{k+T}\Gamma m$, hincque porro $v = m\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 - m\left(\frac{k-T}{k+T}\right)^2$; et ob $n = m - m\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 = \frac{4mk}{(k+1)^2}$, erit $n+v = m - m\left(\frac{k-T}{k+T}\right)^2 = \frac{4mkT}{(k+T)^2}$.

Quocirca si pro motu primum impresso fuerit

$$cof\,a = \frac{2\Gamma Amk}{k+1};\quad cof\,b = \frac{(k-1)\Gamma Bm}{k+1};\quad cof\,c = \frac{2\Gamma Cmk}{k+1}$$

et

Digitized by Google

et celeritas angularis $= s$ in ſenſum ABC, erit elapſo tempore t, poſitoque $e^{2\varepsilon t \gamma m} = T$, primo celeritas angularis $\varsigma = \varepsilon\gamma\left(1 + m\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 - m\left(\frac{k-T}{k+T}\right)^2\right)$; deinde vero pro loco poli gyrationis

$$\text{cof } \alpha = \frac{2\varepsilon\gamma A m k T}{\varsigma(k+T)}; \text{ cof } \mathfrak{B} = \frac{\varepsilon(k-T)\gamma B m}{\varsigma(k+T)}; \text{ cof } \gamma = \frac{2\varepsilon\gamma C m k T}{\varsigma(k+T)},$$

tum vero eſt $dv = 2\varepsilon dt \cdot \frac{4mkT(k-T)\gamma m}{(k+T)^3}$.

Hinc patet, primo inſtanti, quo $T = 1$, numerum v a nihilo creſcere, donec fiat $T = k$, ſeu $2\varepsilon t\gamma m = lk$, hoc eſt elapſo tempore $t = \frac{lk}{2\varepsilon\gamma m}$; quo fit $\varsigma = \varepsilon\gamma\left(1 + m\left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2\right)$, et celeritas angularis maxima: ſimulque erit

$$\text{cof } \alpha = \frac{\varepsilon}{\varsigma}\gamma A m; \text{ cof } \mathfrak{B} = 0, \text{ ſeu } \mathfrak{B} = 90^\circ \text{ et cof } \gamma = \frac{\varepsilon}{\varsigma}\gamma C m$$

ita ut jam polus gyrationis pervenerit in arcum AC, eum mox transgreſſurus. Poſtea enim numerus v iterum minuetur, atque adeo evaneſcet ſi $\frac{T-k}{k+T} = \frac{k-1}{k+1}$, hoc eſt ſi $T = kk$, ideoque elapſo tempore $t = \frac{lk}{\varepsilon\gamma m}$, quod illius eſt duplum, hicque fit $\varsigma = \varepsilon$; $\text{cof } \alpha = \frac{2\gamma A m k}{k+1}$; $\text{cof } \mathfrak{B} = \frac{-(k-1)\gamma B m}{k+1}$; $\text{cof } \gamma = \frac{2\gamma C m k}{k+1}$. Hic ſcilicet ultra quadrantem AC ſimilem ſitum habebit reſpectu poli ipſi B oppoſiti, ad quem continuo propius accedet, eumque adeo elapſo tempore infinito attinget; poſito enim $t = \infty$ quo fit $T = \infty$, erit $\varsigma = \varepsilon\gamma\left(1 - \frac{4mk}{(k+1)^2}\right)$, hicque propterea celeritas angularis minima: tum

Digitized by Google

vero erit $\cos\alpha = 0$, $\cos\mathfrak{C} = -\frac{\varepsilon}{\varkappa}\gamma Bm$ et $\cos\gamma = 0$. At ob $1-n = 1-\frac{4mk}{(k+1)^2} = Bm$, evidens est esse $\cos\mathfrak{C} = -1$.

COROLL. 1.

748. Numerum n ita assumi oportet, ut An et Cn sint unitate minores; quo accepto erit $m = \frac{1-n}{B}$, et $k = \frac{\gamma m+\gamma(m-n)}{\gamma m-\gamma(m-n)}$. Inter numeros autem m et k haec relatio intercedit, ut sit $m = \frac{(k+1)^2}{4k+B(k+1)^2}$, unde fit $n = \frac{4k}{4k+B(k+1)^2}$ et $\cos\mathfrak{b} = \frac{(k-1)\gamma B}{\gamma(4k+B(k+1)^2)}$, quae semper est unitate minor ob $k > 1$.

COROLL. 2.

749. Eandem rationem inter cosinus arcuum $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{c}$ constitutam constanter servant cosinus arcuum α et γ: et dum polus O per quadrantem AC transit, ubi fit $\mathfrak{C} = 90°$ est $\cos\alpha = \frac{\varepsilon}{\varkappa}\cdot\frac{(k+1)\gamma A}{\gamma(4k+B(k+1)^2)}$ at $\varkappa = \varepsilon\gamma\left(1+\frac{(k-1)^2}{4k+B(k+1)^2}\right) = \frac{\varepsilon(k+1)\gamma(1+B)}{\gamma(4k+B(k+1)^2)}$, ergo $\cos\alpha = \gamma\frac{A}{1+B}$ et $\cos\gamma = \gamma\frac{C}{1+B}$, seu $\cos\alpha = \frac{c\gamma(bb-cc)}{\gamma(aa-cc)(aa-bb+cc)}$ et $\cos\gamma = \frac{a\gamma(aa-bb)}{\gamma(aa-cc)(aa-bb+cc)}$.

COROLL. 3.

750. Dum autem axis gyrationis O per quadrantem AC transit, ejus respectu est momentum inertiae $M(aa\cos\alpha^2+bb\cos\mathfrak{C}^2+cc\cos\gamma^2) = \frac{Maacc}{aa-bb+cc}$, quod minus est quam Mbb; atque etiam minus quam fuerat motus initio, ubi erat $= Mbb$. Bm ob $Aaa+Ccc = Bbb$. Erat ergo $= Mbb.\frac{B(k+1)^2}{4k+B(k+1)^2} = \frac{Maabbcc(k+1)^2}{4kbb(aa-bb+cc)+aacc(k-1)^2}$.

EXEM-

Digitized by Google

EXEMPLUM.

751, Coeperit corpus initio gyrari circa polum E in quadrante AC Fig. 95.
situm, in sensum ABC celeritate angulari $= s$, ita ut fuerit $cof\,AE = r^{\frac{A}{B+1}}$ et $cof\,CE = r^{\frac{C}{B+1}}$, posito brevitatis gratia

$$A = \frac{bbcc}{(aa-bb)(aa-cc)};\quad B = \frac{aacc}{(aa-bb)(bb-cc)};\quad C = \frac{aabb}{(aa-cc)(bb-cc)}$$

hincque $A + C = B + 1$; ad quem casum solutio generalis deducitur sumendo $k = 1$ et $m = \frac{1}{B+1}$. Iam labente tempore polus gyrationis ex E in alterum quadrantem AbC transibit, existente b polo ipsi B opposito: atque elapso tempore $= t$ min. sec. si capiatur $T = e^{2st:r(1+B)}$, polus gyrationis reperietur in O, ut sit

$$cof\,AO = \frac{2r^{AT}}{r^{(B(1+T)^2+4T}}, \text{ et } cof\,CO = \frac{2r^{CT}}{r^{(B(1+T)^2+4T)}}$$

ibique celeritas angularis erit $= \frac{s\,r^{(B(1+T)^2+4T)}}{(1+T)\,r^{(1+B)}}$.

Cum ergo fit

$$sf\,AO = \frac{r^{(B(T-1)^2+4CT)}}{r^{(B(1+T)^2+4T)}} \text{ et } sf\,CO = \frac{r^{(B(T-1)^2+4AT)}}{r^{(B(1+T)^2+4T)}}$$

erit $cof\,ACO = \frac{2r^{AT}}{r^{(B(T-1)^2+4AT)}}$ et $sf\,ACO = \frac{(T-1)\,r^{B}}{r^{(B(T-1)^2+4AT)}}$

atque $cof\,CAO = \frac{2r^{CT}}{r^{(B(T-1)^2+4CT)}}$ et $sf\,CAO = \frac{(T-1)\,r^{B}}{r^{(B(T-1)^2+4CT)}}$.

Porro est $cof\,bO = \frac{(T-1)\,r^{B}}{r^{(B(1+T)^2+4T)}}$ et $sf\,bO = \frac{2r^{(B+1)\,T}}{r^{(B(1+T)^2+4T)}}$

ideoque $cof\,AbO = r^{\frac{A}{B+1}}$ et $cof\,CbO = r^{\frac{C}{B+1}}$. Cum ergo sit A$b$O $=$ AE et CbO $=$ CE, polus gyrationis O ab E ad b per circulum maximum transfertur, atque dato tempore t percurrit arcum EO ut sit $tang\,EO = \frac{(T-1)\,r^{B}}{2r^{(B+1)\,T}}$. Posito ergo hoc arcu confecto $EO = \theta$, ob $tang\,\theta = \frac{(T-1)\,r^{B}}{2r^{(B+1)\,T}}$, fit $r^{T} = \frac{sf\theta\,r^{(B+1)} + r^{(B+sf\theta^2)}}{cof\theta\,r^{B}}$

unde ipsum tempus t, quo arcus $EO = \theta$ absolvitur, erit

$$t = \frac{r(B+1)}{\varepsilon}\, l \frac{\sin\theta . r(B+1) + r(B+\sin\theta^2)}{\cos\theta\, r B}$$

et celeritas angularis, dum polus gyrationis est in O, reperitur $= \frac{\varepsilon r B}{r(B+\sin\theta^2)}$. Momentum inertiae respectu axis IE est $= \frac{M(Aaa+Ccc)}{B+1}$ $= \frac{B}{B+1}$. Mbb, et vis viva $= \frac{B\varepsilon\varepsilon}{B+1}$. Mbb, quae perpetuo manet eadem.

SCHOLION.

752. Si initio motus gyratorius fuerit in sensum contrarium directus, polus gyrationis ex E per circulum maximum ad polum B accederet, scilicet in quadrante AbC poli cognomines contrarium sensum praebent, atque in quadrante ABC. Ceterum hoc casu notatu dignum est, quod polus gyrationis O ad alterutrum polorum B vel b continuo propius accedat, atque adeo satis cito attingat: statim enim ac numerus $T = e^{2\varepsilon t : r(1+B)}$ mediocriter fit magnus, quod plerumque mox evenire solet, declinatio axis gyrationis IO ab axe Bb non amplius erit sensibilis. Hic ergo circulus maximus BEb, qui quadrantem AC ita secat in E, ut $\sin$ AE $= r\frac{C}{B+1}$ et $\cos$ AE $= r\frac{A}{B+1}$ seu $\tang$ AE $= r\frac{C}{A} = \frac{ar(aa-bb)}{cr(bb-cc)}$, hac insigni praeditus est proprietate, ut si axis gyrationis semel in eo fuerit, in eo perseveret, ac polus gyrationis sive ad b sive ad B accedat, prout gyratio fiat vel in sensum ABC vel in contrarium. Videri hinc posset, axem gyrationis, quicunque initio fuerit, semper tandem in aliquem principalium incidere, *nisi in capite* praecedente res secus evenisset. Atque adeo jam demonstrabo, hunc casum tractatum solum esse, quo axis gyrationis tandem cum aliquo principalium eoque medio coalescat, in reliquis vero omnibus hoc nunquam, ne elapso quidem tempore infinito, usu venire: ad hoc autem necesse est, ut formulam superiorem integralem diligentius scrutemur, valoresque, quos ad quodvis tempus recipit, quodammodo assignare valeamus. In quo negotio, cum alia subsidia analytica vix plus luminis polliceantur, quam ejus reductio ad arcus sectionum conicarum, ad subsidium quoddam mechanicum confugiamus, motum scilicet penduli per circulum; quandoquidem hujus motus determinatio simili formula integrali

Digitized by Google

integrali continetur, hoc tamen non obstante, qualis hic motus sit futurus, quodammodo aestimare licet.

PROBLEMA 79.

753. Concessa motus determinatione, quo corpus grave super peripheria circuli vel oscillando vel revolvendo movetur, ad quodvis tempus determinare positionem axis gyrationis respectu axium principalium, si quidem initio datus fuerit axis gyrationis cum celeritate angulari.

SOLUTIO.

Cum tempus determinandum sit $t = \int \frac{dv\sqrt{ABC}}{2\varepsilon\sqrt{(a+Av)(b-Bv)(c+Cv)}}$ Fig. 96.

scribendo tantisper litteras a, b, c pro $cos\,a^2$, $cos\,b^2$, $cos\,c^2$, consideremus in genere motum gravis per circulum, cujus radius sit $ca = cb = r$, ubique celeritas tanta sit, ac si corpus ex puncto g eo esset delapsum. Ponatur ergo $cg = p$, tum vero initium motus capiatur in e, ut sit $cd = q$, existente scilicet recta gab vertigali et de horizontali. Elapso jam tempore t grave ex e perveniat in z, ut ducta horizontali vz, sit $dv = kv$, siquidem in nostra formula v est numerus absolutus. Sit tantisper $cv = z$, erit elementum arcus in $z = \frac{rdz}{\sqrt{(rr-zz)}}$, et quia celeritas in z est $= 2\sqrt{g(p+z)}$, fiet elementum temporis $dt = \frac{rdz}{2\sqrt{g(p+z)(r-z)(r+z)}}$. Ergo ob $z = kv - q$ habebitur

$$dt = \frac{krdv}{2\sqrt{g(p-q+kv)(r+q-kv)(r-q+kv)}}$$

nostra autem formula construenda simili modo expressa est:

$$dt = \frac{kdv\sqrt{k}}{2\varepsilon\sqrt{\left(\frac{ak}{A}+kv\right)\left(\frac{bk}{B}-kv\right)\left(\frac{ck}{C}+kv\right)}},$$

ad quam illa perducitur ponendo primum $\frac{kr}{2\sqrt{g}} = \frac{k\sqrt{k}}{2\varepsilon}$, unde fit $r = \frac{\sqrt{gk}}{\varepsilon}$. Deinde in denominatoribus factores medii aequati praebent $r + q = \frac{bk}{B}$, hincque $q = \frac{bk}{B} - \frac{\sqrt{gk}}{\varepsilon}$. Porro factores primi ac

tertii

Digitized by Google

tertii promiscue aequari possunt : si primus primo ac tertius tertio aequalis statuatur, fit

$$p - q = \frac{ak}{A} \text{ et } p = \frac{ak}{A} + \frac{bk}{B} - \frac{2rgk}{\varepsilon}$$

$$r - q = \frac{ck}{C}, \text{ seu } \frac{2rgk}{\varepsilon} - \frac{bk}{B} = \frac{ck}{C} \text{ vel } \frac{2rg}{\varepsilon} = \frac{(Bc+Cb)rk}{BC}$$

unde fit $rk = \frac{2BCrg}{\varepsilon(Bc+Cb)}$ et $k = \frac{4BBCCg}{\varepsilon\varepsilon(Bc+Cb)^2}$. Hinc porro $r = \frac{2BCg}{\varepsilon(Bc+Cb)}$, $q = \frac{2BC(Cb-Bc)g}{\varepsilon\varepsilon(Bc+Cb)^2}$; $p = \frac{4BBCCag+2ABC(Cb-Bc)g}{A\varepsilon\varepsilon(Bc+Cb)^2}$.

Ad datum ergo tempus t sequenti modo numerus v definitur : descripto circulo cujus radius $ca = cb = \frac{2BCg}{\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2 + C\cos b^2)}$ corpus grave per ejus peripheriam ita moveatur, ac si ex puncto g eo esset delapsum, existente $cg = \frac{4BBCC\cos a^2 + 2ABC(C\cos b^2 - B\cos c^2)}{A\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2 + C\cos b^2)^2} g$

seu $bg = \frac{4BCC(A\cos b^2 + B\cos a^2)}{A\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2 + C\cos b^2)^2} g$ et $ag = \frac{4BBC(C\cos a^2 - A\cos c^2)}{A\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2 + C\cos b^2)^2} g$

Tum in hoc circulo capiatur intervallum $cd = \frac{2BC(C\cos b^2 - B\cos c^2)}{\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2 + C\cos b^2)^2} g$ seu $bd = \frac{4BCCg\cos b^2}{\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2 + C\cos b^2)^2}$, sumtoque puncto e pro motus initio, unde corpus per z progrediatur, abscindatur arcus ez tempore proposito t percursus, huicque respondens altitudo dv sit $= u$, qua pro cognita assumta, erit $v = \frac{\varepsilon\varepsilon(B\cos c^2 + C\cos b^2)^2 u}{4BBCCg}$, unde deinceps pro superioribus problematibus colligitur celeritas angularis $\omega = \varepsilon r(1+v)$, et pro praesente poli gyrationis situ : $\cos\alpha = \frac{r(\cos a^2 + Av)}{r(1+v)}$; $\cos\beta = \frac{r'\cos b^2 - Bv)}{r(1+v)}$; $\cos\gamma = \frac{r(\cos c^2 + Cv)}{r(1+v)}$.

COROLL. 1.

754. Cum sit $dg = cg - cd = p - q = \frac{ak}{A}$, erit altitudo puncti

ti g supra horizontalem de nempe $dg = \frac{4BBCCg\,cos\,a^2}{AA\varepsilon(B\,cos\,c^2+C\,cos\,b^2)}$, quae cum sit necessario positiva, corpus motu suo ad punctum e pertingere potest.

COROLL. 2.

755. Tum vero altitudo bd non solum etiam est positiva, sed etiam minor diametro circuli $ab = \frac{4BCg}{\varepsilon(B\,cos\,c^2+C\,cos\,b^2)}$: erit enim $ad = \frac{4BBCg\,cos\,c^2}{\varepsilon(B\,cos\,c^2+C\,cos\,b^2)^2}$, unde punctum e, ex quo motus initium ducimus, semper certo in peripheria circuli reperitur.

COROLL. 3.

756. Cum igitur grave certo ex e ad imum punctum b descendat, ubi fit $u = bd = \frac{4BCCg\,cos\,b^2}{\varepsilon(B\,cos\,c^2+C\,cos\,b^2)^2}$, qui ejus est valor maximus positivus, hoc tempore erit $v = \frac{cos\,b^2}{B}$, et $\omega = \frac{\varepsilon\gamma(B+cos\,b^2)}{\gamma B}$, quae est celeritas angularis maxima, fietque tum $cos\,\zeta = 0$, hoc est, polus gyrationis per quadrantem AC transit.

SCHOLION.

757. Cum igitur polus gyrationis, ubicunque initio fuerit, semper post aliquod tempus transeat per quadrantem AC, ubi celeritas angularis est maxima, hoc tempus tanquam motus initium spectare licebit, quandoquidem hinc etiam ad tempora antecedentia regredi valemus. Fuerit igitur initio polus gyrationis in quadrantis puncto E, ut sit AE $= a$ et CE $= c = 90° - a$, atque celeritas angularis $= \varepsilon$ in sensum ABC. Postea ergo polus gyrationis in sphaerae octantem AbC transibit, cum ante versatus sit in octante ABC: ubi notandum est, contrarium esse eventurum, si motus gyratorius in sensum contrarium dirigeretur. Hic autem duo casus considerandi occurrunt, prout in motu circulari punctum g vel supra circulum cadit, graveque integras revolutiones absolvit, vel intra circulum, graveque oscillationes peragit. Prius evenit, si fuerit $C\,cos\,a^2 > A\,cos\,c^2$, posterius vero, si $C\,cos\,a^2 < A\,cos\,c^2$. Ad hos casus distinguendos capiatur in quadrante AC punctum Fig. 97.

ctum D, ut sit C *cos* AD² = A *cos* CD², seu *tang* AD = $\gamma \frac{C}{A}$, eritque D id punctum, per quod si polus gyrationis transeat, is per quadrantem D*b* polum principalem *b* versus accedat, eoque tandem elapso tempore infinito pertingat, quem casum jam ante evolvimus. Sin autem polus gyrationis per quadrantem AC intra terminos A et D transeat, habebitur casus prior, quo C *cos* $\alpha^2 >$ A *cos* γ^2; at si intra terminos C et D transeat, habebitur casus posterior, quo C *cos* $\alpha^2 <$ A *cos* γ^2. Hos igitur duos casus seorsim pertractemus.

CASUS I.

Fig. 97. 758. Transeat polus gyrationis per quadrantis AC punctum E, circa quem corpus celeritate angulari s in sensum ABC gyretur, ut sit C *cos* AE² > A *cos* CE² seu *tang* AE > $\gamma \frac{C}{A}$; unde elapso tempore t progrediatur in O, quem locum definiri oportet. Cum igitur sit AE = α, CE = $\gamma = 90° - \alpha$ et $\beta = 90°$, describatur circulus *azez'*, cujus radius $ca = ce = \frac{2Cg}{ss\cos\gamma^2}$, et in diametro verticali *ea* sursum producto capiatur $ag = \frac{4C(C\cos\alpha^2 - A\cos\gamma^2)}{Ass\cos\gamma^4} g$, graveque ex hoc puncto g delapsum per circulum revolvatur, in sensum *az'ez*, initioque, dum polus gyrationis erat in E, grave per punctum imum e transeat. Iam elapso tempore t grave ascendat ad z usque, sitque altitudo $ev = u$, eritque $v = -\frac{ssu\cos\gamma^4}{4CCg}$. Polus autem gyrationis nunc sit in O, et celeritas angularis circa eum erit $\omega = s\gamma\left(1 - \frac{ssu\cos\gamma^4}{4CCg}\right)$, et pro loco puncti O erit

$$\cos AO = \frac{s}{\omega}\gamma\left(\cos\alpha^2 - \frac{Ass u\cos\gamma^4}{4CCg}\right); \quad \cos bO = \frac{s}{\omega}\cdot\frac{s\cos\gamma^2\gamma Bu}{2Cg}$$

$$\text{et } \cos CO = \frac{s}{\omega}\gamma\left(\cos\gamma^2 - \frac{ssu\cos\gamma^4}{4Cg}\right).$$

Tum vero ex motu gravis per circulum isochrono motui poli gyrationis,

Digitized by Google

nis, si ponamus tempus dimidiae revolutionis $= \tau$, quo grave ex e ad punctum summum a ascendit, ob $u = \frac{4Cg}{\varepsilon\varepsilon \cos c^2}$, habebimus $v = -\frac{\cos c^2}{C}$, et post tempus τ erit celeritas angularis $\gamma = \varepsilon\tau\left(1 - \frac{\cos c^2}{C}\right)^*$, omnium minima: polus autem gyrationis tum erit in P, ut sit

$\cos AP = \frac{\varepsilon}{\gamma}\tau\left(\cos a^2 - \frac{A\cos c^2}{C}\right)$; $\cos bP = \frac{\varepsilon\cos c}{\kappa}\tau\frac{B}{C}$ et $\cos CP = 0$

unde polus P reperietur in quadrante Ab, ut sit $\cos bP = \sin AP = \frac{\cos c.\tau B}{\tau(C-\cos c^2)} = \frac{\sin a.\tau B}{\tau(C-\sin a^2)}$ et $\cos AP = \frac{\tau(C\cos a^2 - A\sin a^2)}{\tau(C-\sin a^2)}$. Elapso autem tempore 2τ, quo fit $u = 0$, celeritas angularis γ fit ut initio $= \varepsilon$, et polus gyrationis jam reperietur in quadrantis CA producti puncto e, ut sit $Ae = AE$. Elapso tempore 3τ perveniet polus gyrationis in p, ut sit $Ap = AP$ ac tempore 4τ elapso revertetur in E. Polus ergo gyrationis circa polum principalem A orbitam quasi ellipticam describet, et tempus unius revolutionis aequale erit tempori, quo grave in circulo duas integras absolvit revolutiones. Hic notari convenit, si punctum E in D incideret, punctum P in b esse casurum ob $\cos AP = 0$, tum autem foret $ag = 0$, et tempus semirevolutionis in circulo τ fieret infinitum, quemadmodum jam supra habuimus. Porro autem fit $AP = AE$, si $B = \infty$, et $C = \infty$ seu $bb = cc$, hoc est, si momenta inertiae respectu axium IB et IC sunt aequalia, qui est casus capite praecedente pertractatus.

CASUS II.

759. Transeat polus gyrationis per quadrantis AC punctum E, circa quem tum corpus celeritate angulari ε in sensum ABC gyretur, ut sit $C\cos AE^2 < A\cos CE^2$ seu $\tang AE > \tau\frac{C}{A}$, unde elapso tempore t progrediatur in O. Cum igitur sit $b = 90°$, $AE = a$ et $CE = 90° - a = c$, describatur circulus $azez'$ diametro $ae = \frac{4Cg}{\varepsilon\varepsilon\cos c^2}$, et capiatur $ag = \frac{4C(A\cos c^2 - C\cos a^2)}{AA\varepsilon\varepsilon\cos c^4}g$, ut sit $eg = \frac{4CC\cos a^2}{AA\varepsilon\varepsilon\cos c^4}g$. Ducta igitur horizontali fgf', grave peragat oscillationes per arcum fef', sumaturque temporis punctum, quo grave ex f' descendens transit per imum punctum e, pro temporis initio, unde elapso tempore t perveniat Fig. 98.

in z, et posita altitudine $ev = u$, erit $v = \frac{-\varepsilon\varepsilon u \cos c^4}{4CCg}$, hocque tempore celeritas angularis circa polum O erit $\gamma = \varepsilon\Gamma\left(1 - \frac{\varepsilon\varepsilon u \cos c^4}{4CCg}\right)$, et ut ante

$$\cos AO = \frac{\varepsilon}{\gamma}\Gamma\left(\cos a^2 - \frac{A\varepsilon\varepsilon u \cos c^4}{4CCg}\right); \quad \cos bO = \frac{\varepsilon}{\gamma}\cdot\frac{\varepsilon \cos c^2 \Gamma Bu}{2C\Gamma g}$$

et $\cos CO = \frac{\varepsilon}{\gamma}\Gamma\left(\cos c^2 - \frac{\varepsilon\varepsilon u \cos c^4}{4Cg}\right)$. Sit τ tempus dimidiae oscillationis seu ascensus per ef, atque hoc tempore elapso, ob $u = eg = \frac{4CC\cos a^2}{A\varepsilon\varepsilon\cos c^4} g$ et $v = \frac{-\cos a^2}{A}$, erit celeritas angularis $\gamma = \varepsilon\Gamma\left(1 - \frac{\cos a^2}{A}\right)$, polusque gyrationis reperitur in P, ut sit

$$\cos AP = \frac{\varepsilon}{\gamma}\cdot 0; \quad \cos bP = \frac{\varepsilon\cos a\Gamma B}{\gamma\Gamma A} = \frac{\cos a.\Gamma B}{\Gamma(A - \cos a^2)} \text{ et}$$

$$\cos CP = \frac{\varepsilon}{\gamma}\Gamma\left(\cos c^2 - \frac{C\cos a^2}{A}\right) = \frac{\Gamma(A\cos c^2 - C\cos a^2)}{\Gamma(A - \cos a^2)}$$

unde patet polum gyrationis esse in quadrante Cb, existente $\beta CP = \frac{\cos a\Gamma B}{\Gamma(A-\cos a^2)} = \frac{\beta c.\Gamma B}{\Gamma(A-\beta c^2)}$. Capiatur nunc in quadrante AC producto $Ce = CE$ et $Cp = CP$, eritque orbis ellipticus EP ep E via poli gyrationis, cujus singuli quadrantes EP, Pe, ep, pE, &c. tempore τ absolvuntur.

Si esset $aa = bb$, foret $A = \infty$, $B = \infty$ et $CP = CE$, polusque gyrationis circulum minorem circa axem principalem IC, qui esset singularis, describeret; qui est casus capite praecedente tractatus. At si E in D caderet, ob $ag = 0$, foret $\tau = \infty$, qui est casus problematis praecedentis.

SCHOLION.

760. Cum igitur satis clare intelligamus, quomodo variatio in polo gyrationis eveniat, cum is vel circa polum principalem A vel circa C circumferatur, in orbita quasi elliptica, prout fuerit vel *tang* AE $>$ Γ

Digitized by Google

$r\frac{C}{A}$ vel *tang* AE $> r\frac{C}{A}$, atque adeo ejus locum ad quodvis tempus conceſſa integratione formulae differentialis aſſignare liceat; videamus, num etiam ejus locum abſolutum ad quodvis tempus ſimulque poſitionem axium principalium definire valeamus. Equidem non ſine ſucceſſu hoc negotium in ſuperiore capite expedivimus. Verum hic multo majores difficultates offendemus, quas ne conceſſis quidem quadraturis ſuperare poterimus, cum res ad ejusmodi aequationes differentiales reducatur, quae non ſolum non integrari, ſed ne ad ſeparabilitatem quidem variabilium revocari queant.

PROBLEMA. 80.

761. Si corpori rigido cuicunque initio impreſſus fuerit motus gyratorius circa axem per centrum inertiae tranſeuntem quemcunque, ad datum tempus tam ſitum axium principalium quam axis gyrationis reſpectu ſpatii abſoluti definire. Fig. 89.

SOLUTIO.

In ſphaera immobili centro inertiae corporis deſcripta, poſt tempus $= t$ corpus nunc ſitum teneat, ut axium principalium poli ſint in A, B, C, eorumque reſpectu momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc. Tum ſumto puncto Z et circulo XZ fixo, ſtatuantur arcus ZA $= l$, ZB $= m$, ZC $= n$, atque anguli XZA $= \lambda$, XZB $= \mu$, XZC $= \nu$: manentibus pro polo gyrationis O arcubus OA $= \alpha$, OB $= \zeta$, OC $= \gamma$, qui cum celeritate angulari ω nunc per tempus t dantur. His poſitis ex probl. 68. nanciſcimur:

$$dl\,ſi\,l = \omega dt\,(cof\,\zeta\,cof\,n - cof\,\gamma\,cof\,m);\quad d\lambda\,ſi\,l^2 = -\omega dt\,(cof\,\zeta\,cof\,m + cof\,\gamma\,cof\,n)$$

$$dm\,ſi\,m = \omega dt\,(cof\,\gamma\,cof\,l - cof\,\alpha\,cof\,n);\quad d\mu\,ſi\,m^2 = -\omega dt\,(cof\,\gamma\,cof\,n + cof\,\alpha\,cof\,l)$$

$$dn\,ſi\,n = \omega dt\,(cof\,\alpha\,cof\,m - cof\,\zeta\,cof\,l);\quad d\nu\,ſi\,n^2 = -\omega dt\,(cof\,\alpha\,cof\,l + cof\,\zeta\,cof\,m).$$

Praecipuum autem opus hic in inveſtigatione arcuum l, m, n conſiſtit, qui cum ita ſint comparati, ut ſit $cof\,l^2 + cof\,m^2 + cof\,n^2 = 1$, ponatur: $cof\,m = ſi\,l\,cof\,\varphi$ erit $cof\,n = ſi\,l\,ſi\,\varphi$, eruntque tres aequationes:

I. $dl = \omega dt\,(cof\,\zeta\,ſi\,\varphi - cof\,\gamma\,cof\,\varphi)$

II. $-dl\,cof\,l\,cof\,\varphi + d\varphi\,ſ\,l\,ſi\,\varphi = \omega dt\,(cof\,\gamma\,cof\,l - cof\,\alpha\,ſ\,l\,ſi\,\varphi)$

III. $-dl\,cof\,l\,ſi\,\varphi - d\varphi\,ſ\,l\,cof\,\varphi = \omega dt\,(cof\,\alpha\,ſi\,l\,cof\,\varphi - cof\,\zeta\,cof\,l)$

unde II. $ſi\,\varphi$ — III. $cof\,\varphi$ praebet:

Digitized by Google

$$d\varphi\, \mathrm{si}\, l = \mathfrak{z}dt\,(\mathrm{cos}\,\gamma\, \mathrm{cos}\, l\, \mathrm{si}\,\varphi - \mathrm{cos}\,\alpha\, \mathrm{si}\, l + \mathrm{cos}\,\beta\, \mathrm{cos}\, l\, \mathrm{cos}\,\varphi)$$

ex qua cum prima conjuncta binos arcus l et φ quaeri oportet. Posito autem $\mathfrak{z} = \varepsilon\sqrt{(1+v)}$ et pro statu initiali brevitatis gratia $\mathrm{cos}\,\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{A}$, $\mathrm{cos}\,\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{B}$; $\mathrm{cos}\,\mathfrak{c}^2 = \mathfrak{C}$, ut sit $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 1$, vidimus esse

$$\mathrm{cos}\,\alpha = \sqrt{\frac{\mathfrak{A}+Av}{1+v}};\ \mathrm{cos}\,\beta = \sqrt{\frac{\mathfrak{B}-Bv}{1+v}};\ \mathrm{cos}\,\gamma = \sqrt{\frac{\mathfrak{C}+Cv}{1+v}}$$

et $2\varepsilon dt = \dfrac{dv\sqrt{ABC}}{\sqrt{(\mathfrak{A}+Av)(\mathfrak{B}-Bv)(\mathfrak{C}+Cv)}}$, positis

$$A = \frac{bbcc}{(aa-bb)(aa-cc)};\quad B = \frac{aacc}{(aa-bb)(bb-cc)};\quad C = \frac{aabb}{(aa-cc)(bb-cc)} \text{ et } D = \frac{aabbcc}{(aa-bb)(aa-cc)(bb-cc)}$$

ubi quidem sumimus esse $aa > bb$ et $bb > cc$.

Ponamus $\mathrm{cos}\,\beta = \mathrm{si}\,\alpha\, \mathrm{cos}\, T$ et $\mathrm{cos}\,\gamma = \mathrm{si}\,\alpha\, \mathrm{si}\, T$, fietque $v = \dfrac{\mathfrak{B} - (1-\mathfrak{A})\mathrm{cos}\, T^2}{B + (1-A)\mathrm{cos}\, T^2}$. et $\mathrm{cos}\,\alpha = \sqrt{\dfrac{\mathfrak{A}B + \mathfrak{B}A + (\mathfrak{A}-A)\mathrm{cos}\, T^2}{\mathfrak{B} + B + (\mathfrak{A}-A)\mathrm{cos}\, T^2}}$, ergo

$$\mathrm{si}\,\alpha = \sqrt{\frac{\mathfrak{B}C + \mathfrak{C}B}{\mathfrak{B}+B+(\mathfrak{A}-A)\mathrm{cos}\, T^2}} \text{ atque } \mathfrak{z} = \varepsilon\sqrt{\frac{\mathfrak{B}+B+(\mathfrak{A}-A)\mathrm{cos}\, T^2}{B+(1-A)\mathrm{cos}\, T^2}}$$

tum vero

$$\varepsilon dt = \frac{DdT}{\sqrt{(B\mathrm{si}\, T^2 + C\mathrm{cos}\, T^2)((\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}A)\mathrm{si}\, T^2 + (\mathfrak{A}C - \mathfrak{C}A)\mathrm{cos}\, T^2)}}.$$

Unde nostrae aequationes resolvendae erunt;

$$dl = \mathfrak{z}dt\, \mathrm{si}\,\alpha\, \mathrm{si}\,(\varphi - T)$$

$$d\varphi\, \mathrm{si}\, l = \mathfrak{z}dt\, \mathrm{si}\,\alpha\, \mathrm{cos}\, l\, \mathrm{cos}\,(\varphi - T) - \mathfrak{z}dt\, \mathrm{cos}\,\alpha\, \mathrm{si}\, l$$

ubi est

$$\mathfrak{z}dt\, \mathrm{si}\,\alpha = \frac{DdT\sqrt{(\mathfrak{B}C+\mathfrak{C}B)}}{(B\mathrm{si}\, T^2 + C\mathrm{cos}\, T^2)\sqrt{((\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}A)\mathrm{si}\, T^2 + (\mathfrak{A}C-\mathfrak{C}A)\mathrm{cos}\, T^2)}}$$

$$\mathfrak{z}dt\, \mathrm{cos}\,\alpha = \frac{DdT}{B\mathrm{si}\, T^2 + C\mathrm{cos}\, T^2}.$$

Statuamus nunc $\varphi - T = \omega$, ut habeatur

$$dl = \mathfrak{z}dt\, \mathrm{si}\,\alpha\, \mathrm{si}\,\omega \text{ et } d\omega\, \mathrm{si}\, l + dT\, \mathrm{si}\, l = \mathfrak{z}dt\, \mathrm{si}\,\alpha\, \mathrm{cos}\, l\, \mathrm{cos}\,\omega - \mathfrak{z}dt\, \mathrm{cos}\,\alpha\, \mathrm{si}\, l$$

quarum posterior abit in

$$d\omega\, \mathrm{si}\, l\, \mathrm{si}\,\omega - dl\, \mathrm{cos}\, l\, \mathrm{cos}\,\omega + dT\, \mathrm{si}\, l\, \mathrm{si}\,\omega + \frac{DdT\, \mathrm{si}\, l\, \mathrm{si}\,\omega}{B\mathrm{si}\, T^2 + C\mathrm{cos}\, T^2} = 0$$

dum prior est

dl

$$dl = \frac{D\,dT\,\mathfrak{si}\,\omega.\sqrt{(\mathfrak{B}C+\mathfrak{C}B)}}{(B\,\mathfrak{si}\,T^2+C\,\mathfrak{cos}\,T^2)\sqrt{((\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}A)\,\mathfrak{si}\,T^2+(\mathfrak{A}C-\mathfrak{C}A)\,\mathfrak{cos}\,T^2)}}.$$

Ponamus brevitatis gratia:

$$1+\frac{D}{B\,\mathfrak{si}\,T^2+C\,\mathfrak{cos}\,T^2} = P \text{ et}$$

$$\frac{D\sqrt{(\mathfrak{B}C+\mathfrak{C}B}}{(B\,\mathfrak{si}\,T^2+C\,\mathfrak{cos}\,T^2)\sqrt{((\mathfrak{A}B+\mathfrak{B}A)\,\mathfrak{si}\,T^2+(\mathfrak{A}C-\mathfrak{C}A)\,\mathfrak{cos}\,T^2)}} = Q$$

quoniam P et Q sunt functiones cognitae ipsius T, nostrae aequationes resolvendae has induunt formas simpliciores.

$$d.\,\mathfrak{si}\,l\,\mathfrak{cos}\,\omega = P\,dT\,\mathfrak{si}\,l\,\mathfrak{si}\,\omega \text{ et } dl = Q\,dT\,\mathfrak{si}\,\omega$$

Ponamus denique $\mathfrak{si}\,l\,\mathfrak{cos}\,\omega = x$, et $\mathfrak{cos}\,l = y$, erit $\mathfrak{si}\,l\,\mathfrak{si}\,\omega = \sqrt{(1-xx-yy)}$ et nostrae aequationes erunt

$$\frac{dx}{\sqrt{(1-xx-yy)}} = P\,dT \text{ et } \frac{dy}{\sqrt{(1-xx-yy)}} = -Q\,dT.$$

Verum hic fateri cogor, ulterius me hanc resolutionem prosequi non posse; neque ergo hoc problema ad finem perducere licet. *)

SCHOLION. 1.

762. Casu praecedentis capitis, quo erat $B = \infty$ et $C = \infty$ atque adeo $\frac{B}{C} = 1$, ob $A - B + C = 1$, aequationes inventas ideo resolvere licuit, quod quantitates P et Q fiebant constantes, scilicet $P = 1 + \frac{D}{B} = 1 + \frac{bb}{aa-bb} = \frac{aa}{aa-bb}$, ob $bb = cc$ et $Q = \frac{D\sqrt{(\mathfrak{B}+\mathfrak{C})}}{B\sqrt{\mathfrak{A}}} = \frac{bb\sqrt{(1-\mathfrak{A})}}{(aa-bb)\sqrt{\mathfrak{A}}}$, unde $dx : dy = aa : -bb\sqrt{\frac{1-\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}}} = P : -Q$. Ergo $dx = -\frac{P\,dy}{Q}$ et $x = \text{Const.} - \frac{Py}{Q}$. Verum hic ratio P : Q constans evadere nequit, ideoque non liquet, quomodo aequationibus inventis satisfieri queat, ne quidem particulariter. Quare cum talium corporum motus calculo sit intractabilis, quousque scilicet fines analyseos adhuc patent, hoc argumentum deserere cogimur, cum etiam conatus irritos proposuisse nihil luminis affere queat. Quod autem ad rationem mechanicam attinet, motum corporum rigidorum liberum, dum a nullis viribus sollicitantur, perfecte determinasse censendi sumus, cum

*) Plena solutio in fine adjicietur.

cum Analyseos defectui sit tribuendum, quod solutionem ad finem perducere non valuerimus. Haec autem difficultas se tantum in corporibus, quorum tria momenta inertiae principalia sunt inter se inaequalia, exerit; quae corpora cum sint pro maxime irregularibus habenda, hoc incommodum, ubi ad praxin descendimus, minus obest, quoniam rarissime ejusmodi corporum motus requiri solet. Quando autem duo momenta principalia sunt inter se aequalia, investigatio motus prospero successu est absoluta, ut nihil desiderari queat.

SCHOLION. 2.

763. Expositis ergo, quae ad motum corporum rigidorum liberum, remotis viribus externis, pertinent, ordo postulat, ut jam in effectum virium inquiramus, ad quod etiam supra fundamenta sunt jacta, ubi quarumvis virium effectus momentaneos determinavimus. Dum autem motus perennes tractare instituimus, ejusmodi casus eligere debemus, quibus vires sollicitantes non per corporis centrum inertiae transeunt, quales Astronomia offert. Quoniam autem eorum evolutio majorem Astronomiae cognitionem requirit, quam hic supponere licet, in terra subsistamus, atque ejusmodi motus contemplemur, in quibus motus gyratorius circa axem variabilem occurrat, quandoquidem motus magis regulares nihil habent difficultatis. Hic primum se nobis offert Theoria turbinum, cujus explicatio ob continuam axis gyrationis mutationem adhuc maximis tenebris fuit involuta. Quod argumentum ut initio a gravioribus difficultatibus liberem, axem turbinis super plano horizontali politissimo incedere assumam, ne frictioni ullus locus relinquatur, tum vero axem infra in cuspidem desinentem statuam, qua super plano horizontali ingrediatur. Duo autem genera turbinum constituam, prout vel omnia ejus momenta inertiae principalia fuerint inter se aequalia, vel duo duntaxat: si enim omnia essent inaequalia, haec hypothesis non solum figurae turbinum adversaretur, sed etiam vires calculi superaret.

CAPUT

Digitized by Google

CAPUT XIV.

DE MOTU TURBINUM SUPER PLANO HORIZONTALI, IN QUIBUS OMNIA MOMENTA INERTIAE SUNT INTER SE AEQUALIA.

DEFINITIO. 13.

764. *Turbo* est corpus rigidum hasta inferius acuminata per centrum inertiae trajectum, quae simul cum axe aliquo principali corporis conveniat.

EXPLICATIO.

765. Hujusmodi turbo est AB*b*D, in quo AD hastam, et B*b* corpus trajectum refert, ut hasta cum corpore unum corpus rigidum constituere sit censenda: ubi quidem hasta non solum per totius corporis centrum inertiae I transit, sed etiam axem principalem corporis exhibet. Hastam quidem infra in D in cuspidem acutissimam desinere assumo, qua turbo constanter plano horizontali insistat, et super eo incedat; hic enim alios motus non prosequor, nisi quamdiu turbo sola cuspide D planum horizontale contingit. Statim enim ac turbo procumbit, ejus motus ad aliud genus est referendus, quod cum turbini non amplius sit proprium, hic non attingo. Id ergo hic assumo, rectam a cuspide D per centrum inertiae I ductam simul esse corporis totius ex hasta et massa B*b* constantis axem principalem, quae sola linea in computum ingredietur, cum praeterea nihil intersit, quomodo hasta cum massa reliqua sit conjuncta. Tum vero in hoc capite totum turbinis corpus ita comparatum assumo, ut momenta inertiae respectu ejus axium principalium sint inter se aequalia, ideoque omnes rectae per ejus centrum inertiae I ductae pro axibus principalibus haberi queant. Planum denique hic laevigatissimum assumo, ut cuspis D super eo sine ulla frictione incedere possit, ubi etiam mentem ab aeris resistentia, omnibusque motus obstaculis abstraho, ad solam vim gravitatis respiciens. Tabula XIV. Fig. 99.

SCHOLION.

766. De tali ergo turbine primum observo, si cuspide sua D plano horizontali ita insistat, ut recta DI sit verticalis, eum in hoc situ con-

Digitized by Google

ſtanter perſeverare poſſe, etiamſi vel minimum inclinatus procidat. Tum vero etiam, quia nulla adeſt frictio, in hoc ſitu verticali uniformiter in directum progredi poterit, quamquam experientia nunquam propter frictionem conſentiet. Deinde quia recta DIA eſt axis principalis, ſi ea fuerit verticalis, corpusque circa eam motum gyratorium quemcunque acceperit, hunc perpetuo uniformem conſervabit, manente recta DIA immota ideoque verticali: neque hic gravitas quicquam turbabit in motu, ſed tota ad turbinem in cuſpide D ad planum horizontale apprimendum impendetur. Statim autem atque hic axis AD vel minimum inclinari coeperit, gravitas motum turbabit, turbinemque ſubvertere tendet; ad quem effectum explorandum ſimul ad vim, qua cuſpis D plano horizontali apprimitur, reſpici oportet. Quanquam autem haec vis eſt ignota, atque ab omnibus motus circumſtantiis pendet, tamen certum eſt, ejus directionem ſemper eſſe verticalem, ab eaque eundem effectum oriri, ac ſi turbo in puncto D verticaliter ſurſum a pari vi pelleretur: ipſa vero vis ſemper tanta eſſe debet, ut cuſpis D perpetuo plano horizontali maneat applicata, ex qua conditione ejus quantitas ad quodvis tempus eſt elicienda. Sin autem haec vis ut cognita ſpectetur, motus centri inertiae I turbinis, nullo reſpectu ad ejus motum gyratorium habito, definiri poterit, id quod in ſequente problemate expediamus.

PROBLEMA. 81.

767. Si ad quodvis tempus cognita fuerit preſſio cuſpidis in planum horizontale, determinare motum centri inertiae turbinis.

SOLUTIO.

Fig. 100. Ad datum tempus elapſum $= t$, teneat axis turbinis AID ſitum quemcunque inclinatum, faciens cum horizontali DF angulum $FDA = \theta$: ubi cuſpis premat planum horizontale vi $= P$: quod idem eſt, ac ſi cuſpis D ſollicitaretur ſurſum ſecundum directionem verticalem vi $DP = P$; maſſa autem idemque pondus totius turbinis ſit $= M$. Iam quia tantum motum centri inertiae I quaerimus, ſine ullo reſpectu ad motum gyratorium habito, ejus motus perinde afficietur, ac ſi tota turbinis maſſa M in puncto I collecta, eique vires ſollicitantes ſecundum ſuam quaequae directionem applicatae eſſent. Habebimus igitur in I maſſam $= M$, ſollicitatam a duabus viribus, altera gravitate $= M$ verticaliter ſecundum IX deorſum, altera vi $= P$ verticaliter ſurſum ſecundum IQ; ex quibus vis deorſum ſecundum IX ſollicitans exoritur $= M - P$. Cum ergo nulla adſit vis horizontaliter

Digitized by Google

liter urgens, nisi centrum inertiae I initio acceperit motum horizontalem, tantum vel sursum vel deorsum in recta verticali XQ feretur: sin autem initio acceperit motum horizontalem, eundem praeterea intemeratum conservabit. Ponamus ergo distantiam $DI = f$, erit altitudo $IX = f \sin \theta$, unde centri inertiae I celeritas sursum vergens erit $= \frac{f d\theta \cos\theta}{dt}$, sumtoque elemento temporis dt constante, ob vim sollicitantem deorsum $= M - P$, habebimus $\frac{f(dd\theta \cos\theta - d\theta^2 \sin\theta)}{dt} = \frac{-2g(M-P)dt}{M}$ seu $dd\theta \cos\theta - d\theta^2 \sin\theta = \frac{2g}{f}\left(\frac{P}{M} - 1\right)dt^2$. Quare si vis P ad quodvis tempus t fuerit data, erit integrando:

$$d\theta \cos\theta = \frac{2g}{f} dt \int dt \left(\frac{P}{M} - 1\right) \text{ et } \sin\theta = \frac{2g}{f} \int dt \int dt \left(\frac{P}{M} - 1\right),$$

ubi $f \sin\theta = 2g \int dt \int dt \left(\frac{P}{M} - 1\right)$ altitudinem IX centri inertiae et $\frac{f d\theta \cos\theta}{dt} = 2g \int dt \left(\frac{P}{M} - 1\right)$ celeritatem ejus sursum directam exprimit.

COROLL. 1.

768. Si ergo ad quodvis tempus nossemus pressionem P, qua axis turbinis plano horizontali innititur, motum centri inertiae seu ejus locum ad quodvis tempus assignare, indeque inclinationem axis ad horizontem seu angulum $FDA = \theta$ definire possemus.

COROLL. 2.

769. Si turbini initio solus motus gyratorius imprimatur, ut centrum inertiae I manserit in quiete per punctum saltem temporis, tum deinceps quomodocunque axis gyrationis varietur, indeque axis turbinis AD inclinetur, centrum inertiae alium motum non recipiet, nisi verticaliter vel sursum vel deorsum directum.

COROLL. 3.

770. Sin autem turbini simul motus progressivus fuerit impressus, motum horizontalem inde ortum constanter conservabit uniformem, et in directum progredientem, quocum motus prior verticalis erit conjunctus.

Digitized by Google

SCHOLION.

771. Motus ergo centri inertiae in turbine nulla laborat difficultate, si modo pressio cuspidis D in planum horizontale ad quodvis tempus assignari posset. Verum in hoc ipso summa sita est difficultas, cum ab hac pressione oriatur momentum ad turbinem circa quempiam axem convertendum tendens, ex quo nisi turbo jam circa hunc ipsum axem gyretur, axis gyrationis variabitur, unde etiam turbinis inclinatio ad horizontem mutationem patietur. Ista vero inclinationis mutatio convenire debet cum ea, quam pressio P assumta producit, atque ex hac convenientia ipsa haec pressio determinari debet, in qua investigatione vis universae Theoriae turbinum est constituenda; Quo igitur facilius ad hunc scopum pertingamus, turbinem in situ quocunque inclinato et circa axem per centrum inertiae ductum gyrantem consideremus, atque inquiramus, quantam mutationem tam axis gyrationis, quam celeritas angularis a pressione, qua cuspis plano horizontali insistit, sit passura.

PROBLEMA. 82.

772. Dum turbo utcunque gyratur, si detur pressio, qua cuspis plano horizontali innititur, determinare variationem momentaneam, tam in axe gyrationis, quam celeritate angulari productam.

SOLUTIO.

Fig. 100. Sit inclinatio turbinis ad horizontem seu angulus FDA $= \theta$ et pressio in D $= P$, qua punctum D sursum urgetur. Quoniam in corpore omnia momenta inertiae sunt aequalia, haec vis DP $= P$ tendet turbinem, si quiesceret, convertere circa axem per centrum inertiae I transeuntem et ad planum ADF normalem. Quare posito momento inertiae turbinis circa omnes axes $= Maa$, et distantia $ID = f$, erit momentum vis DP respectu illius axis $= P f \cos\theta$; ideoque temusculo dt turbo circa illum axem vertetur per angulum elementarem $d\omega = \frac{Pfg\,dt^2\cos\theta}{Maa}$. Cum autem turbo jam habeat motum gyratorium, iterum omnia ad superficiem sphaericam centro inertiae corporis descriptam referamus, in qua sit punctum Z quasi zenith, et A superior terminus axis turbinis, erit arcus ZA $= 90° - \theta$, quem supra vocavimus $= l$; nunc autem ejusmodi teneat situm turbo, ut alii bini axes in eo fixi et ad AID normales sint in B et D. Etsi enim hic omnium axium par est ratio, tamen in corpore ternos axes inter se normales concipi con-

Digitized by Google

convenit, ut ex iis situs turbinis definiatur. Erunt ergo AB, AC, BC quadrantes, ponaturque angulus $ZAB = \zeta$: tum vero turbo jam gyretur circa axem IO celeritate angulari $= \varkappa$ in sensum ABC, vocenturque arcus $AO = \alpha$, $BO = \mathfrak{C}$ et $CO = \gamma$, ut sit $cof\, BAO = \frac{cof\,\mathfrak{C}}{fi\,\alpha}$ et $fin\, BAO = \frac{cof\,\gamma}{fi\,\alpha}$. Ducatur nunc quadrans AS ad arcum ZA normalis, erit IS axis ille ad planum verticale, In quo axis turbinis AID versatur, normalis, circa quem a vi P generatur conversio per angulum $d\omega = \frac{P f g\, dt^2\, cof\,\theta}{M a a}$ in sensum BAC illi sensui ABC contrarium: quae mutatio nisi accederet, turbo circa axem IO, quia principalis proprietate gaudet, gyrari pergeret. Ob illam igitur vim jam gyrari incipiet circa polum o in arcu OS ultra O situm. Quare si in figura hoc punctum o versus S notetur, posito arcu $OS = s$, et secundum problema 62. statuatur $q = \frac{P f g\, cof\,\theta}{M a a}$, colligetur inde arculus $Oo = \frac{-2 q\, dt\, fi\, s}{\varkappa} = \frac{-2 P f g\, dt\, cof\,\theta\, fi\, s}{M a a \varkappa}$, et celeritas angularis $\varkappa$ decrementum capiet $= 2 q dt\, cof\, s = \frac{2 P f g\, dt\, cof\,\theta\, cof\, s}{M a a}$, ut sit $d\varkappa = \frac{-2 P f g\, dt\, cof\,\theta\, cof\, s}{M a a}$. Ad mutationem autem poli gyrationis O in o factam commodius exprimendam, cum sit angulus $ZAB = \zeta$, erit angulus $BAS = 90 - \zeta$, deinde vocetur angulus $BAO = \eta$, ut sit $cof\,\eta = \frac{cof\,\mathfrak{C}}{fi\,\alpha}$ et $fi\,\eta = \frac{cof\,\gamma}{fi\,\alpha}$, in triangulo OAS habemus $AO = \alpha$, $AS = 90°$ et $OAS = 90° - \zeta - \eta$: unde reperitur $cof\, OS = cof\, s = f(\zeta + \eta)\, fi\,\alpha$, et producto arcu AO in p, eoque ex o demisso perpendiculo op, $cot\, o\, Op = \frac{fi(\zeta+\eta)\, cof\,\alpha}{cof(\zeta+\eta)}$. Cum nunc sit $Oo = \frac{-2 P f g\, dt\, cof\,\theta\, fi\, s}{M a a \varkappa}$

erit $Op = d\alpha = \frac{-2 P f g\, dt\, cof\,\theta}{M a a \varkappa}$. $fin\, s\, cof\, o\, Op$

$$\text{et } op = \frac{-2Pfgdt\cos\theta}{Maa\varkappa}. \; \sin s \sin o\,Op = d\eta \sin \alpha.$$

At est $\sin s \sin o\,Op = \cos(\zeta + \eta)$ et $\sin s \cos o\,Op = \sin s \sin o\,Op \cot o\,Op = \sin(\zeta + \eta)\cos\alpha$. Ex his ergo reperitur:

$$d\varkappa = \frac{-2Pfgdt\cos\theta}{Maa}. \sin\alpha \sin(\zeta + \eta)$$

$$d\alpha = \frac{-2Pfgdt\cos\theta}{Maa\varkappa}. \cos\alpha \sin(\zeta + \eta) \text{ et } d\eta = \frac{-2Pfgdt\cos\theta}{Maa\varkappa}. \frac{\cos(\zeta + \eta)}{\sin\alpha},$$

sicque tam variatio axis gyrationis in turbine, quam celeritatis angularis $\varkappa$ est definita,

COROLL. 1.

773. Est ergo $d\varkappa : d\alpha = \sin\alpha : \frac{\cos\alpha}{\varkappa}$, unde fit $\frac{d\varkappa}{\varkappa} = \frac{d\alpha \sin\alpha}{\cos\alpha}$ et integrando $\varkappa = \frac{\varepsilon\cos\alpha}{\cos a}$, si quidem initio fuerit celeritas angularis $= \varepsilon$, et arcus $AO = a$, qui nunc est $= \alpha$. Sicque ex dato axe gyrationis O statim innotescit celeritas turbinis angularis $\varkappa$.

COROLL. 2.

774. Quo magis ergo axis gyrationis O ab axe turbinis A recedit, eo major fit celeritas angularis $\varkappa$, eaque adeo in infinitum augeretur, si axis gyrationis IO usque ad angulum rectum ab axe turbinis IA digrederetur.

PROBLEMA. 83.

775. Si detur ad aliquod tempus inclinatio turbinis ad horizontem, et axis gyrationis cum celeritate angulari, determinare mutationem momentaneam in situ turbinis ortam.

SOLUTIO.

Sumto sphaerae immobilis centro inertiae turbinis descriptae puncto summo Z quasi zenith, constituatur etiam primus quasi meridianus ZX: et nunc quidem versetur axis turbinis in A, pro quo dicatur arcus

Digitized by Google

cus $ZA = 90° - \theta = l$, et angulus $XZA = \lambda$, tum vero reliqui bini axes principales sint in B et C, ponaturque angulus $ZAB = \zeta$. Nunc autem turbo gyretur circa polum O, ut sit $BAO = \eta$: et $AO = \alpha$; celeritasque angularis $= \varkappa$ in sensum ABC. His positis, si secundum probl. 68. vocemus arcus $OB = \mathfrak{G}$, $OC = \gamma$; $ZB = m$, $ZC = n$, habebimus pro variatione situs:

$$dl \sin l = \varkappa dt (\cos \mathfrak{G} \cos n - \cos \gamma \cos m)$$
$$dm \sin m = \varkappa dt (\cos \gamma \cos l - \cos \alpha \cos n)$$
$$dn \sin n = \varkappa dt (\cos \alpha \cos m - \cos \mathfrak{G} \cos l)$$
$$\text{et } -d\lambda \sin l^2 = \varkappa dt (\cos \mathfrak{G} \cos m + \cos \gamma \cos n).$$

Iam vero est $l = 90° - \theta$, ideoque $\cos l = \sin \theta$

$$\cos \mathfrak{G} = \sin \alpha \cos \eta; \quad \cos \gamma = \sin \alpha \sin \eta \text{ atque}$$
$$\cos m = \cos \zeta \cos \theta; \text{ et } \cos n = -\sin \zeta \cos \theta, \text{ unde concluditur}$$
$$-d\theta \cos \theta = \varkappa dt (-\sin \alpha \cos \eta \sin \zeta \cos \theta - \sin \alpha \sin \eta \cos \zeta \cos \theta)$$

seu $d\theta = \varkappa dt \sin \alpha \sin (\zeta + \eta)$;

$$d\zeta \sin \zeta \cos \theta + d\theta \cos \zeta \sin \theta = \varkappa dt (\sin \alpha \sin \eta \sin \theta + \cos \alpha \sin \zeta \cos \theta)$$
$$+ d\zeta \cos \zeta \cos \theta - d\theta \sin \zeta \sin \theta = \varkappa dt (\cos \alpha \cos \zeta \cos \theta - \sin \alpha \cos \eta \sin \theta)$$

seu $d\zeta \cos \theta = \varkappa dt (-\sin \alpha \sin \theta \cos (\zeta + \eta) + \cos \alpha \cos \theta)$

ac denique $d\lambda = -\dfrac{\varkappa dt \sin \alpha \cos (\zeta + \eta)}{\cos \theta}$.

Variatio ergo momentanea in situ turbinis his continetur formulis differentialibus:

$$d\theta = \varkappa dt \sin \alpha \sin (\zeta + \eta)$$
$$d\zeta = \varkappa dt (\cos \alpha - \sin \alpha \tang \theta \cos (\zeta + \eta))$$
$$d\lambda = -\frac{\varkappa dt \sin \alpha \cos (\zeta + \eta)}{\cos \theta}.$$

SCHOLION.

776. Has duplicis generis variationes momentaneas evolvi necesse erat, antequam solutionem problematis, quo argumentum hujus capitis continetur, suscipere liceret. Nunc igitur his variationibus momentaneis definitis, in motum turbinis, qualem quidem hoc capite consideramus, postquam ipsi motus quicunque fuerit impressus, inquiramus.

PROBLEMA. 84.

777. Postquam turbini in data axis sui inclinatione motus gyratorius circa hunc axem fuerit impressus, determinare motus hujus continuatio-

tinuationem, hoc eſt, ad quodvis tempus tam ſitum quam motum turbinis.

SOLUTIO.

Fig. 101. Habuerit initio axis turbinis ad horizontem inclinationem δ, circa quem acceperit motum gyratorium celeritate angulari $= \varepsilon$ in ſenſum ABC. Sumamus autem initio axem turbinis A in ipſo meridiano ZX fuiſſe, in eumque ſimul arcum AB ad turbinem pertinentem incidiſſe. Pro ipſo turbine ſit ejus maſſa $= M$, momentum inertiae reſpectu omnium axium per ejus centrum inertiae tranſeuntium $= Maa$, et in axe turbinis diſtantia imae cuſpidis a centro inertiae $ID = f$. Nunc elapſo tempore $= t$, mentem a motu centri inertiae abſtrahendo, pervenerit axis turbinis in A, ut ſit angulus $XZA = \lambda$, ejusque inclinatio ad horizontem θ ſeu arcus $ZA = 90° - \theta$, ita ut initio fuerit $\lambda = 0$ et $\theta = \delta$, tum vero arcus AB cum turbine mobilis jam cum ZA faciat angulum $ZAB = \zeta$, ita ut initio fuerit $\zeta = 0$. Porro gyretur nunc turbo circa polum O celeritate angulari $= \gamma$ etiamnum in ſenſum ABC, ponaturque arcus $AO = \alpha$ et angulus $BAO = \eta$, ita ut initio fuerit $\alpha = 0$, quia turbo circa ipſum axem AID gyrari coepit, angulus autem η initio erat indefinitus. Quodſi jam hoc inſtanti preſſio cuſpidis in planum horizontale ponatur $= P$, praecedentia problemata ſuppeditant ſequentes aequationes:

I. $\dfrac{P}{M} = 1 + \dfrac{f(dd\theta \cos\theta - d\theta^2 \sin\theta)}{2g\,dt^2}$

II. $\alpha = \dfrac{\varepsilon}{\cos\alpha}$ ob $\alpha = 0$

III. $d\alpha = \dfrac{-2Pfg\,dt\cos\theta}{Maa\gamma} \cos\alpha \sin(\zeta+\eta)$

IV. $d\eta = \dfrac{-2Pfg\,dt\cos\theta}{Maa\gamma} \cdot \dfrac{\cos(\zeta+\eta)}{\sin\alpha}$

V. $d\theta = \gamma\,dt \sin\alpha \sin(\zeta+\eta)$

VI. $d\zeta = \gamma\,dt\,(\cos\alpha - \sin\alpha \tan\theta \cos(\zeta+\eta))$

VII. $d\lambda = \dfrac{-\gamma\,dt \sin\alpha \cos(\zeta+\eta)}{\cos\theta}$.

ad

ad quarum aequationum resolutionem omnes vires intendere debemus. Quo igitur multitudinem variabilium restringamus, ex aequationibus III. et IV. eliminando P colligimus

$$\frac{d\alpha \cos(\zeta+\eta)}{\sin\alpha \cos\alpha} = d\eta \sin(\zeta+\eta);$$

tum V et VI eliminando γdt praebent

$$\frac{d\theta \cos\alpha}{\sin\alpha} - d\theta \tang\theta \cos(\zeta+\eta) = d\zeta \sin(\zeta+\eta).$$

Addamus has duas aequationes, et posito $\zeta+\eta=\varphi$ habebimus

$$\frac{d\alpha \cos\varphi}{\sin\alpha \cos\alpha} + \frac{d\theta \cos\alpha}{\sin\alpha} - d\theta \tang\theta \cos\varphi - d\varphi \sin\varphi = 0,$$

quae multiplicata per $\tang\alpha \cos\theta$ abit in hanc

$$\frac{d\alpha \cos\theta \cos\varphi}{\cos\alpha} + d\theta \cos\theta - d\theta \tang\alpha \sin\theta \cos\varphi - d\varphi \tang\alpha \cos\theta \sin\varphi = 0,$$

quae integrabilis existit praebetque

$$\tang\alpha \cos\theta \cos\varphi + \sin\theta = \sin\delta$$

quia initio fit $\alpha=0$ et $\theta=\delta$: hinc ergo nanciscimur

$$\text{vel } \tang\alpha = \frac{\sin\delta - \sin\theta}{\cos\theta \cos\varphi} \text{ vel } \cos\varphi = \frac{\sin\delta - \sin\theta}{\tang\alpha \cos\theta}.$$

Dividamus nunc aequationem III per V, ut $\sin(\zeta+\eta)$ seu $\sin\varphi$ removeamus, fiet

$$\frac{d\alpha}{d\theta} + \frac{2Pfg \cos\theta \cos\alpha}{Maa\gamma\gamma \sin\alpha} = 0$$

$$\text{seu } \frac{\varepsilon\varepsilon d\alpha \sin\alpha}{\cos\alpha^3} + \frac{2Pfg\, d\theta \cos\theta}{Maa} = 0;$$

ubi si ponamus $\sin\theta = x$, ut sit $d\theta \cos\theta = dx$, quoniam est $\frac{P}{M} = 1 + \frac{f\,ddx}{2g\,dt^2}$, nanciscemur hanc aequationem sponte integrabilem:

$$\frac{\varepsilon\varepsilon aa\, d\alpha \sin\alpha}{\cos\alpha^3} + 2fg\,dx + \frac{ff\,dx\,ddx}{dt^2} = 0,$$

 quae

quae integrata dat:

$$\frac{ss\,aa\,u}{2\,cos\,\alpha^2} + 2fg\,si\,\theta + \frac{ff\,d\theta^2\,cos\,\theta^2}{2\,dt^2} = \tfrac{1}{2}\,C$$

seu $fd\theta\,cos\,\theta = dt\,r\left(C - 4fg\,si\,\theta - \frac{ss\,aa}{cos\,\alpha^2}\right)$.

Quare cum ex aequatione V sit

$$d\theta = s\,dt\,tang\,\alpha\,si\,\Phi,$$

habemus novam aequationem finitam

$$\tfrac{1}{2}\,C = \frac{ss\,aa}{2\,cos\,\alpha^2} + 2fg\,si\,\theta + \frac{ss\,ff\,tang\,\alpha^2\,cos\,\theta^2\,si\,\Phi^2}{2}$$

ubi esse debet $\frac{1}{2}\,C = \frac{1}{2}\,ss\,aa + 2fg\,si\,\delta$, unde oritur

$$2fg\,(si\,\delta - si\,\theta) = \tfrac{1}{2}\,ss\,aa\,tang\,\alpha^2 + \tfrac{1}{2}\,ss\,ff\,tang\,\alpha^2\,cos\,\theta^2\,si\,\Phi^2,$$

quae ob $si\,\Phi^2 = 1 - \frac{(si\,\delta - si\,\theta)^2}{tang\,\alpha^2\,cos\,\theta^2}$ abit in

$$4fg\,(si\,\delta - si\,\theta) = ss\,aa\,tang\,\alpha^2 + ss\,ff\,tang\,\alpha^2\,cos\,\theta^2 - ss\,ff\,(si\,\delta - si\,\theta)^2$$

unde elicimus

$$tang\,\alpha = \frac{r\,(si\,\delta - si\,\theta)(4fg + ss\,ff\,(si\,\delta - si\,\theta))}{s\,r\,(aa + ff\,cos\,\theta^2)},$$

hincque porro

$$cos\,\Phi = cos\,(\zeta + \eta) = \frac{s\,r\,(si\,\delta - si\,\theta)(aa + ff\,cos\,\theta^2)}{cos\,\theta\,r\,(4fg + ss\,ff\,(si\,\delta - si\,\theta))}$$

$$si\,\Phi = si\,(\zeta + \eta) = \frac{r\,(4fg\,cos\,\theta^2 - ss\,aa\,(si\,\delta - si\,\theta))}{cos\,\theta\,r\,(4fg + ss\,ff\,(si\,\delta - si\,\theta))},$$

ficque jam per solam inclinationem θ definivimus arcum α et angulum $\Phi = \zeta + \eta$, quin etiam relationem inter θ et tempus t adipiscimur aequatione, $d\theta = s\,dt\,tang\,\alpha\,si\,\Phi$, quae induit hanc formam

$$d\theta = \frac{dt\,r\,(si\,\delta - si\,\theta)(4fg\,cos\,\theta^2 - ss\,aa\,(si\,\delta - si\,\theta))}{cos\,\theta\,r\,(aa + ff\,cos\,\theta^2)}$$

$$\text{seu } dt = \frac{d\theta\,cos\,\theta\,r\,(aa + ff\,cos\,\theta^2)}{r\,(si\,\delta - si\,\theta)(4fg\,cos\,\theta^2 - ss\,aa\,(si\,\delta - si\,\theta))}.$$

Deinde cum sit $\frac{d\zeta}{d\theta} = \frac{1}{tang\,\alpha\,si\,\Phi} - \frac{tang\,\delta\,cos\,\Phi}{si\,\Phi}$ erit

$d\zeta$

Digitized by Google

$$d\zeta = \varepsilon dt - \frac{\varepsilon d\theta \, tang\, \theta r (fi\delta - fi\theta)(aa + ff cof\theta^2)}{r(4fg cof\theta^2 - \varepsilon\varepsilon aa(fi\delta - fi\theta))}$$

$$\text{seu } d\zeta = \frac{\varepsilon d\theta (1 - fi\delta fi\theta) r (aa + ff cof\theta^2)}{cof\theta r (fi\delta - fi\theta)(4fg cof\theta^2 - \varepsilon\varepsilon aa(fi\delta - fi\theta))}$$

unde angulus ZAB $= \zeta$ per integrationem eſt eliciendus. Denique cum ſit $d\lambda = -\frac{\varepsilon dt \, tang\, a \, cof\varphi}{cof\theta}$, habebimus

$$d\lambda = \frac{-\varepsilon dt (fi\delta - fi\theta)}{cof\theta^2} \text{ ſeu}$$

$$d\lambda = \frac{-\varepsilon d\theta r (fi\delta - fi\theta)(aa + ff cof\theta^2)}{cof\theta r (4fg cof\theta^2 - \varepsilon\varepsilon aa(fi\delta - fi\theta))}.$$

Quodſi etiam preſſionem turbinis in planum horizontale noſſe velimus; ea ex aequatione III colligatur, unde eſt:

$$\varepsilon aa d.\, tang\, a = -\frac{2P}{M} \cdot fgdt \, cof\theta \, fi\varphi,$$

hincque concluditur

$$\frac{2P}{M} = \frac{aa(2fg + \varepsilon ff(fi\delta - fi\theta))}{fg(aa + ff cof\theta^2)} - \frac{aaff fi\theta (fi\delta - fi\theta)(4fg + \varepsilon ff(fi\delta - fi\theta))}{fg(aa + ff cof\theta^2)^2}.$$

COROLL. 1.

778. Si initio axis turbinis AD fuerit verticalis, ſeu $\delta = 90°$, turbo perpetuo hunc ſitum ſervabit, et uniformiter circa eundem axem AD gyrabitur celeritate angulari ε. Quod etiam declarat aequatio $dt = \frac{d\theta \, cof\theta r (aa + ff cof\theta^2)}{(1 - fi\theta) r (4fg(1 + fi\theta) - \varepsilon\varepsilon aa)}$: unde patet nonniſi poſt tempus infinitum hoc eſt nunquam fieri poſſe $fi\,\theta < 1$.

COROLL. 2.

779. At ſi fuerit $\delta < 90°$, ſeu $fi\,\delta < 1$. phaenomena motus ex aequatione $dt = \frac{d\theta \, cof\theta r (aa + ff cof\theta^2)}{r(fi\delta - fi\theta)(4fg cof\theta^2 - \varepsilon\varepsilon aa(fi\delta - fi\theta))}$ cognoſci poſſunt: ex qua primum patet, nunquam fieri poſſe $fi\,\theta > fi\,\delta$, nempe inclinatio ad horizontem θ nunquam ſuperabit initialem δ.

Digitized by Google

COROLL. 3.

780. Inclinatio autem θ evanescere nequit, nisi sit $\varepsilon\varepsilon aa \sin\delta < 4fg$: quare si celeritas angularis initio impressa ε minor fuerit, quam $\frac{2\sqrt{fg}}{a\sqrt{\sin\delta}}$, turbo tandem procidet; quemadmodum evenit, si turbini inclinato nullus impressus fuerit motus gyratorius.

COROLL. 4.

782. At si celeritas angularis initio impressa major fuerit, quam $\frac{2\sqrt{fg}}{a\sqrt{\sin\delta}}$, inclinatio θ non ultra certum limitem immunis poterit, quem simul atque attigerit, turbo se iterum ad initialem inclinationem δ eriget. At minima inclinatio θ ex aequatione $4fg\cos\theta^2 - \varepsilon\varepsilon aa(\sin\delta - \sin\theta) = 0$ colligitur, $\sin\theta = \frac{\varepsilon\varepsilon aa - \sqrt{(\varepsilon^4 a^4 - 16\varepsilon\varepsilon aafg\sin\delta + 64ffgg)}}{8fg}$.

COROLL. 5.

783. Quare si celeritas angularis ε initio impressa fuerit quasi infinita, limes minimi fit $\sin\theta = \sin\delta$, seu turbo perpetuo eandem inclinationem servabit: sin autem sit valde magna, minima inclinatio ita proxime definitur: $\sin\theta = \sin\delta - \frac{2fg\cos\delta^2}{\varepsilon\varepsilon aa}$; ut sit $\theta = \delta - \frac{2fg\cos\delta}{\varepsilon\varepsilon aa}$.

SCHOLION.

784. Cum turbo tardius in gyrum actus mox procumbat, ea celeritas angularis notari meretur, quam si turbo superaverit, iterum erigatur. Esset quidem haec celeritas $= \frac{2\sqrt{fg}}{a\sqrt{\sin\delta}}$, quippe cui maxima inclinatio convenit, nempe $\theta = 0$: sed quia ob motum turbinis axis non ad horizontem usque inclinari potest, ea pro maxima inclinatione erit reputanda, ubi turbo quasi corpore suo horizontem attingit; quae si vocetur $= i$, ne turbo eousque inclinetur, celeritas angularis initio impressa ε major esse debet, quam $\frac{2\cos i\sqrt{fg}}{a\sqrt{(\sin\delta - \sin i)}}$, et quamdiu ea major manserit, turbo a lapsu erit immunis. Haecque est causa, quod turbo, cum ob frictionem aliaque obstacula ejus motus sensim imminuatur, tandem prolabatur. Ceterum cum hic ad ejusmodi obstacula non respexerim,

Digitized by Google

verim, mirum non est, si etiam reliqua phaenomena experientiae non satis respondeant: etiamsi certus velocitatis gradus, ad perennitatem gyrationis requisitus, experientiae maxime sit consentaneus. Verum ingens sine dubio discrimen deprehenderetur, si formulas differentiales inventas integraremus; atque ob hanc ipsam causam illum laborem suscipere haud operae esset pretium, cum eae tam sint complicatae, ut per logarithmos et arcus circulares expediri nequeant. Eae autem adhuc magis proditurae essent intricatae, si in turbine non omnia momenta inertiae inter se aequalia statuerentur, quocirca etiam hoc argumentum non attingam, quoniam principia stabilita his allatis exemplis satis sunt illustrata: sed potius uberiorem ipsius Theoriae de motu corporum rigidorum explicationem in medium afferre studebo. Etsi enim, quae hactenus sunt tradita, totum opus absolvere videntur, tamen si inde effectum virium quarumcunque definire velimus, methodus ante praescripta nimis est operosa; dum primo axem, circa quem vires corpus, si quiesceret, convertere inciperent definiri, tum vero hinc variationem axis, circa quem corpus actu gyratur, et celeritatis angularis determinari oportet: ex quo methodum perfectiorem magisque ad usum accommodatam proponam, qua deinceps ad investigationes magis arduas uti liceat.

CAPUT XV.

DE MOTU LIBERO CORPORUM RIGIDORUM A VIRIBUS QUIBUSCUNQUE SOLLICITATORUM.

THEOREMA. 10.

785. Quomodocunque corpus rigidum a viribus sollicitetur, effectus momentaneus his quatuor rebus continetur: primo variatione celeritatis centri inertiae: secundo variatione directionis centri inertiae: tertio variatione celeritatis angularis circa axem gyrationis per centrum inertiae transeuntis, et quarto variatione ipsius axis gyrationis.

DEMONSTRATIO.

Quomodocunque corpus rigidum moveatur, ejus motus quovis

Digitized by Google

temporis puncto resolvitur in motum progressivum, quo centrum inertiae movetur, et motum gyratorium circa axem quempiam per centrum inertiae transeuntem: unde cognitio hujus motus haec quatuor elementa involvit: 1°. celeritatem centri inertiae; 2°. directionem, secundum quam movetur; 3°. axem per centrum inertiae transeuntem, circa quem corpus jam gyratur, et 4°. celeritatem angularem hujus motus: quas quatuor res qui cognoverit, motum corporis hoc instanti perfecte habet perspectum. Ob vires autem sollicitantes fieri potest, ut hae quatuor res immutentur, ideoque ad earum effectum cognoscendum necesse est, ut quantum singulae tempusculo infinite parvo varientur, definire valeamus. Effectus ergo virium non tam in his quatuor rebus, quam in earum variatione momentanea consistit, quam si assignare potuerimus, effectum perfecte cognoverimus; unde veritas Theorematis est manifesta.

COROLL. 1.

786. Quemadmodum ergo in motu punctorum effectus virium ex variatione celeritatis et directionis perfecte cognoscitur; ita in motu corporum rigidorum, praeter has binas variationes, ad centrum inertiae relatas, nosse oportet variationes, quas cum ipse axis gyrationis tum celeritas angularis subit.

COROLL. 2.

787. Sicut ergo vires definivimus, quibus motui gyratorio circa axem fixum data acceleratio inducatur, ita etiam vires definire licebit, quibus insuper ipse axis gyrationis datam variationem adipiscatur.

COROLL. 3.

788. Fundamentum ergo universae Theoriae de motu corporum rigidorum in hoc consistit, ut quomodocunque vires sollicitantes fuerint comparatae, quaternas illas variationes temporis elemento productas assignare valeamus.

SCHOLION. 1.

789. Principia ad hunc finem ducentia in praecedentibus jam satis sunt exposita, ubi ostendimus, quomodo variationem tam in motu centri inertiae, quam in axe gyrationis ejusque motu determinari oportet. Verum quia hoc posterius opus, in quo summa hujus Theoriae continetur, pluribus investigationibus innititur, quae saepe plurimum

Digitized by Google

mum moleſtiae ſimplicare ſolent, hic eas quaſi in unum contrahens hanc Theoriam ita proponam, ut unico principio abſolvi poſſit. Statim quidem hoc faciliori modo uti potuiſſem, ſicque non leves difficultates in ſuperiori tractatione occurrentes evitaviſſem; verum in argumento adhuc tam parum tractato haud incongruum viſum eſt, methodum operoſiorem et prolixiorem praemittere, quo ſingulae notiones in re pene nova animo firmius imprimantur, ipſaeque difficultates, quibus haec pars Mechanicae adhuc involuta videbatur, luculentius perſpiciantur. Nihilo vero minus hoc argumentum hic quaſi de novo pertractabo, neque ex hactenus allatis quicquam in ſubſidium vocabo.

SCHOLION. 2.

790. Cum igitur totum negotium huc reducatur, ut quantae variationes in quaternis memoratis rebus a datis viribus producantur, definiatur; quoniam methodus directa hoc praeſtandi non patet, vice verſa primum in vires inquiram, quae ad datas variationes momentaneas producendas ſint neceſſariae, ut hinc viciſſim ad id, quod quaerimus, reverti queamus. Et cum variatio in motu centri inertiae producta nihil habeat difficultatis, id tanquam in quiete ſpectabo; et cujusmodi vires requirantur, inveſtigabo, ut tam axis gyrationis, circa quem corpus jam gyratur, quam celeritas angularis, tempuſculo infinite parvo datas variationes accipiant. Quoniam enim axis gyrationis cum celeritate angulari dari aſſumitur, motus ſingulorum elementorum corporis erit datus, qui ſi ſecundum ternas directiones fixas reſolvatur, quantum hae ternae celeritates, tam ob variatam axis gyrationis poſitionem, quam ob celeritatis angularis variationem immutentur, colligere, ſimulque vires hanc mutationem in ſingulis elementis corporis producentes aſſignare valebimus: atque his denique viribus elementaribus colligendis ipſas vires finitas quaeſitas impetrabimus. Cum igitur primum motum ſingulorum corporis elementorum, dum corpus circa axem quemcunque per centrum inertiae tranſeuntem data celeritate angulari gyratur, noſſe debeamus, ejus reſolutionem ſecundum ternas directiones fixas, pro quibus ternos corporis axes principales aſſumam, in ſequente problemate docebo.

PROBLEMA. 85.

791. Si corpus rigidum circa axem quemcunque per ejus centrum inertiae tranſeuntem gyretur data celeritate, ſingulorum ejus elementorum

torum motum definire, eumque secundum directiones axium principalium resolvere.

SOLUTIO.

Circa centrum inertiae corporis I, quod in figura non est expressum, concipiatur descripta superficies sphaerica, in qua sint A, B, C poli axium principalium, ita ut arcus AB, AC et BC sint quadrantes. Gyretur jam corpus circa axem quemcunque IO celeritate angulari $= \omega$ in sensum ABC, sintque pro gyrationis polo O arcus $OA = \alpha$, $OB = \beta$, et $OC = \gamma$. Consideretur nunc corporis elementum quodcunque, a quo recta, ad centrum inertiae I ducta, superficiem sphaericam secet in Z; ejus autem distantia a centro I sit $= r$, dum radius sphaerae unitate exponitur: atque manifestum est, motum ejus elementi similem fore motui puncti Z, dum nempe hujus celeritas in ratione 1 ad r augetur. Quare sufficiet motum puncti Z definivisse, pro quo si ad arcum OZ constituatur arcus ZzT normalis, erit Zz directio motus, et celeritas $= \omega \sin OZ$, quoniam $\sin OZ$ distantiam puncti Z ab axe gyrationis IO exprimit. Constituatur autem arcus ZT quadrans, ut radius IT fiat directioni motus Zz parallelus, ac jam celeritatem $\omega \sin OZ$ secundum hanc directionem IT latam resolvi oportet secundum directiones axium principalium IA, IB, IC. Quem in finem ductis arcubus AT, BT, CT, qui illius rectae IT inclinationes ad hos axes metiuntur, obtinebitur

Fig. 102.

cel. sec. $IA = \omega \sin OZ . \cos AT$; cel. sec. $IB = \omega \sin OZ . \cos BT$
et cel. sec. $IC = \omega \sin OZ . \cos CT$.

Iam quia arcus OT est pariter quadrans, ex triangulo AOT fit $\cos AT = \cos AOT . \sin AO = -\sin AOZ . \sin AO$ ob $TOZ = 90°$. Simili modo est

$\cos BT = \cos BOT . \sin BO = \sin BOZ . \sin BO$
$\cos CT = \cos COT . \sin CO = \sin COZ . \sin CO$.

At ob $\sin AZ : \sin AOZ = \sin OZ : \sin OAZ$ erit
$\sin AOZ . \sin OZ = \sin AZ . \sin OAZ$ similique modo
$\sin BOZ . \sin OZ = \sin BZ . \sin OBZ$ et
$\sin COZ . \sin OZ = \sin CZ . \sin OCZ$: unde fit
cel. sec. $IA = -\omega \operatorname{si} AO . \operatorname{si} AZ . \operatorname{si} OAZ$
cel. sec. $IB = \omega \operatorname{si} BO . \operatorname{si} BZ . \operatorname{si} OBZ$
cel. sec. $IC = \omega \operatorname{si} CO . \operatorname{si} CZ . \operatorname{si} OCZ$.

Tum vero est

$$\operatorname{si} BAO = \frac{\cos CO}{\operatorname{si} AO}; \quad \cos BAO = \frac{\cos BO}{\operatorname{si} AO};$$

si BAZ

$$\text{fi BAZ} = \frac{\text{cof CZ}}{\text{fi AZ}}\,;\quad \text{cof BAZ} = \frac{\text{cof BZ}}{\text{fi AZ}}$$

$$\text{ergo fin OAZ} = \frac{\text{cof CO. cof BZ} - \text{cof BO. cof CZ}}{\text{fi AO. fi AZ}}$$

ideoque celeritas secundum IA $= s\,(\text{cof BO. cof CZ} - \text{cof CO. cof BZ})$ similique modo reperitur

celeritas secundum IB $= s\,(\text{cof CO. cof AZ} - \text{cof AO. cof CZ})$

celeritas secundum IC $= s\,(\text{cof AO. cof BZ} - \text{cof BO. cof AZ})$

quae per r multiplicatae dabunt celeritates elementi propositi: pro quo si coordinatae axibus principalibus parallelae ponantur x, y, z, erit $r\,\text{cof AZ} = x$: $r\,\text{cof BZ} = y$ et $r\,\text{cof CZ} = z$: quare ob AO $= \alpha$, BO $= \beta$, CO $= \gamma$, erunt elementi propositi celeritates

cel. sec. IA $= s\,(z\,\text{cof}\,\beta - y\,\text{cof}\,\gamma)$

cel. sec. IB $= s\,(x\,\text{cof}\,\gamma - z\,\text{cof}\,\alpha)$

cel. sec. IC $= s\,(y\,\text{cof}\,\alpha - x\,\text{cof}\,\beta)$

PROBLEMA. 86.

792. Si corpus rigidum gyretur circa axem quemcunque per ejus centrum inertiae transeuntem data celeritate angulari, invenire vires elementares, quibus singula elementa sollicitari debent, ut elemento temporis dt tam ipse axis gyrationis quam celeritas angularis datas subeant variationes.

SOLUTIO.

Sit I centrum inertiae corporis, ejusque axes principales IA, IB, IC, gyreturque corpus circa axem quemcunque IO, cujus ad quemlibet axem sit inclinatio AIO $= \alpha$; BIO $= \beta$, CIO $= \gamma$, celeritas autem angularis sit $= s$ in sensum ABC directa; quae quantitates tempusculo dt crescere debeant suis differentialibus $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ et ds, ad quem effectum producendum vires elementares necessarias quaeri oporteat. Consideretur elementum corporis quodcunque dM in Z situm, pro quo sint coordinatae axibus principalibus parallelae IX $= x$, XY $= y$, YZ $= z$: vocenturque vires ad ejus motum praescriptum efficiendum requisitae et secundum axes principales resolutae $Za = p$, $Zb = q$ et $Zc = r$. Secundum easdem directiones ejus motus resolvatur, ponaturque celeritas secundum $Za = u$; secundum $Zb = v$ et secundum $Zc = w$, atque cum ex primis motus principiis sit Fig. 103.

$$du = \frac{2gp\,dt}{dM},\quad dv = \frac{2gq\,dt}{dM},\quad dw = \frac{2gr\,dt}{dM};$$

Digitized by Google

vires quaesitae erunt:

$$p = \frac{du\,dM}{2g\,dt}; \quad q = \frac{dv\,dM}{2g\,dt}; \quad r = \frac{dw\,dM}{2g\,dt}.$$

Verum in praecedente problemate celeritates ternas u, v, w, ita invenimus expressas, ut sit:

$$u = \varkappa(z\cos\mathfrak{C} - y\cos\gamma); \quad v = \varkappa(x\cos\gamma - z\cos\alpha); \quad w = \varkappa(y\cos\alpha - x\cos\mathfrak{C});$$

quae quantum augeantur tempusculo dt cum ex variabilitate litterarum $\varkappa$, α, $\mathfrak{C}$, γ, quae ut data spectatur, tum vero coordinatarum x, y, z judicari oportet. At harum differentialia dx, dy, dz exhibent spatiola, per quae elementum dM tempusculo dt transferetur, ita ut sit

$$dx = u\,dt = \varkappa\,dt\,(z\cos\mathfrak{C} - y\cos\gamma)$$
$$dy = v\,dt = \varkappa\,dt\,(x\cos\gamma - z\cos\alpha)$$
$$dz = w\,dt = \varkappa\,dt\,(y\cos\alpha - x\cos\mathfrak{C}).$$

Unde differentiatione rite instituta adipiscimur:

$$du = d\varkappa\,(z\cos\mathfrak{C} - y\cos\gamma) - \varkappa(zd\mathfrak{C}\,\sin\mathfrak{C} - ydy\sin\gamma) + \varkappa\,dt\,(w\cos\mathfrak{C} - v\cos\gamma)$$
$$dv = d\varkappa\,(x\cos\gamma - z\cos\alpha) - \varkappa(xdy\sin\gamma - zd\alpha\sin\alpha) + \varkappa\,dt\,(u\cos\gamma - w\cos\alpha)$$
$$dw = d\varkappa\,(y\cos\alpha - x\cos\mathfrak{C}) - \varkappa(yd\alpha\sin\alpha - xd\mathfrak{C}\sin\mathfrak{C}) + \varkappa\,dt\,(v\cos\alpha - u\cos\mathfrak{C}).$$

Cum vero sit $\cos\alpha^2 + \cos\mathfrak{C}^2 + \cos\gamma^2 = 1$ ideoque $\cos\alpha^2 + \cos\mathfrak{C}^2 = \sin\gamma^2$, $\cos\alpha^2 + \cos\gamma^2 = \sin\mathfrak{C}^2$ et $\cos\mathfrak{C}^2 + \cos\gamma^2 = \sin\alpha^2$, hae formulae abeunt in istas:

$$du = d\varkappa\,(z\cos\mathfrak{C} - y\cos\gamma) - \varkappa z d\mathfrak{C}\sin\mathfrak{C} + \varkappa y d\gamma\sin\gamma + \varkappa\varkappa dt\,(y\cos\alpha\cos\mathfrak{C} + z\cos\alpha\cos\gamma - x\sin\alpha^2)$$
$$dv = d\varkappa\,(x\cos\gamma - z\cos\alpha) - \varkappa x d\gamma\sin\gamma + \varkappa z d\alpha\sin\alpha + \varkappa\varkappa dt\,(z\cos\mathfrak{C}\cos\gamma + x\cos\alpha\cos\mathfrak{C} - y\sin\mathfrak{C}^2)$$
$$dw = d\varkappa\,(y\cos\alpha - x\cos\mathfrak{C}) - \varkappa y d\alpha\sin\alpha + \varkappa x d\mathfrak{C}\sin\mathfrak{C} + \varkappa\varkappa dt\,(x\cos\alpha\cos\gamma + y\cos\mathfrak{C}\cos\gamma - z\sin\gamma^2)$$

ex quibus vires quaesitae elementares p, q, r innotescunt, has scilicet formulas per $\frac{dM}{2g\,dt}$ multiplicando.

COROLL. 1.

793. Si igitur singula corporis elementa a talibus ternis viribus sollicitentur, dum corpus circa axem IO celeritate angulari $\varkappa$ gyratur, elapso tempusculo dt, celeritas angularis $\varkappa$ augmentum accipiet $= d\varkappa$, simulque axis gyrationis respectu axium principalium IA, IB, IC ita variabitur,

Digitized by Google

variabitur, ut anguli α, β, γ suis differentialibus $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ augeantur.

COROLL. 2.

794. Quatenus vires contemplamur idem corporis elementum dM sollicitantes, quantitates x, y, z in his formulis insunt, tanquam constantes, quoniam iis situs elementi respectu axium principalium designatur, qui semper manet idem,

COROLL. 3.

795. Sin autem ab hoc elemento ad alia transire velimus, vires ea sollicitantes investigaturi, eaedem quantitates x, y, z erunt variabiles, et reliquae α, β, γ, ε cum suis differentialibus tanquam constantes spectandae: quoniam hae pro omnibus corporis elementis eodem instanti manent eaedem.

COROLL. 4.

796. Quare si vires omnia elementa sollicitantes in unam summam colligere velimus, hae tantum formulae $\int xdM$, $\int ydM$, et $\int zdM$ integrandae occurrunt; quarum differentialia cum evanescant, ob I centrum inertiae corporis, patet summas omnium virium p, item q et r seorsim evanescere.

SCHOLION.

797. Quia summae omnium virium p, q, et r evanescunt; quod semper evenire debet, quamdiu centrum inertiae in quiete persistit, earum effectus tantum ex earum momentis est dijudicandus; atque aliae quaeque vires eadem momenta habentes eundem effectum producent, dummodo illis aequales et contrariae in centro inertiae applicentur. Verum hic non sufficit, ut vires idem habeant momentum respectu unius cujuspiam axis, sed necesse est, ut respectu omnium plane axium eadem momenta producant, alioquin non pro aequivalentibus essent habendae. Hoc autem evenit, dummodo pro tribus axibus principalibus eadem momenta suppeditent, id quod sequente propositione extra dubium collocabitur.

PROBLEMA. 87.

798. Dum corpus rigidum circa axem quemcunque per centrum inertiae transeuntem data celeritate angulari gyratur, definire virium

Digitized by Google

momenta respectu trium axium principalium, quibus tam ipsi axi gyrationis quam celeritati angulari data immutatio inducatur.

SOLUTIO.

Fig. 103. Manentibus pro axe gyrationis IO angulis AIO $= \alpha$, BIO $= \mathfrak{C}$, CIO $= \gamma$, circa quem corpus jam gyretur celeritate angulari $\varkappa$ in sensum ABC; haeque quantitates tempusculo dt differentialibus suis crescere debeant; considerentur pro elemento corporis quocumque dM in Z coordinatis IX $= x$, XY $= y$ et YZ $= z$ determinato vires elementares ante definitae

$$Za = p = \frac{du\,dM}{2g\,dt}; \quad Zb = q = \frac{dv\,dM}{2g\,dt}; \quad Zc = r = \frac{dw\,dM}{2g\,dt},$$

ex quibus respectu axis IA oritur momentum in sensum BC

$$= ry - qz = \frac{dM}{2g\,dt}\,(ydw - zdv)$$

at respectu axis IB momentum in sensum CA

$$= pz - rx = \frac{dM}{2g\,dt}\,(zdu - xdw)$$

ac denique respectu axis IC momentum in sensum AB

$$= qx - py = \frac{dM}{2g\,dt}\,(xdv - ydu).$$

Quodsi hic pro du, dv, dw formulas ante inventas substituamus, reperiemus:

$$ydw - zdv = d\varkappa\,((yy+zz)\cos\alpha - xy\cos\mathfrak{C} - xz\cos\gamma) - \varkappa(yy+zz)\,d\alpha\,\sin\alpha + \varkappa xy\,d\mathfrak{C}\,\sin\mathfrak{C} + \varkappa xz\,d\gamma\,\sin\gamma + \varkappa\varkappa dt\,((yy-zz)\cos\mathfrak{C}\cos\gamma + xy\cos\alpha\cos\gamma - xz\cos\alpha\cos\mathfrak{C} - yz\,(\sin\gamma^2 - \sin\mathfrak{C}^2))$$

$$zdu - xdw = d\varkappa\,((xx+zz)\cos\mathfrak{C} - yz\cos\gamma - xy\cos\alpha) - \varkappa(xx+zz)\,d\mathfrak{C}\,\sin\mathfrak{C} + \varkappa yz\,d\gamma\,\sin\gamma + \varkappa xy\,d\alpha\,\sin\alpha + \varkappa\varkappa dt\,((zz-xx)\cos\alpha\cos\gamma + yz\cos\alpha\cos\mathfrak{C} - xy\cos\mathfrak{C}\cos\gamma - xz\,(\sin\alpha^2 - \sin\gamma^2)),$$

$$xdv - ydu = d\varkappa\,((xx+yy)\cos\gamma - xz\cos\alpha - yz\cos\mathfrak{C}) - \varkappa(xx+yy)\,d\gamma\,\sin\gamma + \varkappa xz\,d\alpha\,\sin\alpha + \varkappa yz\,d\mathfrak{C}\,\sin\mathfrak{C} + \varkappa\varkappa dt\,((xx-yy)\cos\alpha\cos\mathfrak{C} + xz\cos\mathfrak{C}\cos\gamma - yz\cos\alpha\cos\gamma - xy\,(\sin\mathfrak{C}^2 - \sin\alpha^2)).$$

Multiplicentur jam hae formulae per $\frac{dM}{2g\,dt}$, et per totam corporis molem

Digitized by Google

lem integrentur : quem in finem sint Maa, Mbb, Mcc, momenta inertiae respectu axium principalium IA, IB, IC, et cum sit

$$\int xxdM = \tfrac{1}{2} M (bb + cc - aa) ; \int yzdM = 0$$
$$\int yydM = \tfrac{1}{2} M (aa + cc - bb) ; \int xzdM = 0$$
$$\int zzdM = \tfrac{1}{2} M (aa + bb - cc) ; \int xydM = 0$$

obtinebimus terna virium momenta respectu axium principalium, quibus effectus praescriptus producitur, ita expressa :

I. Momentum virium respectu axis IA in sensum BC

$$\frac{M}{2gdt} (aa d\omega \cos\alpha - \omega\omega aa d\alpha \sin\alpha + \omega\omega (cc - bb) dt \cos\beta \cos\gamma)$$

II. Momentum virium respectu axis IB in sensum CA

$$\frac{M}{2gdt} (bb d\omega \cos\beta - \omega\omega bb d\beta \sin\beta + \omega\omega (aa - cc) dt \cos\alpha \cos\gamma)$$

III. Momentum virium respectu axis IC in sensum AB

$$\frac{M}{2gdt} (cc d\omega \cos\gamma - \omega\omega cc d\gamma \sin\gamma + \omega\omega (bb - aa) dt \cos\alpha \cos\beta)$$

COROLL. 1.

799. Ut ergo corpus circa eundem axem uniformiter gyretur, terna momenta virium ob $d\omega = 0$, $d\alpha = 0$, $d\beta = 0$, $d\gamma = 0$, erunt

$$\text{I.} = \frac{M\omega\omega (cc - bb) \cos\beta \cos\gamma}{2g} ; \text{II.} = \frac{M\omega\omega (aa - cc) \cos\alpha \cos\gamma}{2g}$$

$$\text{et III.} = \frac{M\omega\omega (bb - aa) \cos\alpha \cos\beta}{2g}$$

quae, nisi axis gyrationis in aliquem axium principalium incidat, non evanescunt.

COROLL. 2.

800. Simili modo intelligitur, quibusnam viribus sit opus, ut vel sola celeritas angularis mutetur, vel sola axis gyrationis positio varietur : scilicet vires, quarum momenta cum ante definitis conveniant, hoc praestabunt, si modo illis aequales et contrariae in centro inertiae applicentur, ut ipsae vires pro evanescentibus haberi queant, totusque effectus solis earum momentis debeatur.

COROLL. 3.

801. Si corpus circa ipsum axem principalem IA celeritate angulari ω gyretur, quae suo differentiali $d\omega$ augeri debeat, ob $\alpha = 0$, et

$\beta = \gamma = 90°$, ad hoc tantum respectu axis IA requiritur momentum virium $= \frac{Maa d\omega}{2g dt}$, uti jam supra invenimus.

SCHOLION.

802. Problema hoc haud difficilius solutu fuisset, si corpori praeter motum gyratorium insuper motum progressivum quemcunque tribuissemus, qui tempusculo dt etiam praescripto modo variari deberet: si enim centrum inertiae motum habeat quemcunque, qui secundum axes principales resolutus praebeat celeritates l, m, n, tempusculo dt suis quoque differentialibus augendas, celeritates u, v, w supra valores ex motu gyratorio natos his progressivis l, m, n augeri deberent, atque ex harum incrementis nascerentur vires, quarum aequivalens per centrum inertiae transiret, pariterque se haberet, ac si corpus sine ullo motu gyratorio hunc solum motum progressivum prosequi deberet. Quo id confirmatur, quod jam supra ostendimus, in tali motu mixto semper motum progressivum et gyratorium separari, et utrumque seorsim, quasi alter non adesset, considerari ac determinari licere.

PROBLEMA. 88.

803. Si corpus rigidum, dum circa datum axem IO data celeritate angulari $= \omega$ gyratur, a viribus quibuscunque sollicitetur, quibus simul aequales et contrariae ipsi centro inertiae sint applicatae, determinare tam variationem axis, quam mutationem celeritatis angularis elemento temporis dt productum.

SOLUTIO.

Colligantur virium sollicitantium momenta respectu ternorum axium principalium corporis, sitque

momentum virium respectu axis IA in sensum BC $= P$
momentum virium respectu axis IB in sensum CA $= Q$
momentum virium respectu axis IC in sensum AB $= R$.

Momenta autem inertiae corporis respectu eorundem axium sint ut hactenus Maa, Mbb, Mcc. Quod si jam corpus gyretur in sensum ABC celeritate angulari $= \omega$ circa axem IO, cujus inclinationes ad eosdem axes principales nunc sint AIO $= \alpha$, BIO $= \beta$, CIO $= \gamma$, hae quantitates tempusculo dt sequentes mutationes subibunt,

$\frac{2gPdt}{Maa}$

Digitized by Google

$$\frac{2gPdt}{Maa} = d\alpha\cos\alpha - \alpha d\alpha \sin\alpha + \frac{cc-bb}{aa}\alpha\alpha dt\cos\beta\cos\gamma$$
$$\frac{2gQdt}{Mbb} = d\alpha\cos\beta - \alpha d\beta \sin\beta + \frac{aa-cc}{bb}\alpha\alpha dt\cos\alpha\cos\gamma$$
$$\frac{2gRdt}{Mcc} = d\alpha\cos\gamma - \alpha d\gamma \sin\gamma + \frac{bb-aa}{cc}\alpha\alpha dt\cos\alpha\cos\beta$$

ex quibus aequationibus quaternae incognitae α, β, γ, et α determinantur, quoniam tantum pro tribus sunt habendae ob $\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$. Cum igitur sit $d\alpha \sin\alpha\cos\alpha + d\beta \sin\beta\cos\beta + d\gamma \sin\gamma\cos\gamma = 0$, si prima per $\cos\alpha$, secunda per $\cos\beta$, tertia per $\cos\gamma$ multiplicetur, productis addendis prodibit:

$$d\alpha + \left(\frac{cc-bb}{aa} + \frac{aa-cc}{bb} + \frac{bb-aa}{cc}\right)\alpha\alpha dt\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = \frac{2gdt}{M}\left(\frac{P\cos\alpha}{aa} + \frac{Q\cos\beta}{bb} + \frac{R\cos\gamma}{cc}\right)$$

seu

$$d\alpha = \frac{(cc-bb)(aa-cc)(bb-aa)}{aabbcc}\alpha\alpha dt\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma + \frac{2gdt}{M}\left(\frac{P\cos\alpha}{aa} + \frac{Q\cos\beta}{bb} + \frac{R\cos\gamma}{cc}\right)$$

quo valore substituto obtinebuntur hae aequationes:

$$\alpha d\alpha \sin\alpha = \frac{cc-bb}{aa}\alpha\alpha dt\cos\beta\cos\gamma\left(1 + \frac{(aa-cc)(bb-aa)}{bbcc}\cos\alpha^2\right) + \frac{2gdt}{M}\left(\frac{Q\cos\alpha\cos\beta}{bb} + \frac{R\cos\alpha\cos\gamma}{cc} - \frac{P\sin\alpha^2}{aa}\right)$$
$$\alpha d\beta \sin\beta = \frac{aa-cc}{bb}\alpha\alpha dt\cos\alpha\cos\gamma\left(1 + \frac{(bb-aa)(cc-bb)}{aacc}\cos\beta^2\right) + \frac{2gdt}{M}\left(\frac{R\cos\beta\cos\gamma}{cc} + \frac{P\cos\beta\cos\alpha}{aa} - \frac{Q\sin\beta^2}{bb}\right)$$
$$\alpha d\gamma \sin\gamma = \frac{bb-aa}{cc}\alpha\alpha dt\cos\alpha\cos\beta\left(1 + \frac{(cc-bb)(aa-cc)}{aabb}\cos\gamma^2\right) + \frac{2gdt}{M}\left(\frac{P\cos\gamma\cos\alpha}{aa} + \frac{Q\cos\gamma\cos\beta}{bb} - \frac{R\sin\gamma^2}{cc}\right).$$

At si prima illarum aequationum per $aa\cos\alpha$, secunda per $bb\cos\beta$, tertia per $cc\cos\gamma$ multiplicetur, eas addendo orietur

$$\frac{2gdt}{M}$$

$$\frac{2gdt}{M}(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) = d\varkappa(aa\cos\alpha^2 + bb\cos\beta^2 + cc\cos\gamma^2) - \varkappa(aa\,d\alpha\sin\alpha\cos\alpha + bb\,d\beta\sin\beta\cos\beta + cc\,d\gamma\sin\gamma\cos\gamma)$$

quae per $2M\varkappa$ multiplicata et ex altera parte integrata dat

$$M\varkappa\varkappa(aa\cos\alpha^2 + bb\cos\beta^2 + cc\cos\gamma^2) = 4g\int\varkappa dt(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)$$

quae quantitas exprimit corporis vim vivam.

COROLL. 1.

804. Si igitur, dum circa axem quemcunque per centrum inertiae transeuntem gyratur, a viribus quibuscunque sollicitetur, hinc variationes momentaneae tam in situ axis gyrationis respectu axium principalium, quam in celeritate angulari determinantur.

COROLL. 2.

805. Si corpus a nullis plane viribus externis sollicitetur, axis gyrationis cum celeritate angulari ita variantur, ut sit:

I. $d\varkappa = \frac{(cc-bb)(aa-cc)(bb-aa)}{aabbcc}\varkappa\varkappa dt\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

II. $d\alpha\sin\alpha = \frac{cc-bb}{aa}\varkappa dt\cos\beta\cos\gamma\left(1+\frac{(aa-cc)(bb-aa)}{bbcc}\cos\alpha^2\right)$

III. $d\beta\sin\beta = \frac{aa-cc}{bb}\varkappa dt\cos\alpha\cos\gamma\left(1+\frac{(bb-aa)(cc-bb)}{aacc}\cos\beta^2\right)$

IV. $d\gamma\sin\gamma = \frac{bb-aa}{cc}\varkappa dt\cos\alpha\cos\beta\left(1+\frac{(cc-bb)(aa-cc)}{aabb}\cos\gamma^2\right)$

et vis viva $M\varkappa\varkappa(aa\cos\alpha^2 + bb\cos\beta^2 + cc\cos\gamma^2)$ perpetuo manet constans.

COROLL. 3.

806. Si corpus quiescat, ut sit $\varkappa = 0$, ex momentis virium P, Q, R respectu axium principalium sumtis, axis, circa quem corpus primum gyrari incipiet, ex his aequationibus definietur:

$$\frac{Q\cos\alpha\cos\beta}{bb} + \frac{R\cos\alpha\cos\gamma}{cc} - \frac{P\sin\alpha^2}{aa} = 0 \text{ seu } \frac{P}{aa} = \cos\alpha\left(\frac{P\cos\alpha}{aa} + \frac{Q\cos\beta}{bb} + \frac{R\cos\gamma}{cc}\right) - \frac{R\cos\beta\cos\gamma}{cc}$$

Digitized by Google

$$\frac{R\cos\beta\cos\gamma}{cc} + \frac{P\cos\beta\cos\alpha}{aa} - \frac{Q\sin\beta^2}{bb} = 0 \text{ seu } \frac{Q}{bb} = \cos\beta \left(\frac{P\cos\alpha}{aa} + \frac{Q\cos\beta}{bb} + \frac{R\cos\gamma}{cc}\right)$$

$$\frac{P\cos\gamma\cos\alpha}{aa} + \frac{Q\cos\gamma\cos\beta}{bb} - \frac{R\sin\gamma}{cc} = \beta \text{ seu } \frac{R}{cc} = \cos\gamma \left(\frac{P\cos\alpha}{aa} + \frac{Q\cos\beta}{bb} + \frac{R\cos\gamma}{cc}\right)$$

unde cum sit $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = \frac{P}{aa} : \frac{Q}{bb} : \frac{R}{cc}$, erit

$$\cos\alpha = \frac{P}{aa} : r\left(\frac{PP}{aa} + \frac{QQ}{bb} + \frac{RR}{cc}\right)$$

$$\cos\beta = \frac{Q}{bb} : r\left(\frac{PP}{aa} + \frac{QQ}{bb} + \frac{RR}{cc}\right)$$

$$\cos\gamma = \frac{R}{cc} : r\left(\frac{PP}{aa} + \frac{QQ}{bb} + \frac{RR}{cc}\right)$$

ac tempusculo dt fiet:

$$dt = \frac{2gdt}{M} r\left(\frac{PP}{aa} + \frac{QQ}{bb} + \frac{RR}{cc}\right).$$

SCHOLION 1.

807. In hoc ergo solo problemate omnia continentur, quae hactenus per multas ambages magno labore elicuimus, cum tamen hic non nisi primis motus principiis simus usi, omniaque sint maxime perspicua. Ita cum supra, dum corpus quiescit, axem, circa quem ipsi vires primum motum gyratorium imprimunt, vehementer operose determinavissemus, hic ista determinatio instar corollarii ex praesente problemate sponte fluxit: cujus consensus cum superiori quo facilius perspiciatur, ac ne ambiguitas signi radicalis incertam faceret, sit iterum pro axe gyrationis IF angulus AIE $= \eta$ et angulus EIF $= \theta$, erit $\cos\alpha = \cos\eta \cos\theta$; $\cos\beta = -\sin\eta\cos\theta$ et $\cos\gamma = \sin\theta$, unde ob $tang\ \eta = \frac{-\cos\beta}{\cos\alpha}$ Fig. 82. erit $tang\ \eta = \frac{-Qaa}{Pbb}$ et $tang\ \theta = \frac{\cos\gamma}{\cos\alpha\cos\eta} = \frac{Rbb}{Pcc}\cos\eta$. Cum autem vires sollicitantes ibi sint VP $= P$, VQ $= Q$; VR $= R$ existente angulo AIV $= \phi$ et IV $= b$: erit harum virium momentum respectu

axis IA in sensum BC $= Rb \sin \delta$, quod hic nobis est P; tum earum momentum respectu axis IB in sensum CA $= -Rb \cos \delta$, quod hic nobis est Q, et momentum respectu axis IC in sensum AB $= Qb \cos \delta - Pb \sin \delta$, quod hic nobis est R. Quibus valoribus pro P, Q et R positis, habebimus prorsus ut supra $\tang \eta = \frac{aa \cos \delta}{bb \sin \delta}$ et $\tang \theta = \frac{aa(Q \cos \delta - P \sin \delta)}{cc R \sin \delta} \cos \eta$.

Deinde, etiam quae supra de variatione momentanea motus gyratorii, dum corpus a nullis viribus sollicitatum circa axem non principalem gyratur, per nimis intricata ratiocinia tandem eruimus, hic positis virium momentis $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ fiunt planissima, uti in coroll. 2. ostendimus. Quae autem supra vix attingere ausi fueramus, cum corpus insuper a viribus quibuscunque sollicitatur, hic pari facilitate eodemque labore feliciter expedivimus, ita ut in hoc tantum capite a primis motus principiis profecti universam Theoriam motus corporum rigidorum perfecte condidisse videamur.

SCHOLION. 2.

808. Cum autem propositis viribus sollicitantibus quibuscunque, quarum momenta respectu axium principalium in sensum ABC sumta sint P, Q, R, totum negotium in determinatione ternorum angulorum α, β, γ, et celeritatis v versetur, pro quo ternas inveniemus aequationes; quandoquidem anguli illi relationem inter se tenent: aequationes illae levi substitutione multo commodiores reddi possunt. Quodsi enim, quia litteris x, y, z ad indolem corporis indicandam non amplius indigemus, ponamus

$$v \cos \alpha = x; \quad v \cos \beta = y; \quad v \cos \gamma = z;$$

omnes anguli ex calculo eliduntur, summaque totius Theoriae motus corporum rigidorum his tribus formulis satis simplicibus continebitur:

$$dx + \frac{cc - bb}{Mbc} yz \, dt = \frac{2gP \, dt}{Maa}$$

$$dy + \frac{aa - cc}{Mac} xz \, dt = \frac{2gQ \, dt}{Mbb}$$

$$dz + \frac{bb - aa}{Mab} xy \, dt = \frac{2gR \, dt}{Mcc}.$$

Quare si corpus a nullis viribus sollicitetur, statim colligimus $aa \, xdx + bb \, ydy + cc \, zdz = 0$ seu $aa \, xx + bb \, yy + cc \, zz = \text{Const.}$ Tum vero ex

Digitized by Google

ex binis dt elidendo erit $\frac{aadx}{bbdy} = \frac{(cc-bb)y}{(aa-cc)x}$ ideoque integrando $\frac{aa}{cc-bb}$ $xx = \frac{-bb}{aa-cc}yy + \text{Const.}$ Quare si initio fuerit $x = \mathfrak{A}$; $y = \mathfrak{B}$; $z = \mathfrak{C}$, ponamusque $\frac{aa}{cc-bb} = A$; $\frac{bb}{aa-cc} = B$ et $\frac{cc}{bb-aa} = C$, habebitur

$$Axx - Byy = A\mathfrak{A}^2 - B\mathfrak{B}^2 \text{ et } Axx - Czz = A\mathfrak{A}^2 - C\mathfrak{C}^2$$

ideoque $y = \frac{\gamma(Axx - A\mathfrak{A}^2 + B\mathfrak{B}^2)}{\gamma B}$ et $z = \frac{\gamma(Axx - A\mathfrak{A}^2 + C\mathfrak{C}^2)}{\gamma C}$.

Quare cum sit $Adx + yz\,dt = 0$, fiet

$$-dt = \frac{Adx\gamma BC}{\gamma(Axx - A\mathfrak{A}^2 + B\mathfrak{B}^2)(Axx - A\mathfrak{A}^2 + C\mathfrak{C}^2)}$$

sicque etiam hoc problema, quod supra non parum molestiae creaverat, satis expedite est solutum.

PROBLEMA 89.

809. Si ad quodvis tempus noverimus axem gyrationis respectu axium principalium, una cum celeritate angulari corporis circa hunc axem; definire ad quodvis tempus situm axium principalium respectu spatii absoluti.

SOLUTIO.

In spatio absoluto concipiatur sphaera immobilis, in cuius centro versetur corporis centrum inertiae I, in eaque assumatur circulus fixus maximus VXYV, in eoque punctum fixum Z, quo situs axium principalium quovis tempore referatur. Ac nunc quidem elapso tempore t respondeant corporis axes principales in sphaera immobili punctis A, B, C, a quibus si ad Z ducantur arcus circulorum maximorum, vocentur ii $ZA = l$, $ZB = m$ et $ZC = n$, tum vero sint anguli $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$ et $XZC = \nu$. Nunc autem reperiatur axis gyrationis in O, ut sit $AO = \alpha$, $BO = \beta$ et $CO = \gamma$; circa quem corpus gyretur in sensum ABC celeritate angulari $= s$: tempusculo ergo dt polus A vertetur per arculum $Aa = s\,dt\,\sin\omega$, existente Aa ad axem OA normali, ita ut sit Fig. 89.

$$\sin BAa = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha} \text{ et } \cos BAa = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}.$$

At est $\cos ZAB = -\frac{\cos m}{\sin l}$ et $\cos ZAB = \frac{\cos n}{\sin l}$,

unde colligitur

$$\sin ZA\alpha = \frac{\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n}{\sin\alpha\sin l}; \quad \cos ZA\alpha = \frac{\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n}{\sin\alpha\sin l}$$

Ducto jam ex a ad arcum ZA perpendiculo $a\omega$, erit

$$A\omega = \frac{\alpha\,dt}{\sin l}(\cos\gamma\cos m - \cos\beta\cos n) \text{ et } a\omega = \frac{\alpha\,dt}{\sin l}(\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n).$$

Verum est $A\omega = -dl$ et $a\omega = -d\lambda\sin l$

ideoque hinc et ob analogiam sequentes concluduntur differentialium valores:

$$dl\sin l = \alpha dt(\cos\beta\cos n - \cos\gamma\cos m); \quad d\lambda\sin l^2 = -\alpha dt(\cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n)$$

$$dm\sin m = \alpha dt(\cos\gamma\cos l - \cos\alpha\cos n); \quad d\mu\sin m^2 = -\alpha dt(\cos\gamma\cos n + \cos\alpha\cos l)$$

$$dn\sin n = \alpha dt(\cos\alpha\cos m - \cos\beta\cos l); \quad d\nu\sin n^2 = -\alpha dt(\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m).$$

Harum autem ternarum priorum binas resolvisse sufficit, cum sit $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$, iisque resolutis unica reliquarum totum negotium absolvit.

COROLL. 1.

810. Si ponamus $\alpha\cos\alpha = x$; $\alpha\cos\beta = y$ et $\alpha\cos\gamma = z$, ut sit ex momentis virium sollicitantium P, Q, R,

$$dx + \frac{cc-bb}{aa}yzdt = \frac{2gPdt}{Maa}; \quad dy + \frac{aa-cc}{bb}xzdt = \frac{2gQdt}{Mbb};$$

$$dz + \frac{bb-aa}{cc}xydt = \frac{2gRdt}{Mcc};$$

nunc sequentes aequationes adjungi oportet.

$$dl\sin l = dt(y\cos n - z\cos m); \quad dm\sin m = dt(z\cos l - x\cos n);$$

$$dn\sin n = dt(x\cos m - y\cos l);$$

$$d\lambda\sin l^2 = -dt(y\cos m + z\cos n); \quad d\mu\sin m^2 = -dt(z\cos n + x\cos l); \quad d\nu\sin n^2 = -dt(x\cos l + y\cos m).$$

COROLL. 2.

811. Si porro ponamus $\cos l = p$; $\cos m = q$, $\cos n = r$, posteriores aequationes has induent formas, ob $pp + qq + rr = 1$:

$$dp + dt(yr - zq) = 0; \quad dq + dt(zp - xr) = 0; \quad dr + dt(xq - yp) = 0$$

$$d\lambda + \frac{dt(yq+zr)}{qq+rr} = 0; \quad d\mu + \frac{dt(zr+xp)}{pp+rr} = 0; \quad d\nu + \frac{dt(xp+yq)}{pp+qq} = 0;$$

unde etiam fit $xdp + ydq + zdr = 0$, quemadmodum est $pdp + qdq + rdr = 0$.

SCHOLION.

812. Etsi hic problema praecedens, quasi jam esset solutum, spectavi, tamen plerumque ambo problemata conjungi eorumque resolutionem simul instituí oportet, quemadmodum in praecedente capite de motu turbinum usu venit. Haec scilicet amborum problematum conjunctio necessaria est, quando vires sollicitantes a situ corporis absoluto pendent, quod quidem, si vires externae affuerint, semper contingere solet. His igitur casibus, momenta virium P, Q, R arcus l, m, n ac fortasse etiam angulos λ, μ, ν involvent: ita ut omnes aequationes coroll. 1. exhibitae simul perpendi debeant, antequam solutio suscipi queat. Quodsi corpus insuper motu progressivo feratur, fieri solet, ut vires etiam ab eo pendeant, ex quo formulas motum progressivum involventes simul ad reliquas adjici oportebit, quibus casibus solutio maxime complicata reddetur. Nunc igitur his problematibus expeditis problema generale de motu libero corporum rigidorum a viribus quibuscunque sollicitatorum aggredi poterimus.

PROBLEMA. 90.

813. Si corpus rigidum initio quomodocunque projectum deinceps a viribus quibuscunque sollicitetur, quarum actioni libere obsequi queat, ejus motum determinare.

SOLUTIO.

Quod primo ad ejus motum progressivum, seu motum, quo centrum inertiae promovetur, attinet, is per eadem praecepta, quae pro motu punctorum sunt tradita, definietur. Scilicet tota corporis massa, quae sit $= M$, in ejus centro inertiae collecta concipiatur, ac singulis momentis omnes vires, quibus corpus sollicitatur, secundum suam quaeque directionem ipsi centro inertiae applicentur; ut habeatur casus puncti, cujus autem massa finita est censenda $= M$, a viribus sollicitati, cujus propterea motus per praecepta supra tradita determinari vel saltem formulis analyticis exprimi poterit, nulla habita ratione

motus gyratorii, quo interea forte corpus circa centrum inertiae agitetur. Tum vero ad hunc motum inveſtigandum, priori motu progreſſivo penitus ſepoſito, centrum inertiae jam ut quieſcens conſideretur; ac primo quidem corporis terni axes principales explorentur, qui ex centro inertiae I educti ſint IA, IB, IB, eorumque reſpectu momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc: quibus cognitis ſphaera concipiatur immobilis circa centrum inertiae I deſcripta, in qua tam circulus maximus ZXVY quam in eo punctum Z fixum aſſumatur, quo ſitus corporis quovis tempore referatur. Nunc igitur elapſo tempore $= t$ teneat corpus ob motum gyratorium ſitum in figura repraeſentatum, in quo axes principales reſpondeant in ſuperficie ſphaerica punctis A, B, C quadrantis intervallo a ſe invicem diſtantibus: pro quorum ſitu praeſente ponatur;

arcus $ZA = l$, $ZB = m$ et $ZC = n$ item

anguli $XZA = \lambda$; $XZB = \mu$, $XZC = \nu$,

qui quomodo a ſe invicem pendeant, ex ſphaericis eſt manifeſtum. Porro gyretur nunc corpus circa axem IO celeritate angulari $= s$ in ſenſum ABC, ac pro ſitu hujus axis ponantur arcus $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$; atque hae ſunt quantitates per ſua differentialia ita determinanda, ut poſito $t = 0$, ſtatui corporis initiali conveniant. Ad hoc conſiderentur vires corpus nunc ſollicitantes, quarum colligantur momenta inertiae reſpectu axium principalium corporis: ſitque

mom. virium reſpectu axis IA in ſenſum BC $= P$

mom. virium reſpectu axis IB in ſenſum CA $= Q$

mom. virium reſpectu axis IC in ſenſum AB $= R$,

atque ponendo brevitatis gratia $s \cos \alpha = x$, $s \cos \beta = y$, et $s \cos \gamma = z$, ut ſit $s = \sqrt{(xx + yy + zz)}$, ſupra invenimus fore:

$$dx + \frac{cc - bb}{aa}\, yz\,dt = \frac{2gP\,dt}{Maa}$$

$$dy + \frac{aa - cc}{bb}\, xz\,dt = \frac{2gQ\,dt}{Mbb}$$

$$dz + \frac{bb - aa}{cc}\, xy\,dt = \frac{2gR\,dt}{Mcc},$$

quibuscum, poſito $\cos l = p$, $\cos m = q$ et $\cos n = r$, conjungantur hae aequationes:

$$dp + dt\,(yr - zq) = 0;\quad dq + dt\,(zp - xr) = 0,\quad dr + dt\,(xq - yp) = 0$$

$d\lambda$

$$d\lambda + \frac{dt(yq+zr)}{qq+rr} = 0\,;\quad d\mu + \frac{dt(zr+xp)}{rr+pp} = 0\,;\quad d\nu + \frac{dt(xp+yq)}{pp+qq} = 0,$$

quae si ita resolvi et integrari queant, ut ad quodvis tempus t assignari possint quantitates x, y, z, p, q, r, λ, μ, ν, problema erit perfecte solutum. In his postremis autem aequationibus notandum est, esse $pp+qq+rr=1$, unde $pdp+qdq+rdr=0$, tum vero etiam $xdp+ydq+zdr=0$. Denique $sin(\mu-\lambda) = \frac{-cosn}{sinm}$ et $cos(\mu-\lambda) = \frac{-cosl\,cosm}{sinm}$, itaque $tang(\mu-\lambda) = \frac{r}{pq}$; et $tang(\nu-\mu) = \frac{p}{qr}$, tum $tang(\lambda-\nu) = \frac{q}{pr}$ seu $tang(\nu-\lambda) = \frac{-q}{pr}$; ita ut sufficiat angulorum λ, μ, ν unicum invenisse.

SCHOLION.

814. Haec praecepta pro motu corporum rigidorum determinando latissime patent, neque tantum ad motum liberum sunt adstricta: quomodocunque enim eorum motus compescitur, sive super plano quodam, sive juxta alia corpora incedere cogantur, sive quodpiam eorum punctum fixum retineatur, quaestio semper ad tradita praecepta reduci potest. Scilicet qua parte aliud corpus contingunt, ibi dabitur pressio, quae primo indefinite in calculum introducta deinceps ita determinari debet, ut motus propositis conditionibus consentaneus reddatur: atque etiam hoc modo conflictus corporum explorabitur. Cujusmodi investigationes antequam suscipiamus, casum quendam motus liberi expendi conveniet, in quo motus gyratorius circa axem variabilem locum inveniat, dum corpus a viribus externis sollicitatur; cujusmodi motus a vi gravitatis, quippe cujus directio per centrum inertiae cujusque corporis transit, non producitur. Gravissima autem hujus generis quaestio sine dubio in motu vertiginis corporum coelestium versatur, quae autem nonnisi positis Astronomiae Theoreticae principiis suscipi potest. Consensu autem omnium observationum, quas adhuc instituere licuit, compertum est, corpora coelestia perinde moveri, ac si se mutuo attraherent, vel ad se invicem pellerentur viribus, quae sint in ratione reciproca duplicata distantiarum atque insuper massis proportionales. Scilicet quemadmodum quaevis corpora terram versus gravia sunt, ita etiam nisum quendam habent versus omnia corpora coelestia,

qui

qui eo major evadat, quo magis quadratum distantiae diminuatur. Atque ex his viribus Astronomi motus progressivos corporum coelestium scrutari solent, quae investigatio cum ad motus punctorum sit referenda, hic tantum in motus gyratorios corporum coelestium inquiramus, quod argumentum in sequente capite generatim ita pertractare studebo, ut Astronomia inde haud contemnenda incrementa sit consecutura.

CAPUT XVI.

DE MOTU GYRATORIO SEU VERTIGINIS CORPORUM COELESTIUM.

PROBLEMA. 91.

815. Si corporis rigidi singula elementa sollicitentur versus aliquod punctum F viribus, quae sint ut eorum massae per quadrata distantiarum ab eo puncto divisae, determinare harum virium momenta respectu axium principalium corporis.

SOLUTIO.

Fig. 104. Sint IA, IB, IC axes principales corporis, eorumque respectu ejus momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc. Puncti autem F seu centri virium a centro inertiae corporis I distantia ponatur $IF = s$; quae ita ad ternos axes principales corporis sit inclinata, ut sint anguli $AIF = \zeta$; $BIF = \eta$ et $CIF = \theta$, hinc demisso ex F ad planum AIB perpendiculo FE, et ex E ad axem IA normali EA, erit $IA = s\cos\zeta$, $AE = s\cos\eta$ et $EF = s\cos\theta$. Vis porro singula corpora ad punctum F pellens tanta sit, ut in distantia $= s$ aequetur gravitati; in aliis autem distantiis secundum quadrata earum diminuatur. Consideretur nunc corporis elementum quodcunque dM in Z, pro quo sint coordinatae axibus principalibus congruae $IX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, atque vis, qua hoc elementum dM ad punctum F urgetur, erit $= \frac{ss}{ZF^2}dM$. Iam haec vis resolvatur secundum directiones axium Zp, Zq, Zr, eritque

vis secundum $Zp = \frac{ss(s\cos\zeta - x)dM}{ZF^3}$

vis

vis secundum $Zq = \frac{ee(s\cos\eta - y)\,dM}{ZF^3}$

vis secundum $Zr = \frac{ee(s\cos\theta - z)\,dM}{ZF^3}$

atque hinc erunt momenta istarum virium respectu axium principalium:

mom. axis IA in sensum BC $= \frac{ees(y\cos\theta - z\cos\eta)\,dM}{ZF^3}$

mom. axis IB in sensum CA $= \frac{ees(z\cos\zeta - x\cos\theta)\,dM}{ZF^3}$

mom. axis IC in sensum AB $= \frac{ees(x\cos\eta - y\cos\zeta)\,dM}{ZF^3}$.

His igitur momentis per totum corpus colligendis obtinebimus momenta, quae supra litteris P, Q, R indicavimus, ita ut sit ob s quantitatem constantem:

$$P = ees\int \frac{(y\cos\theta - z\cos\eta)\,dM}{ZF^3}$$

$$Q = ees\int \frac{(z\cos\zeta - x\cos\theta)\,dM}{ZF^3}$$

$$R = ees\int \frac{(x\cos\eta - y\cos\zeta)\,dM}{ZF^3}$$

Est autem

$$ZF = r\,((s\cos\zeta - x)^2 + (s\cos\eta - y)^2 + (s\cos\theta - z)^2)$$

seu ob $\cos\zeta^2 + \cos\eta^2 + \cos\theta^2 = 1$:

$$ZF = r\,(ss - 2sx\cos\zeta - 2sy\cos\eta - 2sz\cos\theta + xx + yy + zz).$$

Cum autem in corporibus coelestibus distantia $IF = s$ sit semper vehementer magna prae ipso corpore seu quantitatibus x, y, z, erit satis exacte ad nostrum institutum

$$\frac{1}{ZF^3} = \frac{1}{s^3} + \frac{3x\cos\zeta + 3y\cos\eta + 3z\cos\theta}{s^4}.$$

Quoniam vero ob I centrum corporis inertiae, et IA, IB, IC ejus axes principales habemus $\int x\,dM = 0$, $\int y\,dM = 0$, $\int z\,dM = 0$, atque $\int xy\,dM = 0$, $\int xz\,dM = 0$; $\int yz\,dM = 0$, prodibit his factis substitutionibus:

$$P = eef \frac{(3yy\cos\eta\cos\theta - 3zz\cos\eta\cos\theta)\,dM}{s^4} = \frac{3ee\cos\eta\cos\theta}{s^3} \int (yy - zz)\,dM$$

$$Q = \frac{3ee\cos\zeta\cos\theta}{s^3} \int (zz - xx)\,dM\,;\quad R = \frac{3ee\cos\zeta\cos\eta}{s^3} \int (xx - yy)\,dM.$$

Verum ob data momenta inertiae est

$$\int xx\,dM = \tfrac{1}{2}M(bb + cc - aa)\,;\quad \int yy\,dM = \tfrac{1}{2}M(aa + cc - bb)$$

et $\int zz\,dM = \tfrac{1}{2}M(aa + bb - cc)$: quocirca erit

$$P = \frac{3Mee(cc - bb)\cos\eta\cos\theta}{s^3}$$

$$Q = \frac{3Mee(aa - cc)\cos\zeta\cos\theta}{s^3}$$

$$R = \frac{3Mee(bb - aa)\cos\zeta\cos\eta}{s^3}.$$

COROLL. 1.

816. Haec igitur momenta virium non rigore geometrico sunt definita, sed tantum valent, quando distantia puncti attrahentis magnitudinem corporis attracti longe superat. Atque sic commode evenit, ut ea per momenta inertiae tam concinne exprimi potuerint.

COROLL. 2.

817. Si corpus attractum omnia momenta inertiae habeat inter se aequalia, etiam haec virium momenta evanescunt: eatenus ergo tantum motus gyratorius corporum coelestium ab hujusmodi viribus afficitur, quatenus ea non sunt sphaerica, seu saltem momentis inertiae aequalibus praedita.

SCHOLION. 1.

818. Si quantum hae vires ad motum progressivum conferant, definire velimus, singulas vires elementares ipsi centro inertiae applicare debemus: quas si pro quolibet axe in unam summam colligamus, habebimus totam vim corpus ad motum progressivum sollicitantem. Ut autem ad binas dimensiones variabilium x, y, z ascendamus, accuratius valorem ZF exprimere debemus, ut sit:

$$\frac{2}{ZF^3}$$

Digitized by Google

$$\frac{1}{Zf^3} = \frac{1}{s^3} + \frac{3(x\cos\zeta + y\cos\eta + z\cos\theta}{s^4} + \frac{15(x\cos\zeta + y\cos\eta + z\cos\theta)^2}{2s^5} - \frac{3(xx+yy+zz)}{2s^5}.$$

Haec formula per $(s\cos\zeta - x)dM$ multiplicata, et secundum praecepta superiora integrata dabit $\int \frac{(s\cos\zeta - x)dM}{Zf^3} =$

$$\frac{M\cos\zeta}{ss} + \frac{15\cos\zeta}{2s^4}\int dM\,(xx\cos\zeta^2 + yy\cos\eta^2 + zz\cos\theta^2) - \frac{3\cos\zeta}{2s^4}\int dM\,(xx+yy+zz) - \frac{3\cos\zeta}{s^4}\int xx\,dM$$

quae in hanc formam transmutatur:

$$\frac{M\cos\zeta}{ss} + \frac{3M\cos\zeta}{1.2s^4}(aa(3-5\cos\zeta^2) + bb(1-5\cos\eta^2) + cc(1-5\cos\theta^2)).$$

Quare nanciscemur sequentes tres vires

I. sec. $IA = \frac{Mee\cos\zeta}{ss} + \frac{3Mee\cos\zeta}{2s^4}(aa(3-5\cos\zeta^2) + bb(1-5\cos\eta^2) + cc(1-5\cos\theta^2))$

II. sec. $IB = \frac{Mee\cos\eta}{ss} + \frac{3Mee\cos\eta}{2s^4}(bb(3-5\cos\eta^2) + cc(1-5\cos\theta^2) + aa(1-5\cos\zeta^2))$

III. sec. $IC = \frac{Mee\cos\theta}{ss} + \frac{3Mee\cos\theta}{2s^4}(cc(3-5\cos\theta^2) + aa(1-5\cos\zeta^2) + bb(1-5\cos\eta^2))$.

Hae tres autem vires revocantur primo ad unicam in directione IF solicitantem, quae est:

$$\frac{Mee}{ss} + \frac{3Mee}{2s^4}(aa(1-5\cos\zeta^2) + bb(1-5\cos\eta^2) + cc(1-5\cos\theta^2))$$

cui insuper sunt adjungendae hae ternae

1°. sec. $IA = \frac{3Maee\cos\zeta}{s^4}$; 2°. sec. $IB = \frac{3Mbbee\cos\eta}{s^4}$

3°. sec. $IC = \frac{3Mccee\cos\theta}{s^4}$.

Digitized by Google

Unde patet, si terna momenta inertiae principalia fuerint inter se aequalia, omnes vires ad unicam $\frac{Mre}{ss}$ secundum IF agentem reduci, quae in Theoria Astronomiae spectatur, reliquis vero casibus vis illa centripeta non erit pure quadrato distantiae reciproce proportionalis, sed eo accedunt insuper exiguae particulae biquadrato distantiae reciproce proportionales, quae autem praeterea a situ corporis respectu virium F pendent: ad quam aberrationem in calculo Astronomico attendisse juvabit, praecipue si corpora notabiliter a figura sphaerica recedant.

SCHOLION. 2.

819. Assumsi hic singula corporis elementa versus unicum punctum F urgeri, cum tamen in hypothesi Attractionis etiam ad singula corporis attrahentis elementa sollicitentur. Verum si corpus attrahens fuerit sphaera, certum est, id perinde ad se adtrahere, ac si tota ejus massa in centro esset unita; ita ut nostrum problema etiam hos casus in se complectatur. At si corpus attrahens non fuerit sphaericum, mutabitur quidem paulisper tam ratio reciproca duplicata, quam directio vis, quae non amplius ad certum punctum erit directa: verum haec irregularitas in ingenti distantia penitus evanescere est censenda, praecipue cum corpora coelestia parum a figura sphaerica discrepent. Hic autem quoniam tantum ad motum gyratorium respicio, a motu progressivo mentem abstrahendo, centrum inertiae corporis in quiete considero, ac primo, si ipsum corpus quiescat, circa quemnam axem motum gyratorium sit acceptarum, investigabo.

PROBLEMA. 92.

Tab. XV. Fig. 105.

820. Si corpus quiescat, idque a centro virium F modo ante definito sollicitetur, definire axem circa quem primo instanti motum gyratorium accipiet, ac celeritatem angularem inde genitam.

SOLUTIO.

Corpus ergo in quiete consideramus, seu potius ab ejus motu progressivo mentem abstrahimus: ejus igitur centro inertiae in centro sphaerae constituto sint A, B, C poli axium principalium, eorumque respectu, ut hactenus, momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc. Iam recta ex centro inertiae ad centrum virium ducta trajiciat superficiem sphaericam in puncto F, ut sint arcus $AF = \zeta$, $BF = \eta$, $CF = \theta$; distantia autem centri virium sit $= s$, ejusque vis attrahens tanta, ut in distantia $= c$ aeque-

aequetur gravitati. Hinc virium momenta P, Q, R respectu axium principalium IA, IB, IC sunt:

$$P = \frac{3Mee(cc-bb)\cos\eta\cos\theta}{s^3}; \quad Q = \frac{3Mee(aa-cc)\cos\zeta\cos\theta}{s^3}$$

atque $R = \frac{3Mee(bb-aa)\cos\zeta\cos\eta}{s^3}$.

Quare ex §. 806. corpus gyrari incipiet circa ejusmodi axem IO, ut positis arcubus $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$ futurum sit

$$\cos\alpha = \frac{P}{aa} : r\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)$$

$$\cos\beta = \frac{Q}{bb} : r\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)$$

$$\cos\gamma = \frac{R}{cc} : r\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)$$

tempusculo autem dt acquiret celeritatem angularem nascentem $d\vartheta = \frac{2gdt}{M} r\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right)$ quae in sensum ABC erit directa. Atque ex his distantia poli gyrationis O a puncto F ita reperitur expressa, ut sit

$$\cos OF = \left(\frac{P\cos\zeta}{aa} + \frac{Q\cos\eta}{bb} + \frac{R\cos\theta}{cc}\right) : r\left(\frac{PP}{a^4} + \frac{QQ}{b^4} + \frac{RR}{c^4}\right).$$

COROLL. 1.

821. Memoratu hic dignus est casus, quo centrum virium F cadit intra binos polos principales: cadat enim punctum F in arcum AB et ob $\cos\theta = 0$, et $\cos\zeta^2 + \cos\eta^2 = 1$, erit $P = 0$, $Q = 0$ et $R = \frac{3Mee(bb-aa)\sin\zeta\cos\zeta}{s^3}$; unde etiam fit $\cos\alpha = 0$, et $\cos\beta = 0$, et $\cos\gamma = 1$, ita ut polus gyrationis O cadat in polum principalem C.

COROLL. 2.

822. Eodem casu, quo centrum virium est in plano AIB, et corpus circa axem IC gyrari incipit, primo tempusculo dt acquirit celeritatem angularem nascentem $d\vartheta = \frac{6gee(bb-aa)dt\sin\zeta\cos\zeta}{ccs^3}$ in sensum AB, seu $d\vartheta = \frac{3gee(bb-aa)dt\sin 2\zeta}{ccs^3}$.

COROLL. 3.

823. Quod si ergo eodem casu corpus jam habuerit motum gyratorium circa istum axem IC celeritate $= \varkappa$ in sensum AB, is ob vim sollicitantem versus centrum virium F tendentem accelerabitur, ita ut fiat

$$d\varkappa = \frac{3gee(bb-aa)dt\sin 2\zeta}{ccs^3}.$$

SCHOLION.

824. Hinc ergo evidens est, si centrum virium F ita circa corpus circumferatur; ut per circulum maximum AB duos axes principales IA et IB continentem incedat, corpusque circa reliquum axem principalem IC gyrari coeperit: tum perpetuo circa eundem axem IC esse gyraturum, solamque celeritatem angularem $\varkappa$ modo auctum modo minutum iri. Casus hic omnino dignus est, qui omni studio evolvatur: quoniam motum libratorium lunae, quo semper fere eandem faciem terrae obvertit, complecti videtur. Quae investigatio quo facilior et clarior reddatur, primo centrum virium motu uniformi circa corporis centrum inertiae in eodem plano circumferri, ac perpetuo eandem distantiam servare assumamus.

PROBLEMA. 93.

825. Si corpus gyretur circa suum axem principalem IC, centrum virium autem F in plano ad eum normali uniformiter circumferatur, ejus distantia a centro inertiae corporis eadem manente, definire motum gyratorium hujus corporis.

SOLUTIO.

Fig. 106. Quoniam ergo axis gyrationis IC manet constans, et coeli respectu quasi fixus: sit XCY hemisphaerium coeleste, et XY circulus maximus polo C descriptus, in quo centrum virium F uniformiter incedat, atque in hoc circulo quoque constanter inerunt bini reliqui poli principales corporis A et B. Ponatur celeritas angularis centri virium $F = \delta$, quod cum initio fuisset in X, tempore elapso $= t$ arcum descripserit necesse est $XF = \delta t$. Eodem autem temporis momento alter axis principalis reperiatur in A, positoque arcu $X\Lambda = \lambda$, si celeritas angularis corporis circa axem IC sit $= \varkappa$, in sensum AB, erit $d\lambda = \varkappa dt$. Tum vero ob $AF = \delta t - \lambda$, quod supra erat ζ, hic nobis est $\delta t - \lambda$; at retentis reliquis quantitatibus aa, bb, cc, itemque ee et s, quae sunt constantes;

Digitized by Google

ſtantes, ut ſupra, habebimus hanc aequationem $d\varepsilon = \frac{3gee(bb-aa)}{ccs^3} dt \, sin\, 2\zeta$. Introducamus autem angulum ACF $= \zeta$, et ob $\zeta = \delta t - \lambda$, nanciſcemur $\lambda = \delta t - \zeta$ et $d\lambda = \delta dt - d\zeta = \varepsilon dt$, unde ſit $\varepsilon = \delta - \frac{d\zeta}{dt}$. Quocirca ſumto elemento dt conſtante prodit haec aequatio reſolvenda:

$$dd\zeta + \frac{3gee(bb-aa)}{ccs^3} dt^2 \, sin\, 2\zeta = 0.$$

Statuamus brevitatis gratia $\frac{3gee(bb-aa)}{ccs^3} = N$, et multiplicando per $2d\zeta$ ſit

$$2d\zeta \, dd\zeta + 2N dt^2 d\zeta \, ſi 2\zeta = 0$$

cujus integralis eſt: $d\zeta^2 - N dt^2 \, cos\, 2\zeta = C dt^2$, unde colligitur $dt = \frac{d\zeta}{r(C + N cos\, 2\zeta)}$,

atque $\varepsilon = \delta - r(C + N \, cos\, 2\zeta)$.

Ex illa autem aequatione ad quodvis tempus t arcum AF $= \zeta$ definiri oportet, qui ſi eſſet conſtans, corpus perpetuo eandem faciem centro virium F obverteret. Quatenus ergo N non eſt $= 0$, et angulus ζ variationi obnoxius, celeritas angularis ε eſt variabilis: ad quae phaenomena exploranda binos caſus evolvi decet, prout fuerit vel $bb > aa$ vel $bb < aa$, quorum uterque pro ratione conſtantis C infinitam varietatem complectitur.

CASUS I. quo $bb > aa$.

826. Sit igitur $\frac{3gee(bb-aa)}{ccs^3} = n$ numero poſitivo, et dum centrum virium F celeritate δ per circulum XFY progreditur, et ad tempus t arcus FA in antecedentia vergens vocetur $= \zeta$, erit $dt = \frac{d\zeta}{r(C + n cos\, 2\zeta)}$ ubi ratione conſtantis C ſequentia annoto:

1°. Si $C = -n$, (nam valorem negativum majorem habere nequit), erit $dt = \frac{d\zeta}{r n(-1 + cos\, 2\zeta)}$, ideoque angulus ζ neceſſario eſt $= 0$; ſcilicet punctum A cum F ſemper congruet, cum eoque uniformiter circa axem IA gyrabitur.

2°. Si

2°. Si $C = 0$, angulus ζ minor erit semirecto sive positivus sive negativus, et intra limites $+45°$ et $-45°$ vagabitur: Punctum A ergo nunquam ultra 45° a puncto F recedet, sed modo ante modo post id reperietur, qui motus ex aequatione $dt = \frac{d\zeta}{\gamma n \cos 2\zeta}$ colligi debet.

3°. Si $C = n$; et aequatio $dt = \frac{d\zeta}{\gamma n(1+\cos 2\zeta)}$ abit in hanc $dt = \frac{d\zeta}{\cos\zeta^2 \gamma 2n}$, quae integrata dat $t = \frac{1}{\gamma 2n}\, l\, tang\,(45° + \frac{1}{2}\zeta)$, si sumto $t = 0$ fuerit $\zeta = 0$, unde patet demum elapso tempore infinito fieri $\zeta = 90°$.

4°. Si $C > n$, punctum A ab F tempore finito ad 90° digredietur, indeque porro in oppositum ipsi F punctum progredietur, et ad alteram partem circumeundo iterum in F revertet. Sit enim $C = mmn$, existente mm numero unitate majore, ob $dt = \frac{d\zeta}{\gamma n(mm+\cos 2\zeta)}$, erit proxime $dt = \frac{d\zeta}{\gamma n}\left(\frac{1}{m} - \frac{\cos 2\zeta}{2m^3}\right)$ et integrando $t\gamma n = \frac{\zeta}{m} - \frac{\sin 2\zeta}{4m^3}$: unde patet angulum ζ successive per omnes valores migrare.

5°. Hactenus posuimus $\varepsilon < \delta$, ita ut motus puncti F celerior sit, quam gyratorius circa axem IC: si contrarium eveniat, tantum signum formulae $\gamma(C + n\cos 2\zeta)$ mutari debet.

CASUS II. quo $bb < aa$.

827. Sit igitur $\frac{3gee(aa-bb)}{ccs^3} = n$, erit $dt = \frac{d\zeta}{\gamma(C - n\cos 2\zeta)}$ et $\varepsilon = \delta - \gamma(C - n\cos 2\zeta)$: in quibus formulis si ponatur $\zeta = 90° + \Phi$, ut jam Φ denotet distantiam poli B a centro virium F antecedentia versus sumtam, resultabunt formulae praecedentes, quae propterea eadem phaenomena exhibebunt.

COROLL. 1.

828. Si ergo ponamus centrum virium F initio cum polo A conveniisse existente $bb > aa$; corpus semper eandem faciem puncto F

Digitized by Google

F obvertet, si celeritas angularis ipsi celeritati centri virium δ fuerit aequalis.

COROLL. 2.

829. Sin autem initio, quo F cum A conveniebat, celeritas corporis angularis γ sit aliquanto major vel minor quam δ, ut differentia non superet $\gamma 2n = \gamma \frac{6gee(bb-aa)}{ccc}$: polus A utrinque ab F digreditur non ultra certum intervallum, et circa punctum F quasi oscillationes peragere videbitur; in quo utique similitudo cum motu lunae libratorio cernitur.

COROLL. 3.

830. In hujusmodi ergo motu libratorio celeritas angularis corporis est maxima vel minima, dum punctum A ipsi F conjungitur, ab eo vel in consequentia vel in antecedentia digressurum: unde celeritas minima major est, quam $\delta - \gamma 2n$. Fieri igitur potest, ut talis motus oriatur, dum initio corpus plane nullum habuit motum gyratorium.

SCHOLION. 1.

831. Dubium ergo relinquitur nullum, quin motus libratorius lunae hac ratione oriatur; atque adeo probabile videtur, in luna eum casum locum habere, quo lunae initio nullus plane motus gyratorius fuerat impressus; tum autem axem lunae principalem IA, cujus respectu momentum inertiae Maa est minimum, terram versus fuisse directum. Quoniam igitur novimus, digressiones poli A ab F esse minimas, tempus harum oscillationum definire poterimus; cum enim arcus $AF = \zeta$ sit valde parvus, erit $\cos 2\zeta = 1 - 2\zeta\zeta$, ideoque $dt = \frac{d\zeta}{\gamma(C+n-2n\zeta\zeta)}$, unde fit integrando $t\gamma 2n = A \sin \frac{\zeta \gamma 2n}{\gamma(C+n)}$. Quare cum in digressione maxima fiat $\zeta = \gamma \frac{C+n}{2n}$, erit tempus, quo punctum A ab F maxime digreditur, $= \frac{\pi}{2\gamma 2n}$ secundis, cujus duplum $\frac{\pi}{\gamma 2n}$ dabit tempus, quo polus A ab F digressus iterum eodem redit. Tum autem celeritas angularis minima, quando scilicet polus A ab F in antecedentia digreditur, erit $= \delta - \gamma(C+n)$: quae ut evanesceat, constans C esse debet

bet $= \delta\delta - n$, unde digreſſio maxima hoc caſu fuerit $= \frac{\delta}{\gamma 2n}$ neceſſe eſt. Conſideremus nunc etiam tempus unius revolutionis centri virium F, quod eſt $= \frac{2\pi}{\delta}$ min. ſec. cujus dimidium ſi aequale ſit uni oſcillationi poli $A = \frac{\pi}{\gamma 2n}$, fiet $\delta = \gamma 2n$, ſeu $n = \frac{\delta\delta}{2}$; ideoque $C = \frac{\delta\delta}{2} = n$; neque ergo digreſſio amplius foret minima, uti aſſumſeramus.

SCHOLION. 2.

832. Hinc igitur concludimus, motum lunae libratorium non ita explicari poſſe, ut ſtatuamus lunae initio nullum plane motum gyratorium fuiſſe impreſſum: ſed potius cum vehementer veriſimile ſit, lunam, ſi ea circa terram in orbita circulari uniformiter circumferretur, quae eſt hypotheſis noſtri problematis, perpetuo eandem plane faciem nobis eſſe obverſuram, neque ullam nutationem in ea obſervatum iri: in eadem hypotheſi ſtatuere debemus, lunae initio talem motum gyratorium fuiſſe impreſſum, ut praeciſe fuerit celeritas angularis $= \delta$, nempe celeritati terrae circa lunam, et ſimul axem ejus IA terram verſus fuiſſe directum. Hoc autem ſatis probabile videtur: cum enim reſpectu axis IA momentum inertiae ſit minimum, ideoque lunae, ſi ejus corpus ſphaeroides oblongum ſtatuatur, axis maximus, cauſa eſſe potuit, quae initio hunc axem ad terram direxerit, atque eidem cauſae fortaſſe tribuendum eſt, quod dum luna primum motum accepit, hic ipſe axis directionem ſuam verſus terram conſervaverit: quod idem eſt, ac ſi celeritas angularis prima ipſi celeritati terrae δ fuiſſet aequalis. Cum igitur luna, ſi circulum circa terram motu uniformi deſcriberet, nobis conſtanter eandem faciem eſſet obverſura, ejus librationes obſervatae motui lunae irregulari, quo modo celerius modo tardius incedit, tribui debent. Quare etiam praecedens problema in hac hypotheſi reſolvamus, ut punctum F neque uniformiter circumferri, neque perpetuo eandem diſtantiam a centro inertiae corporis tenere aſſumamus.

PROBLEMA. 94.

833. Si corpus gyretur circa ſuum axem principalem IC, centrum virium autem F in plano ad eum normali neque uniformiter neque in eadem diſtantia circumferatur: initio vero axis IA fuerit ad centrum virium

virium F directus similemque motum acceperit, definire motum corporis libratorium.

SOLUTIO.

Motus corporis irregularis puncti F ita exprimi poterit, ut tempore t, descripserit arcum $XF = \delta t + \alpha \sin At$; ac pro distantia variabili sit $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{f^3}(1 + \varepsilon \cos At)$. Quare si jam celeritas angularis sit $= v$, posito arcu $XA = \lambda$, erit $d\lambda = v\,dt$, et vocato arcu $AF = \zeta$ habebimus $dv = \frac{3gee(bb-aa)\,dt\,fi\,2\zeta}{ccs^3}$. Cum igitur sit $\lambda = \delta t + \alpha \sin At - \zeta$, erit $v = \delta + An\alpha \cos At - \frac{d\zeta}{dt}$, ideoque posito $\frac{3gee(bb-aa)}{ccf^3} = n$ erit

$$-AAn\alpha\,dt \sin At - \frac{dd\zeta}{dt} = n\,dt\,(1 + \varepsilon \cos At) \sin 2\zeta.$$

Quod si jam assumamus arcum ζ semper manere valde parvum, habebimus hanc aequationem

$$\frac{dd\zeta}{dt^2} + AAn\alpha \sin At + 2n\zeta(1 + \varepsilon \cos At) = 0,$$

cui proxime satisfieri potest ponendo $\zeta = m \sin At$, unde fit $-AAm \sin At + AAn\alpha \sin At + 2mn \sin At = 0$ ob terminum $\varepsilon \cos At$ prae 1 valde parvum. Hinc ergo adipiscimur $m = \frac{AA\alpha}{AA-2n}$, ideoque $\zeta = \frac{AA\alpha}{AA-2n} \sin At$, unde fit $v = \delta + An\alpha \cos At - \frac{A^3\alpha \cos At}{AA-2n} = \delta - \frac{2Aan}{AA-2n} \cos At$. Hic cum sit $XF = \delta t + \alpha \sin At$, pars prior δt vocatur locus medius puncti F, et pars altera $\alpha \sin At$ ejus aequatio seu prostaphaeresis, unde patet digressionem FA huic prostaphaeresi esse proportionalem, eaque majorem ob n numerum positivum. Ita evanescente prostaphaeresi, seu quoties locus verus cum medio congruit, toties corpus eandem faciem centro virium F obvertit, neglectis quidem minoribus inaequalitatibus, quas ratio quantitatis ε inveheret. Verum haec fusius prosequi, atque accuratius determinare sine majori astronomiae cognitione haud convenit.

COROLL. 1.

834. Si ergo inaequalitas motus puncti F ita exprimitur, ut tempore t conficiat arcum $XF = \delta t + \alpha\, si\, At$, eodem tempore fit arcus librationis $FA = \zeta = \frac{AA\alpha}{AA - 2n}\, si\, At$, existente $n = \frac{3gee(bb - aa)}{ccf^3}$: ubi f distantiam mediam centri virium F denotat.

COROLL. 2.

835. Si hunc arcum librationis ζ accuratius definire velimus, variabilitas distantiae $FI = s$ etiam in computum ingreditur, ita ut si fuerit $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{f^3}(1 + \beta\, cos\, At)$, reperiatur $\zeta = \frac{AA\alpha}{AA - 2n}\, sin\, At + \frac{n\alpha\beta}{4(AA - 2n)}\, si\, 2At$.

COROLL. 3.

836. Simili modo si generalius fuerit arcus tempore t confectus $XF = C + \delta t + \alpha\, si\,(At + \mathfrak{A}) + \alpha'\, si\,(A't + \mathfrak{A}')$ &c. et $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{f^3}(1 + \beta\, cos\,(At + \mathfrak{A}) + \beta'\, cos\,(A't + \mathfrak{A}')$ &c.). invenitur proxime arcus librationis

$$FA = \zeta = \frac{AA\alpha}{AA - 2n}\, si\,(At + \mathfrak{A}) + \frac{A'A'\alpha'}{A'A' - 2n}\, si\,(A't + \mathfrak{A}') + \text{\&c.}$$

SCHOLION. 1.

837. Hic jam perinde est, sive numerus $n = \frac{3gee(bb - aa)}{ccf^3}$ sit positivus sive negativus: neque conditio superius requisita, ut pro arcu ζ evanescente esse debeat $bb > aa$, amplius locum habet. Casu enim II (827.) si ponatur $C = n$ fit $dt\sqrt{2n} = \frac{d\zeta}{si\,\zeta}$, et $t\sqrt{2n} = l\, tang\, \frac{1}{2}\zeta - \text{Const.}$ unde si initio $t = 0$, fuerit $\zeta = 0$, constans addenda fit infinita, ideoque nonnisi elapso tempore infinito punctum A ab F digredietur. Quare dum punctum F uniformiter in circulo circumfertur, quicunque axis principalis initio ad punctum F fuerit directus, cum eoque pari celeritate gyrari coeperit, is ei constanter manebit annexus. Ac si deinceps punctum F motum suum vel intendat vel remittat, polus A ab

eo

eo digredietur secundum formulas inventas. Quin etiam patet, si fuerit $n = 0$, seu $bb = aa$, quo casu corpus uniformiter circa polum C gyraretur, digressiones ζ perpetuo differentiae inter locum medium et verum puncti F futuras esse aequales: At si numerus n sit positivus seu $bb > aa$, digressiones ista differentia essent majores, contra autem si $bb < aa$ minores. Ceterum numerus A inaequalitatem motus definiens, ex tempore quo inaequalitas *fit* At ad eosdem valores revertitur, colligi potest, quod si eveniat post tempus $= \Theta$ min. sec. erit $A\Theta = \beta 2\pi$ ideoque $A = \frac{2\pi}{\Theta}$.

SCHOLION. 2.

828. Hinc patet motum libratorium lunae, quo non semper eandem faciem terrae obvertit, potissimum defectui uniformitatis motus, quo terra circa lunam, seu quod idem est, luna circa terram circumferri videtur, tribui debere, neque huc inaequalitatem momentorum principalium in luna multum conferre, quoniam ea tantum coefficientes terminorum afficiuntur. Libratio scilicet adesse posset, etiamsi luna esset corpus sphaericum, seu ejus momenta principalia aequalia. Verum tum nulla ratio patet, cur lunae initio praecise tantus motus gyratorius fuisset impressus, quantum formulae nostrae exhibent: sin autem luna sit corpus sphaeroidicum sive oblongum sive compressum, rationem quodammodo intelligere licet, ob quam initio quidam axis principalis reliquis notabilior terram respicere inceperit: Utrum autem sit sphaeroides oblongum an compressum? ex quantitate librationis dijudicare licet, quae si excedat differentiam inter locum lunae verum ac medium, indicet esse $bb > aa$, seu axem lunae terrae obversum momento minimo gaudere. Verum hic non est locus quicquam definiendi, cum etiam luna ad solem urgeatur, indeque libratio turbetur: praeterea vero quoque uti luna non in eodem plano circa terram movetur, ita etiam vicissim motus centri virium F non in eodem plano circa lunam absolvetur, ex quo haec investigatio vehementer intricata redditur; ut in tractatu generali locum invenire nequeat. Ceterum hoc semper insigne foret mysterium, quod luna initio praecise tantum motum gyratorium, quantum hic librationis casus postulat, acceperit: si enim vel majorem vel minorem accepisset, labente tempore tandem facies opposita nobis obverti debuisset. Interim tamen hoc phaenomenon praescriptum celeritatis gradum non tam exacte postulat, quoniam etsi

fuerit tantillo vel major vel minor, librationes tamen ob problema praecedens contingere deberent; unde illud mysterium haud leviter illustratur. Talis autem latitudo admitti nequit, nisi casu quo $bb > aa$, seu $n > 0$; aequatio enim differentialis $\frac{dd\zeta}{dt^2} + AA\alpha \int At + 2n\zeta (1 + \zeta \cos At) = 0$ generalius accedente constante arbitraria ita integrari potest, ut sit $\zeta = C \sin t\gamma^{2n} + \frac{AA\alpha}{AA-2n} \int At$, unde fit celeritas angularis $\omega = \delta - C\gamma^{2n} \cos t\gamma^{2n} - \frac{2Aan}{AA-2n} \cos At$: ubi etiam pro $t\gamma^{2n}$ scribi potest $(t+\gamma)\gamma^{2n}$, ita ut C et γ pro lubitu assumi queant. Quare cum initio $t = 0$ fuerit $\zeta = C \int \gamma \gamma^{2n}$, dum celeritas angularis impressa sit $= \delta - C\gamma^{2n} \cos \gamma \gamma^{2n} - \frac{2Aan}{AA-2n}$, atque C sit fractio satis parva, motus libratorius sequetur, ut constanter pars quaedam lunae nobis maneat abscondita. At vero etiam fractio $\frac{AA\alpha}{AA-2n}$ esse debet valde parva, ut pro $\int 2\zeta$ recte scribere liceat 2ζ.

SCHOLION. 3.

839. Explicatio ergo motus libratorii lunae huc redit, ut statuamus, lunae corpus esse sphaeroides oblongum, cujus major axis, vel is cujus respectu momentum inertiae est minimum, initio terram versus directus, lunae autem tum circa axem ad planum orbitae terrestris normalem impressus fuerit motus gyratorius, cujus celeritas angularis propemodum motui lunae medio fuerat aequalis, in quo quidem insignis latitudo locum habere potest. Quin etiam sufficit, dummodo axis gyrationis propemodum fuerit ad planum orbitae terrestris normalis, et axis major propemodum tantum terram versus directus: namque etiam his casibus nutatio disci lunae reciproca evenire debet, etiamsi eam haud facile determinare liceat. Quare hoc casu relicto ad alias motus gyratorii perturbationes a viribus centripetis ortas progrediamur, unde nutatio axis terrae explicari possit.

PROBLEMA. 95.

840. Si corpus gyretur circa axem, qui alicui axi principali fuerit proximus, ac simul actioni centri virium subjiciatur, determinare mutatio-

tionem momentaneam, tam in ipso axe gyrationis quam in celeritate angulari productam.

SOLUTIO.

Sint A, B, C, terni poli principales corporis, eorumque respectu Fig. 107.
momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc, corpus autem nunc gyretur circa polum O ipsi A proximum celeritate angulari ω in sensum ABC; unde positis ternis arcubus $OA = \alpha$, $OB = \mathfrak{G}$, $OC = \gamma$, erit arcus α valde parvus, at $\mathfrak{G}$ et γ minime a quadrante discrepabunt, ita ut sit $\cos\alpha = 1$ et $\cos\mathfrak{G} = \cos\gamma = 0$. Quare posito $x = \omega\cos\alpha$, $y = \omega\cos\mathfrak{G}$ et $z = \omega\cos\gamma$, hae litterae y et z pro evanescentibus haberi poterunt, neque tamen earum differentialia, quae erunt $dy = -\omega d\mathfrak{G}$ et $dz = -\omega d\gamma$. Transeat jam recta ad centrum virium ducta per punctum F, sintque arcus $AF = \zeta$, $BF = \eta$, $CF = \theta$; distantia autem centri virium ponatur $= s$, ejusque vis attrahens tanta, ut in distantia $= s$ aequetur gravitati. Ab actione ergo hujus vis quantitates x, y, z tempusculo dt ita immutabuntur, ut sit

$$dx + \frac{cc-bb}{aa}\,yzdt = \frac{6gee(cc-bb)\,dt\cos\eta\cos\theta}{aas^3}$$

$$dy + \frac{aa-cc}{bb}\,xzdt = \frac{6gee(aa-cc)\,dt\cos\zeta\cos\theta}{bbs^3}$$

$$dz + \frac{bb-aa}{cc}\,xydt = \frac{6gee(bb-aa)\,dt\cos\zeta\cos\eta}{ccs^3}.$$

Cum nunc sit $dx = d\omega$, ob y et z evanescentes, erit

$$d\omega = \frac{6gee(cc-bb)\,dt\cos\eta\cos\theta}{aas^3}$$

$$-\omega d\mathfrak{G} = \frac{6gee(aa-cc)\,dt\cos\zeta\cos\theta}{bbs^3}$$

$$-\omega d\gamma = \frac{6gee(bb-aa)\,dt\cos\zeta\cos\eta}{ccs^3}$$

Quam variationem quo diligentius explorémus, quaeramus arcum FO, at ob $\sin BAO = \frac{\cos\gamma}{\sin\alpha}$; $\cos BAO = \frac{\cos\mathfrak{G}}{\sin\alpha}$; $\sin BAF = \frac{\cos\theta}{\sin\zeta}$; $\cos BAF = \frac{\cos\eta}{\sin\zeta}$ fit $\sin FAO = \frac{\cos\gamma\cos\eta - \cos\mathfrak{G}\cos\theta}{\sin\alpha\sin\zeta}$ et $\cos FAO = \frac{\cos\mathfrak{G}\cos\eta + \cos\gamma\cos\theta}{\sin\alpha\sin\zeta}$

hinc.

Digitized by Google

hincque $\cos FO = \cos\zeta \cos\eta + \cos\gamma \cos\theta + \cos\alpha \cos\zeta$: cujus differentiale dat,

$(Fo - FO)\,\sin FO = d\zeta \cos\eta + d\gamma \cos\theta$ ob $\sin\zeta = \sin\gamma = 1$ et $\sin\alpha = 0$.

Quare cum sit $FO = FA = \zeta$ habebitur

$$(Fo - FO)\,\sin\zeta = -\frac{6gee\,dt\cos\zeta\cos\eta\cos\theta}{\alpha^3}\left(\frac{aa-ee}{bb} + \frac{bb-aa}{cc}\right)$$

seu $$Fo - FO = \frac{6gee(cc-bb)(bb+cc-aa)\,dt\cos\zeta\cos\eta\cos\theta}{\alpha bbccs^3}$$ ob

$$tang\,BAO = \frac{\cos\gamma}{\cos\zeta}$$

Pro situ autem puncti o inveniendo habemus

differentiando: $\frac{-OAo}{\cos BAO^2} = \frac{-d\gamma\cos\zeta\sin\gamma + d\zeta\cos\gamma\sin\zeta}{\cos\zeta^2}$ ideoque

$OAo = \frac{d\gamma\cos\zeta\sin\gamma - d\zeta\cos\gamma\sin\zeta}{\sin\alpha^2}$ et $Oo = \gamma\,(d\zeta^2 + d\gamma^2)$. Tum vero cum sit $d\alpha = \frac{-d\zeta\sin\zeta\cos\zeta - d\gamma\sin\gamma\cos\gamma}{\sin\alpha\cos\alpha}$ oritur $tang\ OoA = \frac{d\zeta\sin\zeta\cos\gamma - d\gamma\sin\gamma\cos\zeta}{d\zeta\sin\zeta\cos\zeta + d\gamma\sin\gamma\cos\gamma}$ ob $\cos\alpha = 1$, seu $tang\ OoA = \frac{d\zeta\cos\gamma - d\gamma\cos\zeta}{d\zeta\cos\zeta + d\gamma\cos\gamma}$.

COROLL. 1.

841. Si momenta inertiae respectu axium IB et IG sint aequalia seu $bb = cc$, primo fit $d\alpha = 0$, seu celeritas angularis nullam patitur mutationem : tum vero erit

$$d\zeta = \frac{-6gee(aa-ee)\,dt\cos\zeta\cos\theta}{\alpha ccs^3} \text{ et } d\gamma = \frac{6gee(aa-ee)\,dt\cos\zeta\cos\eta}{\alpha ccs^3}$$

ita ut sit $d\zeta\cos\eta + d\gamma\cos\theta = 0$.

COROLL. 2.

842. Hoc porro casu $bb = cc$, fit $Fo - FO = o$, seu polus gyrationis O ita transfertur in o, ut spatiolum Oo sit normale ad arcum FO : est hoc spatiolum $Oo = \frac{6gee(aa-ee)\,dt\cos\zeta\sin\zeta}{\alpha ccs^3}$, sed jam quaeritur utrum ab O versus FA, an contra sit directum.

CO-

COROLL. 3.

843. Cum autem sit $\int FO$; $\int FAO = \int AO$: $\int AFO$ erit $\int AF\Theta = \frac{\cos\gamma\cos\eta - \cos\zeta\cos\theta}{\int\zeta\int FO}$. Iam quia FO non variatur, fiet secundum figuram, ubi O ad AF accedere sumitur:

$$-OFo.\cos AFO = \frac{-d\gamma\cos\eta + d\zeta\cos\theta}{\int\zeta\int FO} = \frac{-6gee(aa-cc)dt\int\zeta\cos\zeta}{\varkappa ccc\int FO}$$

ideoque $OFo = \frac{6gee(aa-cc)dt\int\zeta\cos\zeta}{\varkappa ccc\int FO\cos AFO}$. Cum igitur sit angulus AFO infinite parvus, et $\cos AFO = 1$, et $FO = FA = \zeta$, erit $OFo = \frac{6gee(aa-cc)dt\cos\zeta}{\varkappa ccc}$. Ergo si $aa > cc$, punctum O ad arcum AF accedit, vel circa A in sensum CB procedit.

SCHOLION.

843. Casus hic quo $bb = cc$, ita ut corpus duo habeat momenta principalia respectu axium IB et IC aequalia, et propemodum circa axem singularem IA gyretur celeritate angulari $\varkappa$ in sensum BC, praecipue locum habet in motu vertiginis terrae, ideoque meretur plenius evolvi. Quod quo facilius fieri possit, cum sit $AO = \alpha$, ponatur angulus $BAO = \varrho$ erit $90 - \zeta = \alpha\cos\varrho$ et $90 - \gamma = \alpha\int\varrho$, unde $\zeta = 90^\circ - \alpha\cos\varrho$ et $\gamma = 90^\circ - \alpha\int\varrho$. Quodsi ergo brevitatis gratia ponamus $\frac{3gee(aa-cc)}{\varkappa ccc} = N$, ut sit $d\zeta = -2Ndt\cos\zeta\cos\theta$ et $d\gamma = 2Ndt\cos\zeta\cos\eta$, erit $-d\alpha\cos\varrho + \alpha d\varrho\int\varrho = -2Ndt\cos\zeta\cos\theta$ et $-d\alpha\int\varrho - \alpha d\varrho\cos\varrho = 2Ndt\cos\zeta\cos\eta$; unde colligitur

$$d\alpha = 2Ndt\cos\zeta(\cos\varrho\cos\theta - \int\varrho\cos\eta)$$
$$\text{et } \alpha d\varrho = -2Ndt\cos\zeta(\int\varrho\cos\theta + \cos\varrho\cos\eta).$$

Si jam centro virium F motum quemcunque tribuamus, etiam tamdiu his formulis uti poterimus, quamdiu arcus $AO = \alpha$ manet tam parvus, ut contractiones adhibitae locum habere possint.

PROBLEMA 96.

844. Si corpus habeat duo momenta principalia aequalia, ac circa tertium axem singularem propemodum gyretur, centrum autem virium uniformiter in circulo circa centrum inertiae corporis circumferatur, ad quodvis tempus situm et motum corporis determinare,

SOLUTIO.

Fig. 108. Progrediatur centrum virium per circulum maximum XFY celeritate angulari $= \delta$, ac tempore elapso $= t$ ex X pervenerit in F, ut sit $XF = \delta t$. In sphaera igitur consideretur circulus fixus XZY, in quo sit Z polus circuli XFY, ut sit angulus $XZF = \delta t$. Nunc autem versetur axis corporis singularis in A, ponaturque angulus $XZA = \lambda$, et arcus $ZA = p$: tum vero corporis quasi primus meridianus sit AB, distans ab arcu ZA angulo $ZAB = q$. Porro gyretur nunc corpus circa axem IO, ut fit arcus minimus $AO = \alpha$, et angulus $BAO = \varrho$, celeritate angulari $= \varepsilon$, quoniam jam novimus eam fore constantem, et punctum A abibit tempusculo dt in a, ut sit $Aa = \varepsilon dt$ sit $\alpha = \alpha\varepsilon dt$ et angulus aAO rectus : quare ob $ZAO = q + \varrho$ erit $ZAa = q + \varrho - 90°$, ideoque demisso $a\alpha$ perpendiculo ad ZA, fiet $a\alpha = -\alpha\varepsilon dt \cos(q + \varrho)$ et $A\alpha = \alpha\varepsilon dt \sin(q + \varrho)$, unde colligimus $dp = -\alpha\varepsilon dt \sin(q + \varrho)$ et $d\lambda = \frac{\alpha\varepsilon dt \cos(q+\varrho)}{\sin p}$: deinde vero quia corpus quasi circa polum A gyratur, erit $dq = \varepsilon dt$. Denique in triangulo AZF ob $ZA = p$; $ZF = 90°$ et $AZF = \lambda - \delta t$, reperitur $\cos FA = \cos\zeta = \sin p \cos(\lambda - \delta t)$; et $\cot ZAF = -\cos p \cot(\lambda - \delta t)$. Ponamus brevitatis gratia angulum ZAF $= \varphi$, ut sit $\tang\varphi = \frac{-\tang(\lambda - \delta t)}{\cos p}$, erit $BAF = \varphi - q$; hinc que $\cos BF = \cos(\varphi - q)\sin\zeta = \cos\eta$ et $\cos CF = \sin(\varphi - q)\sin\zeta = \cos\theta$. Est vero $\sin\varphi\sin\zeta = \sin(\lambda - \delta t)$ et $\cos\varphi\sin\zeta = -\cos p \cos(\lambda - \delta t)$, ideoque $\cos\eta = -\cos p \cos q \cos(\lambda - \delta t) + \sin q \sin(\lambda - \delta t)$ et $\cos\theta = \cos q \sin(\lambda - \delta t) + \cos p \sin q \cos(\lambda - \delta t)$.

Unde si ponatur $\frac{3gee(aa-cc)}{8ccss} = N$, colligitur fore

$$d\alpha = 2N dt \sin p \cos(\lambda - \delta t)(\cos p \sin(q + \varrho)\cos(\lambda - \delta t) + \cos(q + \varrho)\sin(\lambda - \delta t))$$
$$\text{et } \alpha d\varrho = -2N dt \sin p \cos(\lambda - \delta t)(\sin(q + \varrho)\sin(\lambda - \delta t) - \cos p \cos(q + \varrho)\cos(\lambda - \delta t));$$

quibus si adjungamus $dq = \varepsilon dt$ et $dp = -\alpha\varepsilon dt \sin(q + \varrho)$, ex his quatuor aequationibus quatuor quantitates p, q, α et ϱ definiri oportet. Binae autem priores transformantur in has simpliciores :

$$d\alpha \cos(q + \varrho) - \alpha d\varrho \sin(q + \varrho) = 2N dt \sin p \sin(\lambda - \delta t)\cos(\lambda - \delta t)$$
$$d\alpha \sin(q + \varrho) + \alpha d\varrho \cos(q + \varrho) = 2N dt \sin p \cos p \cos(\lambda - \delta t)^2.$$

Cum sit $q = \varepsilon t + C$, ponamus $q + \varrho = \omega$, ut fit $\varrho = \omega - q$, et adjungendo aequationes priores quaternas adhuc habebimus aequationes :

dp

$$dp = -\varepsilon\alpha dt \, \mathit{sin}\,\omega, \quad d\lambda = \frac{\varepsilon\alpha dt \cos\omega}{\sin p}$$

$$d\alpha \cos\omega - \alpha d\omega \sin\omega + \varepsilon\alpha dt \sin\omega = 2Ndt \sin p \sin(\lambda - \delta t) \cos(\lambda - \delta t)$$
$$d\alpha \sin\omega + \alpha d\omega \cos\omega - \varepsilon\alpha dt \cos\omega = 2Ndt \sin p \cos p \cos(\lambda - \delta t)^2$$

ac si insuper ponamus $\lambda - \delta t = \varphi$, quae littera cum praecedente φ non est confundenda, erunt:

$$dp = -\varepsilon\alpha dt \sin\omega; \quad d\varphi = -\delta dt + \frac{\varepsilon\alpha dt \cos\omega}{\sin p}$$

$$d\alpha \cos\omega - \alpha d\omega \sin\omega + \varepsilon\alpha dt \sin\omega = 2Ndt \sin p \sin\varphi \cos\varphi$$
$$d\alpha \sin\omega + \alpha d\omega \cos\omega - \varepsilon\alpha dt \cos\omega = 2Ndt \sin p \cos p \cos\varphi^2.$$

Ponamus porro $\alpha \cos\omega = x$ et $\alpha \sin\omega = y$, ut habeamus has aequationes

$$1^\circ.\ dp = -\varepsilon y dt, \quad 2^\circ.\ d\lambda = \frac{\varepsilon x dt}{\sin p}, \quad 3^\circ.\ d\varphi = -\delta dt + \frac{\varepsilon x dt}{\sin p}.$$

$$4^\circ.\ dx + \varepsilon y dt = Ndt \sin p \sin 2\varphi$$
$$5^\circ.\ dy - \varepsilon x dt = Ndt \sin p \cos p + Ndt \sin p \cos p \cos 2\varphi,$$

ubi cum x et y sint quantitates minimae, ad veritatem satis appropinquabimus, si in binis postremis aequationibus arcum p et angulum λ ut constantes spectemus. Tribuamus ergo illis valores quasi medios, sitque proxime $p = n$, et $\lambda = m$, ideoque $d\varphi = -\delta dt$, ut habeamus aequationes:

$$4^\circ.\ dx - \frac{\varepsilon y d\varphi}{\delta} = -\frac{Nd\varphi}{\delta} \sin n \sin 2\varphi$$

$$5^\circ.\ dy + \frac{\varepsilon x d\varphi}{\delta} = -\frac{Nd\varphi \sin n \cos n}{\delta} - \frac{Nd\varphi \sin n \cos n \cos 2\varphi}{\delta}$$

quibus evidens est satisfieri posse ponendo

$$x = E + F \cos 2\varphi \text{ et } y = G \sin 2\varphi,$$

ac hi coefficientes ita definiuntur, ut sit

$$E = \frac{-N \sin n \cos n}{\varepsilon}; \quad F = \frac{-N \sin n (2\delta + \varepsilon \cos n)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta}; \quad G = \frac{N \sin n (2\delta \cos n + \varepsilon)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta}.$$

Tum vero quia haec solutio tantum esset particularis, ponatur $x = E + F \cos$

$cof\,2\varphi + u$ et $y = G\,fi\,2\varphi + v$, orienturque hae aequationes $du - \frac{\varepsilon v d\varphi}{\delta} = 0$ et $dv + \frac{\varepsilon u d\varphi}{\delta} = 0$, ex quibus elicitur $u = h\,sin\,\frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi + \zeta)$, et $v = h\,cof\,\frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi + \zeta)$, ubi h et ζ sunt constantes arbitrariae. Quocirca habebimus

$$x = \alpha\,cof\,\omega = \frac{-N sin\,cof n}{\varepsilon} - \frac{N sin(\varepsilon cof n + 2\delta)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta}\,cof\,2\varphi + h\,sin\,\frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi + \zeta)$$

$$y = \alpha\,fi\,\omega = \frac{N sin(\varepsilon + 2\delta cof n)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta}\,fi\,2\varphi + h\,cof\,\frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi + \zeta)$$

ubi φ exprimit angulum $FZA = \lambda - \delta t$. Deinde ob $dp = -\varepsilon y dt = \frac{\varepsilon y d\varphi}{\delta}$, nanciscimur integrando:

$$p = n - \frac{\varepsilon N sin(\varepsilon + 2\delta cof n)}{2\delta(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta)}\,cof\,2\varphi + h\,fi\,\frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi + \zeta) = ZA.$$

Denique aequatio $d\lambda = \frac{\varepsilon x dt}{fi\,p} = \frac{-\varepsilon x d\varphi}{\delta sin}$ praebebit:

$$\lambda = m - Nt\,cof n + \frac{\varepsilon N(\varepsilon cof n + 2\delta)}{2\delta(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta)}\,fi\,2\varphi + \frac{h}{sin}\,cof\,\frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi + \zeta) = XZA.$$

COROLL. 1.

845. Cum sit ex nostris positionibus $\alpha = \sqrt{(xx + yy)}$, patet successu temporis distantiam $AO = \alpha$ non ultra certum limitem augeri posse, qui si fuerit satis exiguus, hypothesi nostra tuto utimur. Simul vero patet hanc distantiam α nunquam plane evanescere, nisi forte fiat tam $x = 0$ quam $y = 0$.

COROLL. 2.

846. Neglectis inaequalitatibus ab angulis $2\varphi = 2\,FZA$ et $\frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi + \zeta)$

Digitized by Google

$(\varphi + \zeta)$ pendentibus, polus Z uniformiter circa punctum Z in antecedentia regreditur celeritate angulari $= N \cos n$, si quidem $N = \frac{3gee(aa-cc)}{2ccs}$ fuerit numerus positivus, sicque integram revolutionem absolvet tempore $= \frac{2\pi}{N \cos n}$ min. sec. dum centrum virium F revolutionem absolvit tempore $= \frac{2\pi}{\delta}$, et ipsum corpus tempore $= \frac{2\pi}{\varepsilon}$.

COROLL. 3.

847. Praeterea vero tam distantia ZA, quam angulus XZA exiguas inaequalitates patientur, partim ab angulo $2\varphi = 2FZA$ partim ab angulo $\frac{\varepsilon}{\delta}(\varphi + \zeta) = C - st$, hoc est, partim a motu centri virium, partim a motu vertiginis ipsius corporis pendentes. Quare si ponamus angulum $ZAB = \psi$ erit

$$ZA = n - \frac{\varepsilon N \sin n (\varepsilon + 2\delta \cos n)}{2\delta(2\varepsilon - 4\delta\delta)} \cos 2\varphi - h \sin(\psi + \zeta)$$

$$XZA = m - Nt \cos n + \frac{\varepsilon N(\varepsilon \cos n + 2\delta)}{2\delta(2\varepsilon - 4\delta\delta)} \sin 2\varphi + \frac{h}{\sin n} \cos(\psi + \zeta).$$

SCHOLION. 1.

848. Sumsimus hic corpus in eundem sensum gyrari, in quem centrum virium F circa id circumfertur, quemadmodum fit in terra, quae ab occidente in orientem gyratur, in quem sensum etiam sol et luna motu proprio promoveri cernuntur. Deinde etiam spectavimus numerum $N = \frac{3gee(aa-cc)}{2ccs}$ ut positivum, seu corpus ita comparatum, ut ejus momentum inertiae respectu axis, circa quem proxime gyratur, sit maximum $= Maa$, dum respectu axium in aequatore sumtorum est minimum $= Mcc$, qua proprietate terram esse praeditam observationes circa figuram terrae sphaeroidicam compressam institutae declarant. In hac ergo constitutione axis terrae circa polum ecliptica Z in antecedentia regredi debet, quemadmodum etiam per observationes constat. Praeterea vero neque

iſte axis motus eſt aequabilis, neque ejus diſtantia a polo elepticae Z conſtans, ſed duplici inaequalitati eſt obnoxia, quarum altera ab angulo $FZA = \varphi$ duplicato pendet, altera vero ab ipſo motu vertiginis corporis, quae poſterior major minorve eſſe poteſt, prout initio polus gyrationis O tam ratione poli A quam ratione ſitus centri virium F fuerit conſtitutus. Scilicet cum ω denotet angulum ZAO, ſi initio vel dato ſaltem tempore innotuerint quantitates $AO = a$, $ZAO = \omega$, $FZA = \varphi$, et $ZAB = \psi$, ſumto AB pro corporis primo meridiano, ex his aequationibus

$$a \cos\omega + \frac{N \sin\varepsilon \cos n}{\varepsilon} + \frac{N \sin(\varepsilon \cos n + 2\delta)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta} \cos 2\varphi + b \sin(\psi + \zeta) = 0$$

$$a \sin\omega - \frac{N \sin(\varepsilon + 2\delta \cos n)}{\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta} \sin 2\varphi - b \cos(\psi + \zeta) = 0$$

binae conſtantes b et ζ definiuntur. Niſi ergo prodeat $b = 0$, polus A inaequalitates etiam diurnas patietur, ita ut intervallo cujusque revolutionis ad polum eclipticae alternatim accedat ab eoque recedat, ſimulque alternatim in antecedentia et conſequentia nutet. Ob hanc ſcilicet inaequalitatem polus A ſingulis revolutionibus circulum deſcriberet: cujus centrum cum quieſcat, id potius pro vero polo terrae habebitur, ita ut hae inaequalitates non percipiantur. Tum vero reliquae inaequalitates ab actione centri virium pendentes non hunc polum apparentem, ſed ipſum polum axis principalis afficient.

SCHOLION. 2.

849. Praetermiſſis autem his inaequalitatibus diurnis, quibus forte nutatio axis afficitur, ſi fuerit $aa > cc$ corpusque in eundem ſenſum gyratur ac centrum virium, phaenomena ita ſe habebunt;

Primo diſtantia poli A a puncto Z, quod eſt vertex ſeu polus orbitae, quam centrum virium deſcribit, erit variabilis ac minima quidem deprehendetur, ſi angulus FZA vel evaneſcit, vel fit 180°; maxima autem, ſi iſte angulus fuerit vel 90° vel 270°, differentia inter maximam minimamque diſtantiam exiſtente $= \frac{\varepsilon N \sin(\varepsilon + 2\delta \cos n)}{\delta(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta)}$.

Secundo polus A circa punctum Z in antecedentia motu non uniformi regredietur, qui ſi ut moris eſt per motum medium proſtaphaereſi corrigendum repraeſentetur, motu medio regredietur celeritate angula-

Digitized by Google

angulari $= N \cos n$, tum vero correctio seu proslaphaeresis maxima erit $= \frac{\varepsilon N(\varepsilon \cos n + 2\delta)}{2\delta(\varepsilon\varepsilon - 4\delta\delta)}$, addenda si angulus FZA sit vel 45° vel 225°, subtrahenda vero si iste angulus fiat vel 135° vel 315°, ubi notandum est, hunc angulum FZA $= \varphi$ reperiri, si longitudo centri virium F a longitudine poli A subtrahatur. Ceterum hic celeritatem motus vertiginis ε prae celeritate centri virium δ ut multo majorem spectamus: si enim esset $\varepsilon = 2\delta$, conationes inventae adeo in infinitum abirent; verum hoc casu integratio nostrarum aequationum singulari modo esset instituenda, ponendo $x = E + F \cos 2\varphi + A\varphi \sin 2\varphi$ et $y = G \sin 2\varphi + B\varphi \cos 2\varphi$, reperireturque $E = \frac{-N \sin n \cos n}{2\delta}$, $A = B = \frac{-N \sin n (1 + \cos n)}{2\delta}$ et $F + G = \frac{N \sin n (1 - \cos n)}{4\delta}$. Verum quia hic x et y continuo crescerent, mox hypothesin factam transgrederentur, totusque calculus non amplius locum haberet. Quare nisi $\varepsilon\varepsilon$ notabiliter discrepet a $4\delta\delta$, formulae nostrae adhiberi nequeunt.

CAPUT XVII.

PLENIOR EXPLICATIO MOTUS TURBINUM SUPER PLANO HORIZONTALI SEMOTA FRICTIONE.

DEFINITIO. 14.

850. *Axis turbinis* est recta AF ex cuspide F per centrum inertiae I ducta, qui simul sit ejus axis principalis singularis, ita ut respectu omnium axium ad eum normalium IB momenta inertiae sint inter se aequalia. Fig. 109.

COROLL. 1.

851. Aptissima ergo turbinis figura est tornata, quae generatur, si figura quaecunque circa axem AF revolvitur, dummodo ea in cuspidem F desinat, qua super plano horizontali incedere posset.

CO-

COROLL. 2.

852. In turbine autem sequentes quantitates cognitas esse oportet, quae in calculum ingrediuntur: 1°. ejus massam vel pondus, quod sit = M. 2°. Distantiam cuspidis a centro inertiae, quae sit IF = f; 3°. Momentum inertiae respectu axis AF, quod fit = Maa et 4°. Momentum inertiae respectu omnium axium ad illum normalium, quod sit = Mcc.

COROLL. 3.

853. Cum ergo supra in genere momenta inertiae principalia cujusque corporis posuerimus Maa, Mbb, et Mcc, hic bina posteriora aequalia statuemus, ut sit $bb = cc$.

COROLL. 4.

854. Dum igitur turbo cuspide F super plano horizontali incedit, ejus axis AF non ultra certum terminum ad horizontem inclinari potest, qui habebitur ducendo ab F ad corpus turbinis rectam extremam Fk tum enim angulus AFk dabit illum terminum.

SCHOLION.

855. Supra tantum ejusmodi turbines consideravimus, in quibus omnia momenta inertiae inter se essent aequalia; quae conditio nimium erat limitata. Nunc igitur motum turbinum in genere exploremus, siquidem conditio, quod AF sit axis principalis, et respectu binorum reliquorum axium momenta inertiae aequalia, cum indole turbinum necessario cunjuncta videtur. Principia autem, unde hujus motus determinatio est petenda, supra in Cap. 14. jam sunt exposita, ubi vidimus totum negotium a pressione, qua turbo, dum movetur, cuspide sua F plano horizontali innititur, pendere. Quae pressio, etiamsi nonnisi solutione ad finem perducta cognosci queat, tamen statim ab initio in calculum ingreditur. Sit ergo Π ista pressio, cujus directio a cuspide F semper verticaliter sursum tendit; atque de hac pressione supra §. 767 ostendimus, si inclinatio axis AF ad horizontem ponatur = θ, quae tempusculo dt suo differentiali $d\theta$ crescat, sumto elemento dt constante, fore $\frac{\hat{a}\, d\theta \cos\theta - d\theta^2 \sin\theta}{dt^2} = \frac{2g}{f}\left(\frac{\Pi}{M} - 1\right)$; sive $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{f(dd\theta\cos\theta - d\theta^2\sin\theta)}{2g\,dt^2} = 1 + \frac{f\,d.d\theta\cos\theta}{2g\,dt^2} = 1 + \frac{f\,dd.\sin\theta}{2g\,dt^2}$.

Cum igitur turbo praeter hanc vim Π a gravitate tantum urgeri statuatur,

Digitized by Google

tuatur, ejus centrum inertiae I alium motum recipere nequit, nisi in directione verticali vel ascendendo vel descendendo, dum ejus distantia a plano horizontali est $= f \sin \theta$. Sin autem initio ei insuper quidam motus horizontalis fuerit impressus, eum constanter aequabilem conservabit, sicque tota quaestio ad solum motum gyratorium reducitur. Quare cum gravitas ad eum nihil conferat, ejusque perturbationes omnes a sola pressione Π oriantur, hujus vis momenta respectu axium principalium turbinis definiri oportet.

PROBLEMA. 97.

856. Si turbo teneat situm quomodocunque inclinatum ad horizontem, simulque detur pressio Π, qua ejus cuspis horizontali plano innititur, definire hujus vis momenta respectu axium principalium turbinis.

SOLUTIO.

Descripta sphaera circa centrum inertiae turbinis I, in qua sit Z punctum verticale, axis turbinis autem sphaeram trajiciat in punctis A et F, bini reliqui vero axes principales pertingant ad sphaerae puncta B et C: etsi enim hi duo axes per se non determinantur, tamen certas duas lineas tam inter se quam ad axem AF normales accipi convenit, ex quibus deinceps situs turbinis ad quodvis tempus definiatur. Fig. 110.

Ponantur arcus circulorum maximorum $ZA = l$, $ZB = m$, et $ZC = n$, erit $l = 90° - \theta$ denotante θ inclinationem axis AF ad horizontem. Cum jam cuspis F, cujus distantia a centro inertiae I est $FI = f$, urgeatur in directione verticali $F\Pi$ vi $= \Pi$, ut sit angulus $AF\Pi = l$, resolvatur ea secundum directiones FA et FV, quarum haec FV sit in plano verticali AZF ad AF normalis, erit vis sec. $FA = \Pi \cos l$, et vis sec. $FV = \Pi \sin l$, quarum illa per centrum inertiae transiens nulla praebet momenta. Haec vero vis $FV = \Pi \sin l$ respectu axis AF quoque nullum praebet momentum; at respectu axis IB dat momentum $= \Pi f \sin l \sin$ VFB in sensum AC, similique modo respectu axis IC momentum $= \Pi f \sin l \sin$ VFC in sensum BA. Verum est ang. VFB $=$ ZAB, et $\sin$ ZAB $= -\cos$ ZAC $= -\frac{\cos n}{\sin l}$, tum vero ang. VFC $=$ ZAC et $\sin$ ZAC $= \cos$ ZAB $= \frac{\cos m}{\sin l}$. Quamobrem habebimus

mom. resp. axis IB $= -\Pi f \cos n$ in sensum AC
mom. resp. axis IC $= \Pi f \cos m$ in sensu BA

et quia momenta virium respectu axium IA, IB, IC in sensum BC,

CA, AB supra in genere posuimus P, Q, R, erit pro nostro casu:

$$P = 0; \quad Q = +\Pi f \cos n \text{ et } R = -\Pi f \cos m.$$

PROBLEMA. 98.

857. Si turbo in situ quocunque inclinato gyretur circa axem quemcunque, per ejus centrum inertiae transeuntem, definire variationem momentaneam tam in axe gyrationis quam in celeritate angulari productam.

SOLUTIO.

Fig. III. Circa centrum inertiae I constituta sphaera immobili, in qua sit Z punctum verticale, et ZX circulus verticalis fixus; teneat jam turbo ejusmodi situm, ut axis turbinis proprius respondeat sphaerae puncto A, bini reliqui autem axes principales punctis B et C, ponanturque horum axium declinationes a verticali seu arcus $ZA = l$, $ZB = m$, $ZC = n$, ut sit $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$: tum vero anguli $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$, et $XZC = \nu$, quorum relationes ad illos arcus sunt cognitae. Nunc autem turbo gyretur circa axem IO celeritate angulari $= \omega$ in sensum ABC, sintque pro polo gyrationis O arcus $AO = \alpha$, $BO = \beta$, et $CO = \gamma$, atque ponendo $\omega \cos \alpha = x$, $\omega \cos \beta = y$, $\omega \cos \gamma = z$ ob momenta virium $P = 0$, $Q = \pi f \cos n$, et $R = -\pi f \cos m$, atque $bb = cc$, variationes tempusculo dt productae sequentibus formulis exprimentur:

I. $dx = 0$

II. $dy + \frac{aa - cc}{cc} xz\,dt = \frac{2\Pi f g\,dt \cos n}{Mcc}$

III. $dz - \left(\frac{aa - cc}{cc}\right) xy\,dt = -\frac{2\Pi f g\,dt \cos m}{Mcc}$

Praeterea vero has aequationes pro l, m, n, λ, μ, ν, adjungi oportet:

$$dl \sin l = dt\,(y \cos n - z \cos m); \quad d\lambda \sin l^2 = -dt\,(y \cos m + z \cos n)$$
$$dm \sin m = dt\,(z \cos l - x \cos n); \quad d\mu \sin m^2 = -dt\,(z \cos n + x \cos l)$$
$$dn \sin n = dt\,(x \cos m - y \cos l); \quad d\nu \sin n^2 = -dt\,(x \cos n + y \cos m).$$

Cum autem inclinatio axis ad horizontem sit $= 90^\circ - l$ quae supra posita est θ, ob $\sin \theta = \cos l$ erit $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{f d d . \cos l}{2g\,dt^2}$. Ad haec magis contrahenda statuamus:

cos

$\cos l = p$; $\cos m = q$; $\cos n = r$

et habebimus $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{f\delta dp}{2g\,dt^2}$, ac praeterea has aequationes:

I. $dx = 0$

II. $dy + \frac{(aa-cc)xz\,dt}{cc} = \frac{2\Pi fgr\,dt}{Mcc}$

III. $dz - \frac{(aa-cc)xy\,dt}{cc} = \frac{-2\Pi fgq\,dt}{Mcc}$

IV. $dp = dt\,(qz - ry)$; VII. $d\lambda = \frac{-dt(qy+rz)}{1-pp}$

V. $dq = dt\,(rx - pz)$; VII. $d\mu = \frac{-dt(rz+px)}{1-qq}$

VI. $dr = dt\,(py - qx)$; IX. $d\nu = \frac{-dt(px+qy)}{1-rr}$

ubi notandum est, esse $pp + qq + rr = 1$.

COROLL. 1.

858. Si turbo circa ipsum axem IA gyretur, ut sit $\alpha = 0$ et $\zeta = \gamma = 90°$, erit $x = \varkappa$, $y = 0$ et $z = 0$, et $dx = d\varkappa$, $dy = -\varkappa d\zeta$, $dz = -\varkappa dy$. Fiet ergo

$$d\varkappa = 0\,;\; d\zeta = \frac{-2\Pi fgr\,dt}{\varkappa Mcc},\; dy = \frac{2\Pi fgq\,dt}{\varkappa Mcc};$$

$$dp = 0\,;\; dq = \varkappa r\,dt\,;\; dr = -\varkappa q\,dt\,,\text{ et } d\lambda = 0,$$

tum ergo primo instanti neque celeritas angularis $\varkappa$, neque situs puncti A, mutationem patitur.

COROLL. 2.

859. Cum sit $dp = dt\,(qz - ry)$ erit differentiando $ddp = dt\,(qdz - rdy) + dt\,(zdq - ydr)$, et substitutis valoribus datis reperietur:

$$\frac{dd\,q}{dt^2} = \frac{(aa-cc)x}{cc}(qy+rz) - \frac{2\Pi fg}{Mcc}(qq+rr) + x\,(qy+rz) - p\,(yy+zz)$$

unde fit

$$\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{f(aa-cc)x}{2gcc}(qy+rz) - \frac{\Pi ff}{Mcc}(qq+rr) + \frac{fx(qy+rz)}{2g} - \frac{fp(yy+zz)}{2g}$$

$$\text{seu } \frac{\Pi}{M}\left(1+\frac{ff(qq+rr)}{cc}\right)=1+\frac{faax(qy+rz)}{2gc^3c}-\frac{fp(yy+zz)}{2g},$$

$$\text{hincque } \frac{\Pi}{M}=\frac{2gcc+faa(qy+rz)-fcp(yy+zz)}{2gcc+2gff(qq+rr)}.$$

COROLL. 3.

860. Ex aequationibus IV. V. VI. colligitur, ut jam ante notavimus, $xdp+ydq+zdr=0$, quae aequatio, cum sit $pp+qq+rr=1$, loco aequationum V. et VI. usurpari potest. At aequationum VII, VIII, IX unicam tractasse sufficiet, quod negotium postremo loco erit suscipiendum.

COROLL. 4.

861. Inventis autem quantitatibus x, y et z, ob $cos\,\alpha^2+cos\,\beta^2+cos\,\gamma^2=1$ erit celeritas angularis $\omega=\gamma(xx+yy+zz)$ hincque vicissim arcus α, β, γ concluduntur; nempe

$$cos\,\alpha=\frac{x}{\omega};\ cos\,\beta=\frac{y}{\omega}\text{ et }cos\,\gamma=\frac{z}{\omega}.$$

PROBLEMA. 99.

862. Aequationes differentiales ante inventas, quibus motus turbinis exprimitur, ad integrationem perducere, quantum fieri licet.

SOLUTIO.

Primo statim patet esse $\omega=$ const: ponamus ergo $x=A$, et reliquae aequationes integrandae erunt

$$1^\circ.\ dy+\frac{A(aa-cc)zdt}{cc}=\frac{2\Pi fgrdt}{Mcc}$$

$$2^\circ.\ dz-\frac{A(aa-cc)ydt}{cc}=\frac{-2\Pi fgqdt}{Mcc}$$

$$3^\circ.\ dp=dt(qz-ry)$$

$$4^\circ.\ ydq+zdr=-Adp$$

existente $\frac{\Pi}{M}=1+\frac{fddp}{2gdt^2}$ et $pp+qq+rr=1$.

Nunc $1^\circ.\ q+2^\circ.\ r$ suppeditat hanc aequationem

$$qdy+rdz+\frac{A(aa-cc)}{cc}dt(qz-ry)=0$$

quae ob $dt(qz-ry)=dp$ abit in hanc:

qdy

$$qdy + rdz = \frac{-A(aa-cc)}{cc}dp$$ huc addatur 4°
$$ydq + zdr = -Adp$$

erit $qdy + ydq + rdz + zdr = \frac{-aa}{cc}Adp$ cujus integrale est

$$qy + rz = B - \frac{aa}{cc}Ap.$$

Porro colligendo 1°. y + 2°. z prodit:

$$ydy + zdz = \frac{2\Pi fgdt}{Mcc}(ry - qz) = \frac{-2\Pi fgdp}{Mcc}$$

quare cum sit $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fddp}{2gdt^2}$ erit

$$ydy + zdz = \frac{-2fgdp}{cc} - \frac{ffdpddp}{ccdt^2}$$

unde integrando nanciscimur:

$$yy + zz = C - \frac{4fgp}{cc} - \frac{ffdp^2}{ccdt^2}.$$

Cum jam sit $\frac{dp}{dt} = qz - ry$, obtinemus nevam aequationem finitum:

$$yy + zz = C - \frac{4fgp}{cc} - \frac{ff}{cc}(qz - ry)^2$$

ex qua cum sit

$$(qz - ry)^2 \frac{Ccc}{ff} - \frac{4gp}{f} - \frac{cc(yy+zz)}{ff}$$

ex ante inventa autem

$$(qy + rz)^2 = \left(B - \frac{Aqap}{cc}\right)^2$$

prodibit his addendis

$$(qq + rr)(yy + zz) = \frac{Ccc}{ff} - \frac{4gp}{f} - \frac{cc(yy+zz)}{ff} + \left(B - \frac{Aaap}{cc}\right)^2$$

unde ob $qq + rr = 1 - pp$ elicitur

$$\left(1 - pp + \frac{cc}{ff}\right)(yy + zz) = \frac{Ccc}{ff} - \frac{4gp}{f} + \left(B - \frac{Aaap}{cc}\right)^2; \text{ seu}$$

$$yy + zz = \frac{\left(Ccc - 4fgp + ff\left(B - \frac{Aaap}{cc}\right)^2\right)}{cc + ff - ffpp}$$

Digitized by Google

$$(qz-ry)^2 = \frac{(Ccc-4fgp)(1-pp)-cc\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)^2}{cc+ff-ffpp}.$$

Cum ergo jam has quantitates $qy+rz$, $yy+zz$ et $qz-ry$ per solam p definiverimus, statim pressionem Π per eandem solam p ita reperimus expressam

$$\frac{\Pi}{M} = \frac{2gcc+faaA\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)}{2g(cc+ff-ffpp)} - \frac{fccp\left(Ccc-4fgp+ff\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)^2\right)}{2g(cc+ff-ffpp)^2},$$

deinde vero etiam elementum temporis dt obtinebimus

$$dt = \frac{dp\sqrt{(cc+ff-ffpp)}}{\sqrt{\left((Ccc-4fgp)(1-pp)-cc\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)^2\right)}}$$

ex quo pariter per p erit $d\lambda = \frac{-dt\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)}{1-pp}$:

atque celeritas angularis ω ita definietur, ut sit

$$\omega\omega = AA + \frac{Ccc-4fgp+ff\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)^2}{cc+ff-ffpp}.$$

Ex ω autem porro cognoscitur arcus $AO = \alpha$, ita ut, quoniam tempus t per p datur, quantitates ω, α, p et λ ad datum tempus assignari queant. Denique etsi parum refert, nosse quantitas y et z seorsim: tamen ex 1°. et 2°. fit

$$zdq - ydz + \frac{A(aa-cc)(yy+zz)}{cc}dt = \frac{2\Pi fg\,dt}{Mcc}(rz+qy)$$

ideoque

$$\frac{ydz-zdy}{yy+zz} = \frac{A(aa-cc)dt}{cc} - \frac{2\Pi fg\,dt\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)(cc+ff-ffpp)}{Mcc\left(Ccc-4fgp+ff\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)^2\right)}$$

quae cum etiam sit integrabilis, dabit $A\,tang\,\frac{z}{y}$ ideoque rationem inter y et z, ex qua cum $yy+zz$ conjunctim, utraque y et z seorsim datur: quibus inventis etiam q et r seorsim ex valoribus formularum $qy+rz$ et $qz-ry$ eliciuntur.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA. 100.

863. Si turbini initio in data inclinatione impressus fuerit motus gyratorius circa, proprium axem data celeritate angulari, definire ejus situm et motum ad quodvis tempus inde elapsum.

SOLUTIO.

Ponamus initio quo $t = 0$, axem turbinis fuisse in a distantia seu arcu existente $Za = l$, ac ponatur $cos\, l = p$, ut fuerit fp altitudo centri inertiae supra planum horizontale, eodem autem tempore arcus AB fuerit in ab, ita ut pro initio habeatur $l = l$, $m = 90 - l$, $n = 90°$, et $\lambda = 0$, ideoque $p = p$, $q = r\,(1 - pp)$, et $\varkappa = 0$. Deinde initio turbo circa ipsum axem IA acceperit in sensum BC motum gyratorium celeritate angulari $= \varepsilon$, ita ut fuerit $\alpha = 0$, $\zeta = 90°$, et $\gamma = 90°$, ideoque $\varepsilon = \varepsilon$, $x = \varepsilon$, $y = 0$, et $z = 0$. Hinc ergo si constantes supra per integrationem ingressae definiantur, obtinebimus: Fig. 111.

$$1°.\ A = \varepsilon;\quad 2°.\ B = \frac{\varepsilon a a p}{cc} \text{ et } 3°.\ C = \frac{4 f g p}{cc}.$$

Hic autem valoribus substitutis primo inter t et p haec reperitur aequatio

$$dt = \frac{c\,dp\,r\,(cc + ff - ffpp)}{r\,(p-p)(4ccfg(1-pp)) - \varepsilon\varepsilon a^4 (p-pp)}.$$

Deinde angulus $XZA = \lambda$ ita definitur, ut sit

$$d\lambda = \frac{-\varepsilon a a dt\,(p-p)}{cc\,(1-pp)} = \frac{-\varepsilon a a dp\,r\,(p-p)(cc+ff-ffpp)}{c\,(1-pp)\,r\,4ccfg\,(1-pp) - \varepsilon\varepsilon a^4 (p-p))}.$$

Porro celeritas angularis ϖ in sensum ABC ita exprimitur

$$\varpi\varpi = \varepsilon\varepsilon + \frac{4c^4 fg\,(p-p) + \varepsilon\varepsilon a^4 ff\,(p-p)^2}{c^4\,(cc+ff-ffpp)}$$

hincque $cos\, \alpha = \frac{x}{\varpi}$; at pro $cos\, \zeta = \frac{y}{\varpi}$ et $cos\, \gamma = \frac{z}{\varpi}$ est primo

$$yy + zz = \frac{4c^4 fg\,(p-p) + \varepsilon\varepsilon a^4 ff\,(p-p)^2}{c^4\,(cc+ff-ffpp)} = \varpi\varpi - \varepsilon\varepsilon.$$

Praeterea vero invenimus:

$$qy + rz = \frac{\varepsilon a a}{cc}\,(p-p) \text{ et}$$

$$qz - ry = \frac{r\,(p-p)(4ccfg\,(1-pp) - \varepsilon\varepsilon a^4 (p-p))}{cr\,(cc+ff-ffpp)}$$

atque

atque pressionem, quam nunc turbo cuspide sua exerit in planum horizontale

$$\frac{\Pi}{M} = \frac{2c^4fg + \varepsilon\varepsilon a^4 f(p-p)}{2ccg(cc+ff-ffpp)} - \frac{fp(p-p)(4c^4fg+\varepsilon\varepsilon a^4 ff(p-p))}{2ccg(cc+ff-ffpp)^2}.$$

Denique ad quantitates y et z seorsim definiendas habetur haec aequatio

$$\frac{ydz-zdy}{yy+zz} = \frac{\varepsilon(aa-cc)dt}{cc} - \frac{\Pi}{M}\cdot\frac{\varepsilon aafgdt(cc+ff-ffpp)}{4c^4fg+\varepsilon\varepsilon a^4 ff(p-p)} \text{ seu}$$

$$\frac{ydz-zdy}{yy+zz} = \frac{\varepsilon(aa-cc)dt}{cc} - \frac{\varepsilon aadt(2c^4fg+\varepsilon\varepsilon a^4 ff(p-p))}{2cc(4c^4fg+\varepsilon\varepsilon a^4 ff(p-p))} + \frac{\varepsilon aaffpdt(p-p)}{2cc(cc+ff-ffpp)}.$$

Inventis autem y et z, etiam q et r per eas determinantur.

COROLL. 1.

864. Arcus $ZA = l$ usque ad angulum rectum augeri, seu turbo procidere potest, quamdiu $\varepsilon\varepsilon a^4 p < 4ccfg$. Ne ergo turbo prolabatur, necesse est, ut ejus celeritas angularis primo impressa major sit quam $\frac{2c}{aa}\gamma\frac{fg}{p}$, ubi est $p = cos\, ZA$. Unde, si turbo initio fuerit verticalis, debet esse $\varepsilon > \frac{2c\gamma fg}{aa}$ nisi enim haec conditio observetur, levissima causa turbinem deturbare valebit.

COROLL. 2.

865. Sin autem fuerit $\varepsilon\varepsilon a^4 p > 4ccfg$, quemadmodum quantitas p nunquam superare potest p, ita dabitur limes, infra quem nunquam diminuetur, qui definitus ex aequatione, $4ccfgpp = 4ccfg - \varepsilon\varepsilon a^4 p + \varepsilon\varepsilon a^4 p$ prodit

$$p = \frac{\varepsilon\varepsilon a^4 - \gamma(\varepsilon^4 a^8 - 16\varepsilon\varepsilon a^4 ccfgp + 64c^4 ffgg)}{8ccfg}$$

unde fit proxime $p = p - \frac{4ccfg(1-pp)}{\varepsilon\varepsilon a^4 - 8ccfgp}$ pro minimo valore ipsius $p = cos\, ZA$, seu pro maximo arcu ZA.

COROLL. 3.

866. Sin autem in fig. 109. spectemus ad angulum IFk, quo inclinatio axis ad horizontem, cujus sinus est $= p$, minor fieri non potest:

Digitized by Google

est: motus turbinis gyratorius perennis esse nequit, nisi valor minimus ipsius p adhuc fuerit major quam sinus anguli IFk. Quare posito $\sin \text{IF}k = k$, debet esse $ss > \frac{4ccfg(1-kk)}{a4(p-k)}$.

SCHOLION. 1.

867. Hic ergo duos casus constitui convenit, alterum quo celeritas angularis turbini primum impressa s minor est, quam $\frac{2c\gamma fg(1-kk)}{aa\gamma(p-k)}$, alterum quo hac quantitate est major. Priori casu quo $s < \frac{2c\gamma fg(1-kk)}{aa\gamma(p-k)}$, turbo mox procidet, quoniam ad minimam inclinationem pervenire nequit, quin corpore suo planum horizontale attingat, sicque motus gyratorius destruatur. Posteriori vero casu quo $s > \frac{2c\gamma fg(1-kk)}{aa\gamma(p-k)}$, motus gyratorius perpetuo durabit, quandoquidem a frictione omnibusque motus obstaculis mentem abstrahimus. Ut ergo motus gyratorius prodeat perennis, necesse est turbini primum majorem celeritatem angularem s imprimi, quam ista formula exhibet. Patet autem, quo major turbini celeritas angularis imprimatur, eo minus eum ad horizontem inclinatum iri, ac si celeritas illa foret infinita, turbo eandem inclinationem perpetuo conservaret. Quando autem motus gyratorius est perennis, turbo ab initio magis ad horizontem inclinabitur, donec maximam inclinationem attigerit, tum iterum se eriget usque ad statum initialem, quo ubi pervenerit, quasi unam motus sui periodum absolvisse est censendus, deinceps simili modo progressurus; nunquam enim turbo magis fiet erectus, quam fuerat initio, si quidem nulla affuerit frictio. Namque si turbo, dum cuspide super plano horizontali incedit, frictionem offendat, ejus effectus in erigendo turbine consumetur, quatenus is ob minutam celeritatem angularem non prolabi cogitur. Quare nemini mirum videri debet, si experientia nostro calculo minus conveniat, cum aberrationes frictioni sint tribuendae.

SCHOLION. 2.

868. Ex his etiam ratio constructionis turbinum perspicitur, ut facillime motum gyratorium recipiant, seu ut minima celeritas angularis ad hoc sufficere possit. Scilicet cum celeritas angularis initio impressa major esse debeat quam $\frac{2c\gamma fg}{aa}$, patet turbinis figuram ejusmodi

Digitized by Google

esse oportere, ut ejus momentum inertiae respectu axis AF sit maximum prae momento respectu axium ad hunc normalium. Quare figura aptissima erit discus planus hasta tenuissima transfixus, quo casu fit $aa = 2cc$: ac si radius ejus disci fuerit $= b$: erit $aa = \frac{1}{2}bb$, et $cc = \frac{1}{4}bb$, hincque $s > \frac{2\gamma fg}{b}$. Deinde quo brevior fuerit cuspis seu intervallum IF $= f$, eo magis celeritas angularis s ad durationem gyrationis requisita minuitur: verum tum etiam in minore inclinatione turbo planum horizontale corpore suo attinget. Ponamus $b = \frac{1}{2}$ dig. et $f = \frac{1}{4}$ dig. quoniam $g = 187\frac{1}{2}$ dig. sumi debet $s > \gamma 750$: quare si capiatur s duplo major vel $s = 55$, turbo uno minuto secundo conficiet arcum $= 55$, seu $\frac{55}{2\pi}$, hoc est fere novem revolutiones absolvet. Pro turbinibus autem majoris moduli celeritas angularis minor secundum rationem subduplicatam laterum sufficiet.

PROBLEMA. 101.

869. Si turbini initio datam inclinationem tenenti impressus fuerit motus gyratorius satis insigni celeritate angulari, ut inclinatio ejus minimas subeat mutationes, definire ejus motum gyratorium.

SOLUTIO.

Manentibus omnibus, uti in problemate praecedente sunt constituta, assumimus hic ss multis vicibus excedere quantitatem $\frac{4ccfg}{a^4 p}$. Ponamus ergo $ss = \frac{4nccfg}{a^4 p}$, ut n hic denotet numerum satis magnum, ac primo pro relatione inter s et p hanc habebimus aequationem, quia ab initio quantitas p decrescit

$$dt = \frac{-dp\gamma p(cc+ff-ffpp)}{2\gamma fg(p-p)(p-ppp-np+np)}.$$

Cum igitur p quam minimum a p deficiat, ponamus $p = p - u$, ut u sit particula vehementer exigua, fietque

$$dt = \frac{+du\gamma p(cc+ff-ffpp)}{2\gamma fgu(p-p^3-nu)} \text{ hincque}$$

$$t = \frac{+\gamma p(cc+ff-ffpp)}{2\gamma nfg} \int \frac{du}{\gamma(\frac{p-p^3}{n}u - uu)} = C + \frac{\gamma p(cc+ff-ffpp)}{2\gamma nfg} A \sin \text{verf.} \frac{2nu}{p-p^3}$$

ubi

ubi debet esse $C = 0$. Quare ab initio ubi $u = 0$ seu $p = p$ usque ad tempus, quo inclinatio fit maxima $u = \frac{p(1-pp)}{n}$, seu $p = p - \frac{p(1-pp)}{n}$, erit tempus $= \frac{\pi r p(cc+ff-ffpp)}{2rnfg}$, quod ergo eo est brevius, quo major fuerit numerus n.

Deinde vero fit $d\lambda = \frac{-2rnfg}{c(1-pp)rp}\, udt$ sive

$$\lambda = \frac{-r(cc+ff-ffpp)}{c(1-pp)} \int \frac{du\, ru}{r(\frac{p-p^3}{n} - u)}, \text{ unde elicitur}$$

$$\lambda = \frac{-r(cc+ff-ffpp)}{c(1-pp)} \left(\frac{p(1-pp)}{2n} A \sin \text{verf.} \frac{2nu}{p(1-pp)} - r \left(\frac{p(1-pp)}{n} u - uu \right) \right).$$

Arcus scilicet ZA in sensum oppositum progreditur, et elapso tempore $t = \frac{\pi r p(cc+ff-ffpp)}{2rnfg} = \frac{\pi c r(cc+ff-ffpp)}{\varepsilon a a}$ quo turbo maxime ad horizontem inclinatur, fit $\lambda = -\frac{\pi p r(cc+ff-ffpp)}{2nc}$. Non quidem axis A motu aequabili circa verticem Z circumferetur, sed neglecta motus inaequalitate, erit celeritas angularis media $= \frac{rpfg}{crn} = \frac{2fg}{\varepsilon aa}$, ob $n = \frac{\varepsilon\varepsilon a^4 p}{4ccfg}$, ita ut haec celeritas angularis ipsius axis turbinis circa verticem Z sit reciproce, ut celeritas angularis turbinis circa proprium axem. Deinde dum turbo maximam habet inclinationem, ut sit $p = p - \frac{4ccfg(1-pp)}{\varepsilon\varepsilon a^4}$, celeritas angularis $\varkappa$ ita definitur ut sit

$$\varkappa\varkappa = \varepsilon\varepsilon + \frac{16ffgg(1-pp)}{\varepsilon\varepsilon a^4} \text{ seu } \varkappa = \varepsilon + \frac{8ffgg(1-pp)}{\varepsilon^3 a^4},$$

eritque $\cos \omega = \cos AO = 1 - \frac{8ffgg(1-pp)}{\varepsilon^4 a^4} = 1 - \frac{1}{2}\omega\omega$

seu ipse arcus minimus $\omega = AO = \frac{4fgr(1-pp)}{\varepsilon\varepsilon aa}$.

Digitized by Google

Pro preſſione autem cuſpidis F in planum horizontale habetur pro motus initio, ſeu ubi $p = \mathfrak{p}$, et axis turbinis maxime erectus $\frac{\Pi}{M} = \frac{cc}{cc+ff-ff\mathfrak{p}\mathfrak{p}}$: at quando turbo maxime inclinatur:

$$\frac{\Pi}{M} = \frac{cc+2ff(1-\mathfrak{p}\mathfrak{p})}{cc+ff-ff\mathfrak{p}\mathfrak{p}} - \frac{8ccf^3g\mathfrak{p}(1-\mathfrak{p}\mathfrak{p})}{ssa^4(cc+ff-ff\mathfrak{p}\mathfrak{p})}.$$

Haecque ad motus cognitionem ſufficiunt.

COROLL. 1.

870. Si axis turbinis initio fuerit in a, poſito $Za = l$ cum ſit $\mathfrak{p} = cos\, l$, ſi A ſit maxima elongatio axis a vertice, poſito $ZA = l$, quia eſt $p = cos\, l = cos\, l - \frac{4ccfg\,sin\,l^2}{ssa^4}$ erit $l = l + \frac{4ccfg\,sin\,l}{ssa^4}$.

COROLL. 2.

871. Quia in maxima turbinis inclinatione arcus ZA eſt maximus, evidens eſt polum gyrationis O tum in ipſum arcum ZA cadere debere, ut ſit $ZO < ZA$, et tum intervallum hoc AO erit $= \frac{4fg\Upsilon(1-\mathfrak{p}\mathfrak{p})}{ssaa}$.

SCHOLION.

872. Hactenus ſumſimus turbini initio motum gyratorium imprimi circa ipſum axem AF, qui eſt caſus maxime communis. Verum tamen fieri poteſt, ut ipſi circa alium axem motus imprimatur, quod evenit, ſi axis verus AF, dum turbo circa eum gyratur, ſimul impulſionem accipiat, qua ad horizontem vel magis inclinetur, vel inde magis erigatur. Hoc enim eodem redit, ac ſi turbini circa alium axem motus gyratorius imprimeretur, niſi quatenus inde ſimul motus progreſſivus oritur, qui cum nihil habeat difficultatis, ad eum non reſpiciamus. Caſus quidem jam ante tractatus huc referri poteſt, ſi ſtatum quendam medium, quo turbo jam circa alium axem praeter AF gyratur, tanquam initialem ſpectemus, ſed quoniam ibi axis turbinis ſe nunquam ad ſitum verticalem erigere poteſt, in eo non omnes motus continentur. Quare conveniet adhuc eum caſum pertractari, quo turbinis axis AF primo quidem tenet ſitum verticalem, ipſi autem motus gyratorius circa alium axem ad horizontem inclinatum imprimitur, quem caſum etiam per formulas generales ante evolutas reſolvere poterimus.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA. 102.

873. Si turbinis axis initio fuerit verticalis, eique circa axem quendam inclinatum impressus sit motus gyratorius data celeritate angulari, determinare motum turbinis.

SOLUTIO.

Cum ergo initio punctum A fuerit in Z, ponamus arcum AC in circulum ZX incidisse, ita ut arcus AB fuerit ad ZX normalis. Quare facto $t = 0$, erat $l = 0$, $m = 90°$ et $n = 90°$, ideoque $p = 1$, $q = 0$, et $r = 0$: ac $\mu = 90°$, $\nu = 0$, manente λ indefinito, tum vero initio turbini impressus fuerit motus gyratorius celeritate angulari $= \varepsilon$ in sensum ABC circa polum in arcu AC situm, ita ut posito $t = 0$, fuerit $\alpha = a$, $\zeta = 90$, et $\gamma = 90° - a$, ideoque $x = \varepsilon \cos a$, $y = 0$, et $z = \varepsilon \sin a$. His positis statum turbinis post tempus $= t$ ex §. 862. definiemus, si constantes per integrationem ingressas his conditionibus convenienter determinemus. Primo ergo fiet $A = \varepsilon \cos a$, deinde $B = \frac{aa}{cc} \varepsilon \cos a$; tertio $\frac{Ccc}{ff} - \frac{4g}{f} - \frac{\varepsilon\varepsilon cc \sin a^2}{ff} = 0$, sive $C = \frac{4fg}{cc} + \varepsilon\varepsilon \sin a^2$; His autem valoribus substitutis obtinebimus

$$qy + rz = \frac{\varepsilon aa \cos a}{cc}(1-p)$$

$$qz - ry = \frac{r(\varepsilon\varepsilon c^4(1-pp)\sin a^2 + 4ccfg(1-p)(1-pp) - \varepsilon\varepsilon a^4(1-p)^2\cos a^2)}{crr(cc+ff-ffpp)}$$

$$yy + zz = \frac{\varepsilon\varepsilon c^6 \sin a^2 + 4c^4 fg(1-p) + \varepsilon\varepsilon a^4 ff(1-p)^2 \cos a^2}{c^4(cc+ff-ffpp)}$$

hincque $dt = \frac{-cdprr(cc+ff-ffpp)}{r(1-p)(4ccfg(1-pp) + \varepsilon\varepsilon c^4(1+p)\sin a^2 - \varepsilon\varepsilon a^4(1-p)\cos a^2)}$

quoniam initio quantitas p minuitur.

Porro ob $\varpi\varpi = xx + yy + zz$ et $x = \varepsilon \cos a$ erit

$$\varpi\varpi = \varepsilon\varepsilon \cos a^2 + \frac{\varepsilon\varepsilon c^6 \sin a^2 + 4c^4 fg(1-p) + \varepsilon\varepsilon a^4 ff(1-p)^2 \cos a^2}{c^4(cc+ff-ffpp)}$$

ac tandem

$$d\lambda = \frac{-\varepsilon aadt\cos a}{cc(1+p)}.$$

CO-

Digitized by Google

COROLL. 1.

874. Ex formula pro dt inventa judicare licet, utrum turbo sit prolapsurus, nec ne? ponatur enim $p = 0$, et denominatoris factor $4ccfg + ss c^4 \sin \alpha^2 - ss a^4 \cos \alpha^2$, quoties est positivus, turbinem ad lapsum proclivem indicat: quod ergo evenit, si $4ccfg + ss c^4 \sin \alpha^2 > ss a^4 \cos \alpha^2$.

COROLL. 2.

875. Ne ergo turbo prolabatur, primo necesse est, ut sit $a^4 \cos \alpha^2 > c^4 \sin \alpha^2$ seu $\tang \alpha < \frac{aa}{cc}$, deinde vero esse oportet $ss > \frac{4ccfg}{a^4 \cos \alpha^2 - c^4 \sin \alpha^2}$; seu celeritas angularis primum impressa superare debet limitem $\frac{2c\gamma fg}{\gamma(a^4 \cos \alpha^2 - c^4 \sin \alpha^2)}$: et quidem notabiliter, ne turbo, dum inclinatur, corpore suo horizontem attingat.

COROLL. 3.

876. Quando autem est tam $\tang \alpha < \frac{aa}{cc}$ quam $ss > \frac{4ccfg}{a^4 \cos \alpha^2 - c^4 \sin \alpha^2}$, axis turbinis non ad horizontem usque inclinari, seu quantitas p ad nihilum usque diminui potest: sed minimus ejus valor prodiens ex aequatione

$$4ccfgpp = ss p (a^4 \cos \alpha^2 + c^4 \sin \alpha^2) - ss a^4 \cos \alpha^2 + ss c^4 \sin \alpha^2 + 4ccfg$$

reperitur

$$p = \frac{ss(a^4 \cos \alpha^2 + c^4 \sin \alpha^2) - \gamma(ss(a^4 \cos \alpha^2 + c^2 \sin \alpha^2)^2 - 16 ss ccfg(a^4 \cos \alpha^2 - c^4 \sin \alpha^2) + 64 c^4 ffgg)}{8ccfg}$$

COROLL. 4.

877. Sin autem fuerit $\tang \alpha = \frac{aa}{cc}$ seu $a^4 \cos \alpha^2 = c^4 \sin \alpha^2$, aequatio inter p et s erit $dt = \frac{-dp\gamma(cc + ff - ffpp)}{\gamma(1-p)(4fg(1-pp) + 2ss ccp \sin \alpha^2)}$, atque p non solum ad nihilum usque, sed etiam ad valorem negativum minui poterit, qui foret:

$$p =$$

Digitized by Google

$$p = \frac{\varepsilon\varepsilon cc \int\!\alpha^2 - \gamma(\varepsilon^4 c^4 \int\!\alpha^4 + 16 ffgg)}{4fg}$$

sed tantam inclinationem status quaestionis excludit.

SCHOLION.

878. Status initialis talem motum exhibens in fig. 112. repraesentatur, ubi axis turbinis A in ipso vertice versatur, bini reliqui vero in B et C, et circulum quidem verticalem fixum AX ita assumsimus, ut in eo esset quadrans AC, et alter AB ad istum normalis. Initio motus ergo erat $l = 0$, $m = 90°$, $n = 90°$, ideoque $p = 1$, $q = 0$, $r = 0$, tum vero $\mu = 90°$ et $\nu = 0$, existente λ indefinito. Deinde vero turbini initio motum gyratorium impressum esse sumo circa axem IO, existente arcu AO $= \alpha$, eumque celeritate ε in sensum ABC: sicque posito $t = 0$ erat $\alpha = \alpha$, $\zeta = 90$, $\gamma = 90° - \alpha$, et $\varkappa = \varepsilon$, hincque $x = \varepsilon \cos\alpha$, $y = 0$ et $z = \varepsilon \sin\alpha$. Ne igitur hoc casu turbo prolabatur, binae conditiones requiruntur, altera ut sit *tang* α seu *tang* AO $< \frac{aa}{cc}$, et altera ut sit $\varepsilon > \frac{2c\gamma fg}{\gamma(a^4 \cos\alpha^2 - c^4 \int\!\alpha^2)}$. Ac si velimus ut axis quam minime inclinetur, fiatque $p = 1 - \omega$ existente ω particula valde parva, reperitur

Fig. 112.

$$\omega = \frac{2\varepsilon\varepsilon c^4 \int\!\alpha^2}{\varepsilon\varepsilon a^4 \cos\alpha^2 + \varepsilon\varepsilon c^4 \int\!\alpha^2 - 8ccfg},$$

quare arcus AO $= \alpha$ quam minimus esse, deinde vero $\varepsilon\varepsilon a^4$ multum excedere debet $8ccfg$ ut sit $\varepsilon > \frac{2c\gamma 2fg}{aa}$. Quod si eveniat, motus satis erit regularis, quem accuratius determinasse juvabit.

PROBLEMA. 103.

879. Si turbini in situ erecto constituto circa axem quam minime declinantem impressus fuerit motus gyratorius satis celer, ut turbo parumper tantum a statu erecto recedat, ejus motum determinare.

SOLUTIO.

Sumimus ergo arcum AO $= \alpha$ initio fuisse valde parvum, et celeritatem angularem initio impressam ε tantam ut fuerit $\varepsilon\varepsilon a^4 \cos\alpha^2 > 8ccfg$. Ponamus ergo

$\varepsilon\varepsilon a^4 \cos\alpha^2 = 8nccfg$ ut sit $n > 1$, et habebimus

dt

$$dt = \frac{-c\,dp\sqrt{(cc+ff-ffpp)}}{\sqrt{(1-p)(4ccfg(1-pp)-8nccfg(1-p)+\varepsilon\varepsilon c^4(1+p)\sin a^2}}.$$

Quia ergo novimus p parum infra unitatem diminui, statuamus $p = 1-u$, sietque neglectis terminis minimis

$$dt = \frac{c\,du}{\sqrt{u(8fgu-8nfgu+2\varepsilon\varepsilon cc\sin a^2-\varepsilon\varepsilon ccu\sin a^2)}}$$

cujus integrale est

$$t = \frac{c}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon cc\sin a^2+8(n-1)fg)}}\ \text{A}\sin\text{vers.}\ \frac{u(\varepsilon\varepsilon cc\sin a^2+8(n-1)fg)}{\varepsilon\varepsilon cc\sin a^2}.$$

Cum nunc maximus valor ipsius u sit $= \frac{2\varepsilon\varepsilon cc\sin a^2}{\varepsilon\varepsilon cc\sin a^2+8(n-1)fg}$ tempus usque ad maximam turbinis inclinationem est $= \frac{\pi c}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon cc\sin a^2+8(n-1)fg)}}$

$$= \frac{\pi cc}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4\cos a^2+\varepsilon\varepsilon c^4\sin a^2-8ccfg)}}$$

atque turbo tum declinabit a situ erecto angulo exiguo, cujus sinus versus est $= \frac{2\varepsilon\varepsilon c^4\sin a^2}{\varepsilon\varepsilon a^4\cos a^2+\varepsilon\varepsilon c^4\sin a^2-8ccfg}$ et ipse angulus $= \frac{2\varepsilon cc\sin a}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4\cos a^2+\varepsilon\varepsilon c^4\sin a^2-8ccfg)}}$. Deinde cum sit $d\lambda = \frac{-\varepsilon aa\,dt\cos a}{cc(1+p)}$, hicque p ut constans $= 1$ considerari possit, tempore quo turbo ad maximam inclinationem pertingit, ejus axis versabitur in plano verticali, quod a circulo ZX declinat angulo XZA $= 90° - \frac{\pi\varepsilon aa\cos a}{2\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4\cos a^2+\varepsilon\varepsilon c^4\sin a^2-8ccfg)}}$ primo enim initio, quo A circa O gyratur fig. 112. angulus λ est rectus seu $= \frac{\pi}{2}$.

Fig. 111.

COROLL. 1.

880. Cum arcus initialis AO $= a$ sit quasi infinite parvus, et angulus XZA $= \lambda$ initio fuerit $= 90°$, elapso tempore t, siet hic angulus $\lambda = 90° - \frac{\varepsilon aat}{2cc}$. Axis ergo turbinis ex puncto verticali egressus

in

in antecedentia movetur, et integrum circuitum absolvit tempore $= \frac{4\pi cc}{\varepsilon aa}$ min. sec.

COROLL. 2.

881. Cum initio esset $u = 0$, elapso tempore t fiet

$$1 - \frac{u(\varepsilon\varepsilon a^4 - 8ccfg)}{\varepsilon\varepsilon c^2 \sin\alpha} = \cos\frac{t\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4 - 8ccfg)}}{cc}.$$

Posito autem arcu ZA minimo $= l$, ob $p = \cos l = 1 - \frac{1}{2}ll$, erit $u = \frac{1}{2}ll$, hincque $l = \frac{2\varepsilon cc\sin\alpha}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4 - 8ccfg)}} \sin\frac{t\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4 - 8ccfg)}}{2cc}$ ita ut ad quodvis tempus t assignare valeamus λ et l.

COROLL. 3.

882. Cum axis turbinis ex Z digressus ad maximam declinationem pertingit, praeterlabitur tempus $= \frac{\pi cc}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4 - 8ccfg)}}$, quo tempore is circa Z in antecedentia circumfertur per angulum $= \frac{\pi\varepsilon aa}{2\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4 - 8ccfg)}}$, qui ergo recto est major: atque in verticem Z revertetur absoluto angulo $= \frac{\pi\varepsilon aa}{\sqrt{(\varepsilon\varepsilon a^4 - 8ccfg)}}$ majore duobus rectis.

SCHOLION.

883. Hujusmodi motibus evolvendis fusius non immoror, cum omnia phaenomena facile ex formulis inventis derivari queant. Probe autem meminisse oportet, hic nullam frictionis rationem esse habitam, quae quamvis parva statuatur, phaenomena hic definita vehementer perturbat. Ex frictione enim, quam cuspis F super plano horizontali incedens patitur, nascitur vis horizontalis, qua turbini motus progressivus imprimitur, et quia directio illius vis continuo mutatur, facile causa perspicitur, cur turbines motu curvilineo incedere observentur. Verum motus ob frictionem perturbati singularem exigunt tractationem: quare sepositis hujusmodi impedimentis ad alia quaedam motus genera, in quibus gyratio occurrit, progrediamur; et quoniam hic ejusmodi corpora sum contemplatus, quae cuspide super plano hori-

zontali incedunt, ita ut cuſpis ſit quaſi baſis eorum cenſenda, hinc ad alia corporum genera ducimur, quae baſi quacunque ſuper plano incedant. Ac de baſi quidem plana vel anguloſa vix quicquam proferri poteſt attentione dignum, cum vel nullus motus gyratorius locum inveniat, ideoque motus determinatio nihil habeat difficultatis, vel ſaltem per ſaltus gyratio ſe immiſceat, dum contactus ad aliam hedram transfertur, ubi ſimul conflictus ſe exerit, cujus explicatio ad aliam Mechanicae partem eſt referenda. Hic igitur ejusmodi tantum baſes, quibus corpora ſuper plano immobili incedant, contemplari convenit, quae curvatura continua ſint praeditae, ne ullus ſaltus in motu occurrat. Minias autem ambages, quae in calculos inextricabiles perducerent, evitaturi, duo tantum corporum genera, cylindrica ſcilicet ac ſphaerica, potiſſimum evolvamus, quorum nimirum figura externa, qua plano applicantur, ſit vel cylindrica vel ſphaerica, quomodocunque materia intrinſecus fuerit diſtributa, cujus ratio ex centro inertiae et axibus principalibus determinatur. Hinc ad genus cylindricum referuntur ea pendula, quae non ab axe lineari, uti ſupra aſſumſimus, ſunt ſuſpenſa, ſed axiculis cylindricis utrinque plano horizontali incumbant. Deinde etiam huc pertinet motus vacillatorius motui cunarum reciproco ſimilis, cujusmodi corpora, quatenus ſuper plano incumbunt, tanquam cylindrica ſpectari poſſunt. Deinde etiam, quomodo hujusmodi corpora ſuper plano inclinato deſcendant, operae pretium erit ſcrutari. Ad corpora porro ſphaerica refero non ſolum ea, quorum tota figura eſt globoſa, ſed etiam quae inferius, ubi planum attingunt, in hemisphaerium ſunt efformata, veluti ſunt turbines, quorum axes infra non in cuſpidem ſed quaſi in hemisphaerium deſinunt; ubi quidem centrum inertiae magis eſt elevatum, quam centrum hemisphaerii, quando autem profundius eſt ſitum, aliud motus genus oriri poteſt, quo corpus quaſi titubando oſcillationes peragit, in quo motu mira motus gyratorii perturbatio locum habere poteſt.

CAPUT

CAPUT XVIII.

DE MOTU CORPORUM BASI SPHAERICA PRAEDITORUM SUPER PLANO HORIZONTALI.

PROBLEMA 104.

884. Si corpus basi sphaerica praeditum plano horizontali quomodocunque incumbat, definire vires, quibus sollicitatur, earumque effectum in motu corporis progressivo turbando.

SOLUTIO.

Sit EH planum horizontale et T punctum, ubi corpus ei insistit, in corpore autem notetur primo centrum baseos sphaericae MTN, quod sit in G, deinde centrum inertiae corporis I, ac tabula repraesentet planum, in quo haec tria puncta sunt sita. Ducatur radius GT, qui cum sit ad horizontem EH normalis, situm habebit verticalem, ideoque ipsum planum TGI erit verticale. Iam quia pro motu progressivo totam corpus massam, quae sit $= M$, tanquam in centro inertiae I collectam concipere licet, ducta IP ipsi GT parallela corpus primo ob gravitatem urgetur in directione IP vi $= M$; deinde vero ubi planum horizontale in T tangit, ab eo certa quadam vi urgebitur sursum in directione TG, et pressioni aequali, quae vis sit $= \Pi$. Quare nisi hae duae vires se destruant, corpus in quiete persistere nequit: ex quo perspicuum est, statum quietis exigere, ut producta recta GI in F corpus puncto F plano horizontali insistat, sicque recta DIGF fiat verticalis. Figura ergo repraesentat statum corporis inclinatum, et inclinatio indicatur angulo FGT, qui sit $= \varphi$, quo evanescente corpus in statu aequilibrii versatur. Ponamus porro radium basis sphaericae GF $= GT = e$, et intervallum punctorum G et I nempe GI $= f$, quatenus centrum inertiae I longius distat a puncto F quam centrum figurae G: ita ut si propius caderet, quantitas f negative esset accipienda. Hinc ergo erit IP $= e + f \cos \varphi$, quae est altitudo centri inertiae I supra planum horizontale EH, et quae a viribus sollicitantibus sola afficitur. Translata autem vi TG $= \Pi$ in centrum inertiae I, punctum I deorsum sollicitatur vi $= M - \Pi$; et quia ejus celeritas deorsum directa est

Fig. 113.

$= \frac{f d\varrho \sin\varrho}{dt}$, posita ea $= u$ erit $du = \frac{2g(M-\Pi)dt}{M}$, denotante dt elementum temporis, ex quo habetur $f(dd\varrho \sin\varrho + d\varrho^2 \cos\varrho) = 2g\left(1 - \frac{\Pi}{M}\right) dt^2$ sumto dt constante: neque aliter motus progressivus afficietur.

COROLL. 1.

885. Vicissim ergo si ratio motus progressivi detur, vel saltem ut data consideretur, inde pressio Π definietur, cum sit $\frac{\Pi}{M} = 1 - \frac{f(dd\varrho \sin\varrho + d\varrho^2 \cos\varrho)}{2g dt^2}$ seu $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{f dd.\cos\varrho}{2g dt^2}$.

COROLL. 2.

886. Si fuerit $f = 0$, seu centrum inertiae I in ipsum centrum sphaerae G incidat, prodit $\Pi = M$, et corpus in omni situ aequilibrii proprietate gaudet.

COROLL. 3.

887. Si fuerit $f > 0$ seu $FI > FG$, statim ac corpus tantillum inclinatur, a vi sollicitante inclinatio augebitur, sin autem sit $f < 0$ seu $FI < FG$, inclinatio minuetur, corpusque in situm aequilibrii, quo punctum F plano insistit, restituetur: dum priori casu procumbit, alium quaerens aequilibrii situm.

SCHOLION. 1.

888. Quamcunque autem corpus habuerit figuram, in eo semper ad minimum duo dantur aequilibrii situs, quorum alter ita est comparatus, ut si corpus ex eo parumper declinetur, sponte sua se restituat, alter vero, ut penitus prolabatur: quorum prior *status aequilibrii stabilis*, posterior vero *labilis* vocari solet. Quodcunque enim corpus plano horizontali incumbit, in aequilibrio versatur, si recta a centro inertiae ad punctum contactus ducta fuerit verticalis: id quod semper duplici saltem modo evenire potest. Namque si ex centro inertiae ad omnia superficiei puncta rectae concipiantur ductae, quoniam nulla earum vel evanescit, vel fit infinita, inter eas necesse est dari

et

Digitized by Google

et maximam et minimam : utraque autem ad planum tangens erit normalis : quare si corpus alterutro eorum punctorum , a quibus centrum inertiae vel maxime vel minime distat , plano horizontali incumbat, recta ex centro inertiae ad punctum contactus ducta erit verticalis, ideoque situm aequilibrii dabit, eumque stabilem , si recta ista fuerit minima , contra vero labilem , si maxima : unde intelligitur, centrum inertiae semper infimum locum quaerere , ubi acquiescat. Saepenumero autem plures dantur aequilibrii situs , alii stabiles alii labiles , qui se alternatim excipere debent , quoniam corpus ex situ labili digressum in stabilem perveniat necesse est.

SCHOLION. 2.

889. In praesente casu , quo corporis superficiem sphaericam statuimus, recta per centrum inertiae I et centrum figurae G ducta dabit duo illa puncta F et D , quibus si corpus plano horizontali incumbat, situm aequilibrii teneat : ac dum puncto F planum horizontale tangit, situs aequilibrii erit stabilis, si $FI < FG$ seu $f < o$, labilis autem si $FI > FG$ seu $f > o$: neque praeter hos duos situs aequilibrii alius hic dabitur , nisi fuerit $f = o$, quo casu subito omnes plane situs aequilibrii indolem recipiunt. Etsi autem hic totam corporis superficiem ut sphaericam considero , tamen ad institutum nostrum sufficit , si ea saltem portio , qua durante motu planum horizontale contingit , fuerit sphaerica : atque hinc ista tractatio etiam ad eos turbines patet , quorum axes inferius non in cuspidem , ut ante assumsimus , sed in hemisphaerium vel etiam minus sphaerae segmentum efformantur , ita ut forma supra considerata hinc prodeat , si radius sphaerae $GF = e$ evanescat, sicque haec tractatio superiorem in se complectatur. Recta igitur DIGF per centrum inertiae I et centrum basis sphaericae G ducta proprium turbinis axem exhibet , quae quidem , uti turbines construi solent , simul unus est axium principalium corporis , bini vero reliqui momenta inertiae habent paria , qualem formam jam supra statuimus. Verum quo haec tractatio latius pateat, simulque ad titubationes corporum quorumcunque basi sphaerica praeditorum accommodari queat, axes corporis principales utcumque ab axe proprio DF diversos considerabo, eorumque respectu momenta virium explorabo.

PROBLEMA. 105.

890. Data pressione Π , quo corpus basi sphaerica praeditum plano horizontali incumbit , definire momenta inde orta respectu axium

principalium corporis, quomodocunque hi ratione axis proprii corporis fuerint dispositi.

SOLUTIO.

Fig. 114. Circa corporis centrum inertiae I descripta sphaera, sit Z ejus punctum verticale, axisque proprius teneat jam situm DIG, ut ejus declinatio a situ verticali sit $DZ = \varrho$. Cum ergo directio pressionis Π sit verticalis et per punctum G transeat existente $IG = f$, referat recta verticalis $G\Pi$ hanc pressionem $= \Pi$, ita ut $ZDG\Pi$ sit planum verticale, in quo resolvatur vis $G\Pi = \Pi$ secundum directiones GI et GV, quarum haec ad illam sit normalis, et ob angulum $DG\Pi = \varrho$ prodit vis secundum $GI = \Pi \cos \varrho$ et vis secundum $GV = \Pi \sin \varrho$: quarum illa per centrum inertiae I transiens nulla suggerit momenta. Sint nunc IA, IB, IC, corporis tres axes principales, datum situm ratione axis proprii ID tenentes, ac per puncta A, B, C ex D ducantur semicirculi DAG, DBG, DCG. Quodsi axis IA esset normalis ad planum IGV, ejus respectu foret momentum vis $GV = \Pi f \sin \varrho$, quod autem nunc in ratione sinus totius tam ad sinum arcus GA quam ad sinum anguli VGA minui debet, ita ut ex vi pressionis resultet

mom. respectu axis $IA = \Pi f \sin \varrho . \sin GA . \sin VGA$ in sensum CB
mom. respectu axis $IB = \Pi f \sin \varrho . \sin GB . \sin VGB$ in sensum AC
mom. respectu axis $IC = \Pi f \sin \varrho . \sin GC . \sin VGC$ in sensum BA.

Haec autem terna momenta supra litteris P, Q, R indicavimus, quatenus quidem in sensum contrarium agere statuuntur, quare omnibus ad punctum D translatis habebimus:

$$P = -\Pi f \sin DZ . \sin DA . \sin ZDA = -\Pi f \sin ZD . \sin ZA . \sin DZA$$
$$Q = -\Pi f \sin DZ . \sin DB . \sin ZDB = -\Pi f \sin ZD . \sin ZB . \sin DZB$$
$$R = -\Pi f \sin DZ . \sin DC . \sin ZDC = -\Pi f \sin ZD . \sin ZC . \sin DZC.$$

COROLL. 1.

891. Assumsimus hic, centrum basis G propius esse termino imo F quam centrum inertiae I: sin autem secus eveniat, ut intervallum FI minus sit intervallo $FG = e$, intervallum $GI = f$ negative capi debet. At si fuerit $GI = 0$, momenta inventa evanescunt, seu corpus in omni situ aequilibrium tenebit.

COROLL. 2.

892. Si pro situ axis proprii ID respectu axium corporis principalium ponatur arcus $AD = \zeta$, $BD = \eta$, $CD = \vartheta$, tum vero angulus ZDA

Digitized by Google

$ZDA = \varphi$, existente arcu $ZD = \varrho$, ob $\cos ADB = -\frac{\cos\zeta\cos\eta}{\sin\zeta\sin\eta}$ et $\sin ADB = \frac{-\cos\theta}{\sin\zeta\sin\eta}$, quia $\sin ADB : \sin DAB$ seu $\sin ADB : -\cos DAC = 1 : \sin BD = 1 : \sin\eta$, erit $\sin ZDB = \frac{-\cos\zeta\cos\eta\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi}{\sin\zeta\sin\eta}$, at $\cos DAC = \frac{\cos CD}{\sin AD} = \frac{\cos\theta}{\sin\zeta}$, ideoque $P = -\Pi f \sin\varrho\sin\zeta\sin\varphi$, atque

$$Q = \frac{\Pi f \sin\varrho(\cos\zeta\cos\eta\sin\varphi - \cos\theta\cos\varphi)}{\sin\zeta} \text{ et } R = \frac{\pi f \sin\varrho(\cos\zeta\cos\theta\sin\varphi - \cos\eta\cos\varphi)}{\sin\zeta}.$$

COROLL. 3.

893. Si axis proprius ID congrueret cum axe principali IA, foret $\zeta = 0$ atque $\eta = \theta = 90°$, ut esset $\cos\eta = \cos\theta = \sin\zeta$ et angulus φ maneret indefinitus. At ex prioribus formulis fiunt momenta virium:

$P = 0$, $Q = -\Pi f \sin\varrho\sin ZAB$, et $R = -\Pi f \sin\varrho\sin ZAC$
seu $P = 0$, $Q = \Pi f \cos ZC$ et $R = -\Pi f \cos ZB$.

COROLL. 4.

894. Quodsi vero ut supra ponamus $ZA = l$, $ZB = m$ et $ZC = n$, reperiemus momenta virium in genere

$P = \Pi f(\cos\theta\cos m - \cos\eta\cos n)$; $Q = \Pi f(\cos\zeta\cos n - \cos\theta\cos l)$ atque $R = \Pi f(\cos\eta\cos l - \cos\zeta\cos m)$,
unde illa si $\zeta = 0$, et $\eta = \theta = 90°$ sponte sequuntur.

EXPLICATIO.

895. Ratio investigationis harum posteriorum formularum ita se habet: Primo cum sit $\sin DZ \sin ZDA = \sin ZA \sin ZAD$ erit $P = -\Pi f \sin DA \sin ZA \sin ZAD$; at est $ZAD = BAD - BAZ$, et

$$\sin BAD = -\cos CAD = \frac{-\cos\theta}{\sin DA}; \quad \cos BAD = \frac{\cos\eta}{\sin DA}$$

$$\sin BAZ = -\cos CAZ = \frac{-\cos n}{\sin ZA}; \quad \cos BAZ = \frac{\cos m}{\sin ZA}$$

unde $\sin ZAD = \frac{-\cos m\cos\theta + \cos n\cos\eta}{\sin ZA\sin DA}$ et $P = +\Pi f(\cos\theta\cos m - \cos\eta\cos n)$.

Reliqua

Reliqua duo momenta Q et R praebet analogia fine ulteriori calculo. Deinde vero eſt $cof\,DL = cof\,\varrho = cof\,\zeta\,cof\,l + cof\,\eta\,cof\,m + cof\,\theta\,cof\,n$, quae expreſſio uti unitatem nunquam ſuperare poteſt, ita unitati aequalis eſſe nequit, ſeu $DL = 0$, niſi ſit $l = \zeta$, $m = \eta$ et $n = \theta$, ſcilicet has ternas determinationes ſimul ſuppeditat haec aequatio, $cof\,\zeta\,cof\,l + cof\,\eta\,cof\,m + cof\,\theta\,cof\,n = 1$. Cum enim praeterea ſit

$$cof\,\zeta^2 + cof\,\eta^2 + cof\,\theta^2 = 1 \text{ et } cof\,l^2 + cof\,m^2 + cof\,n^2 = 1,$$

ſi a ſumma harum illius duplum ſubtrahatur, prodit

$$(cof\,\zeta - cof\,l)^2 + (cof\,\eta - cof\,m)^2 + (cof\,\theta - cof\,n)^2 = 0,$$

trium autem quadratorum ſumma nihilo aequari nequit, niſi ſingula ſint nulla.

SCHOLION.

896. Cum neque in his expreſſionibus pro momentis virium, P, Q, R inventis, neque in preſſione $\Pi = M\left(1 + \frac{f\,dd.cof\,\varrho}{2g\,dt^2}\right)$ radius ſphaerae e baſin conſtituentis inſit, omnia quae ſupra de motu turbinis infra in cuſpidem deſinentis ſunt tradita, etiam valent de ejusmodi turbinibus, qui deſinunt in hemiſphaerium ſeu aliam ſphaerae partem, dummodo punctum F, quod ante cuſpidem denotabat, hic in centro figurae ſphaericae G conſtituatur. Perinde ergo eſt, ſive turben gyretur ſuper cuſpide, ſive ſuper hemiſphaerio, dummodo f ſit diſtantia centri inertiae I a centro baſis ſphaericae, quantuscunque enim fuerit radius hujus baſis e, is in computum non ingreditur, eo autem evaneſcente baſis turbinis abit in cuſpidem. Totum igitur caput praecedens hic inſeri intelligatur, ita ut Theoria turbinum ſine ullo labore haud mediocriter amplificata ſit cenſenda. Baſin autem ſphaericam faciendo caſus occurrit ante excluſus, ſcilicet quo centrum *inertiae* I fundo propius eſt, quam centrum ſphaericitatis, hicque ſit *quantitas f negativa*. Sive jam tale corpus ſit globus completus, ſive baſin habeat
Fig. 115. MFN portionem ſphaerae, centro G deſcriptae, qua plano horizontali incumbat, ejus motum, quatenus contactus in hanc baſin cadit, inveſtigemus. Hic autem cogimur corpori talem indolem tribuere, ut axis proprius AGIF, qui ſi fuerit verticalis, ſtatum quietis exhibet, ſimul ſit corporis axis principalis, reliqui vero bini axes principales habeant momenta inter ſe aequalia. Scilicet ſi reſpectu axis IA momentum inertiae ſit $= Maa$ reſpectu binorum reliquorum vero Mbb, et Mcc, ſtatuemus $bb = cc$. Hujusmodi ergo corpus quemcunque receperit motum impreſſum, quomodo motum ſit continuaturum, determinemus.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA. 106.

897. Si corpus basi sphaerica MFN instructum, in quo axis aequilibrii AGIF sit axis principalis, ejusque respectu momentum inertiae $= Maa$, respectu binorum reliquorum autem aequalia $= Mcc$, motum acceperit quemcunque, determinare motus continuationem. Fig. 115.

SOLUTIO.

Sit radius basis sphaericae $FG = e$, centrum autem inertiae I cadat infra centrum basis G ad intervallum $GI = f$. Pro motu progressivo, si centrum inertiae I habuerit motum secundum directionem horizontalem, eum constantem in directum conservabit, quatenus autem motu verticali cietur, is cognita pressione, quae sit $= \Pi$, inde definietur, quod si declinatio axis AF a situ verticali ponatur $= \varphi$, sit $\frac{\Pi}{M} = 1 - \frac{fdd.\cos\varphi}{2gdt^2}$, existente M corporis massa seu pondere. Verum ipsa haec pressio Π, quam corpus in planum horizontale exerit, non nisi ex motu gyratorio cognosci potest. Tenent ergo corpus nostrum respectu sphaerae fixae, in qua Z est punctum verticale, nunc elapso tempore t ejusmodi situm, ut ejus axes principales in A, B, C pertingant, ponanturque arcus $ZA = l$, $ZB = m$, $ZC = n$, tum vero anguli $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$, $XZC = \nu$, ita ut sit $l = \varphi$. Nunc autem gyretur circa polum O in sensum ABC celeritate angulari $= k$, ac positis arcubus $OA = \alpha$, $OB = \beta$, $OC = \gamma$ sit brevitatis gratia $k\cos\alpha = x$, $k\cos\beta = y$, $k\cos\gamma = z$. Momenta autem virium ex pressione Π orta sunt $P = 0$, $Q = -\Pi f\cos m$; $R = +\Pi f\cos m$, unde colligimus sequentes aequationes: Fig. 111.

$$dx = 0\,;\quad dy + \frac{aa-cc}{cc}xzdt = \frac{-2\Pi fgdt\cos n}{Mcc}\,;\quad dz + \frac{cc-aa}{cc}xydt = \frac{2\Pi fgdt\cos m}{Mcc}$$

$$dl\sin l = dt(y\cos n - z\cos m)\,;\quad dn\sin l = -dt(y\cos m + z\cos n)$$

$$dm\sin m = dt(z\cos l - x\cos n)\,;\quad dn\sin n = dt(x\cos m + y\cos l)\,;$$

reliqui anguli μ et ν hinc sponte dantur.

Si porro ponamus $\cos l = p$, $\cos m = q$, $\cos n = r$, quoniam hae aequationes congruunt cum iis, quas supra probl. 99. integravimus, nisi quod f capiatur negative, habebimus in finitis has aequationes: $x = A$ et

I. $qy + rz = B - \frac{Aaap}{cc}$

II. $(qz - ry)^2 = \frac{(Ccc+4fgp)(1-pp) - cc\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)^2}{cc+ff(1-pp)}$

III. $yy + zz = \frac{(Ccc+4fgp+ff\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)^2}{cc+ff(1-pp)}$

IV. $\frac{\Pi}{M} = \frac{2gcc - Afaa\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)}{2g(cc+ff(1-pp)} + \frac{fccp\left(Ccc+4fgp+ff\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)^2\right)}{2g(cc+ff(1-pp))^2}$

V. $dt = \frac{dp\sqrt{(cc+ff(1-pp))}}{\sqrt{\left((Ccc+4fgp)(1-pp) - cc\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)^2\right)}}$

VI. $d\lambda = \frac{-dt}{1-pp}\left(B - \frac{Aaap}{cc}\right)$

VII. $uu = AA + \frac{Ccc+4fgp+ff\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)^2}{cc+ff(1-pp)}$

VIII. $\frac{ydz-zdy}{yy+zz} = \frac{A(aa-cc)dt}{cc} + \frac{2\Pi fgdt\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)(cc+ff-ffpp)}{Mcc\left(Ccc+4fgp+ff\left(B-\frac{Aaap}{cc}\right)^2\right)}$

ubi constantes A, B, C et reliquae per integrationem ingressurae ex statu corporis initiali debent definiri.

COROLL. 1.

898. Si corpus initio quieverit, axisque principalis A fuerit in a declinatione ejus existente $\angle a = i$ et $\cos i = p$, initio erat $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, ob $u = 0$; atque $p = p$. Fit ergo $A = 0$; $B = 0$, et $Ccc = -4fgp$: Hinc elapso tempore s erit $x = 0$; $qy + rz = 0$;

$$qz - ry = \frac{2\sqrt{fg(p-p)(1-pp)}}{\sqrt{(cc+ff(1-pp))}}; \quad yy + zz = \frac{4fg(p-p)}{cc+ff(1-pp)}$$

$$= uu, \text{ et } \frac{\Pi}{M} = \frac{cc}{cc+ff(1-pp)} + \frac{2ffccp(p-p)}{(cc+ff(1-pp))^2}$$

CO-

COROLL. 2.

899. Praeterea vero in eodem casu est $d\lambda = 0$; ideoque axis, qui initio in a erat, per ipsum arcum aZ movebitur, eritque $dt = \frac{dp\gamma(cc+ff(1-pp))}{2\gamma fg(p-\mathfrak{p})(\mathfrak{p}-pp)}$, unde quia $\mathfrak{p} > p$ seu $l < \mathfrak{l}$ axis ab a recta ad Z progreditur. Denique ob $ydz - zdy = 0$, fit $z = \delta y$, et $y = \frac{2\gamma fg(p-\mathfrak{p})}{\gamma(1+\delta\delta)(cc+ff(1-pp))}$: atque $q(yy+zz) = \frac{2z\gamma fg(p-\mathfrak{p})(1-pp)}{\gamma(cc+ff(1-pp))}$, seu $q = \frac{\delta\gamma(1-pp)}{\gamma(1+\delta\delta)}$ et $r = \frac{-\gamma(1-pp)}{\gamma(1+\delta\delta)}$, unde fit $cos\, ZAB = \frac{q}{\gamma(1-pp)} = \frac{\delta}{\gamma(1+\delta\delta)}$, qui ergo angulus manet constans.

COROLL. 3.

900. Si ergo corpus initio quiescat, ejusque axis principalis IA tenuerit situm inclinatum Ia, inde recta se eriget ex a ad Z ascendens, gyrabitur autem circa punctum O, ut ob $x = s\, cos\, \alpha = 0$ arcus AO sit quadrans, et quia $cos\, ZO = cos\, \alpha\, cos\, l + cos\, \beta\, cos\, m + cos\, \gamma\, cos\, n = \frac{qy+rz}{s} = 0$, erit etiam ZO quadrans, sicque O erit polus circuli XZY. Et cum axis in Z pervenerit, erit celeritas angularis $s = \frac{2\gamma fg(1-\mathfrak{p})}{c}$.

SCHOLION. 1.

901. Si corpus initio non quieverit, sed motum quemcunque acceperit, continuatio motus ex iisdem formulis determinatur, dummodo constantes A, B, C statui initiali convenienter definiantur; ubi autem ad ejusmodi formulas integrandas devenitur, quae nonnisi concessis quadraturis superioris ordinis expediri possunt. Quin etiam casus hic simplicissimus, quo corpus initio in situ inclinato quievit, ab integratione formulae hujus $dt = \frac{dp\gamma(cc+ff(1-pp))}{2\gamma fg(p-\mathfrak{p})(1-pp)}$ pendet, quae neque per logarithmos neque arcus circulares absolvi potest. At si declinatio initialis Za fuerit quasi infinite parva, negotium ad arcus circulares perducitur: fit enim initio $Za = l$, et elapso tempore t declinatio $ZA = \mathfrak{l}$, ob $\mathfrak{l}$ et l arcus minimos, erit $p = 1 - \frac{1}{2}ll$, $dp = -ldl$, et $\mathfrak{p} = 1 - \frac{1}{2}\mathfrak{ll}$

ll unde $dt = \frac{-cdl}{\sqrt{2fg(ll-ll)}}$, et $t = \frac{c}{\sqrt{2fg}} A\cos\frac{l}{l}$ seu $l = l\cos\frac{t\sqrt{2fg}}{c}$. Quare axis IA fiet verticalis elapso tempore $= \frac{\pi c}{2\sqrt{2fg}}$, et corpus titubationes isochronas conficiet, uti pendulum simplex longitudinis $= \frac{cc}{f}$.

SCHOLION. 2.

902. Nisi corpori ejusmodi indolem tribuissemus, ut ejus axis naturalis FD, qui in statu quietis sit verticalis, simul esset ejus axis principalis, binique reliqui haberent momenta inertiae aequalia, formulas quidem differentiales motum ejus continentes assignare, nullo autem modo ob analyseos defectum ipsum motum definire potuissemus. Interim tamen, quemadmodum in casu tractato, ubi corpori infinite parvam declinationem tribuimus, usu venit, ut motus fieret satis simplex motuique penduli conformis, id adeo in genere locum habet, quomodocunque axes principales respectu axis naturalis fuerint dispositi. In situ scilicet aequilibrii, ubi axis naturalis DF situm tenet verticalem, assumo centrum inertiae I infra centrum basis sphaericae G ad intervallum GI $= f$ cadere: tum vero hoc corpus infinite parum de situ suo quietis declinari ponamus, ut arcus ZD $= \varphi$ sit infinite parvus, atque evidens est, corpus se restituendo oscillationes seu titubationes esse peracturum, donec tandem motu ob resistentiam extincto in statu aequilibrii aequiescat. Quoniam declinatio corporis hic perpetuo est minima, non opus est, ut tota corporis figura sit sphaerica, sed sufficit, si infima ejus portio eaque minima, qua plano horizontali applicatur, sit pars superficiei sphaericae, cujus centrum est in G. Hunc igitur motum titubatorium investigaturi primo dispiciamus, quomodo formulae supra in genere erutae pro hoc casu, quo axis corporis naturalis DF quam minime a situ verticali declinat, contrahi, indeque momenta virium P, Q, R ita commode definiri queant, ut deinceps ex iis motum assignare valeamus.

Fig. 114.

PROBLEMA. 107.

Fig. 114. 902. Si corpus basi sphaerica instructum infinite parum a situ aequilibrii declinet, definire momenta virium respectu ternorum ejus axium principalium.

SO-

SOLUTIO.

Circa corporis centrum inertiae I descripta sphaera, in qua Z sit punctum verticale, teneat axis corporis naturalis ID situm a verticali minime declinans, ut sit arcus $ZD = \varrho$ minimus: axes autem corporis principales respondeant punctis A, B, C, quorum situs ratione puncti D ita se habeat, ut sint arcus $DA = \zeta$, $DB = \eta$, $DC = \theta$, qui sunt constantes. Nunc autem respectu puncti verticalis Z sint arcus $ZA = l$, $ZB = m$, et $ZC = n$, qui ob arcum $ZD = \varrho$ minimum vix discrepabunt ab illis ζ, η, θ: quare si ponamus:

$$\cos l = \cos\zeta + p\,;\ \cos m = \cos\eta + q\,;\ \cos n = \cos\theta + r$$

quantitates p, q, r erunt minimae. Quia vero est tam $\cos\zeta^2 + \cos\eta^2 + \cos\theta^2 = 1$; quam $\cos l^2 + \cos m^2 + \cos n^2 = 1$, fiet

$$2p\cos\zeta + 2q\cos\eta + 2r\cos\theta + pp + qq + rr = 0.$$

Deinde autem cum sit $\cos\varrho = \cos\zeta\cos l + \cos\eta\cos m + \cos\theta\cos n$, erit $\cos\varrho = 1 + p\cos\zeta + q\cos\eta + r\cos\theta$, ideoque

$$p\cos\zeta + q\cos\eta + r\cos\theta = -\tfrac{1}{2}\varrho\varrho \text{ et } pp + qq + rr = \varrho\varrho.$$

Nunc igitur, posita pressione corporis in planum horizontale $= \Pi$, ex §. 894. tribuendo ipsi f valorem negativum, obtinebimus momenta virium respectu axium principalium:

$$P = \Pi f(r\cos\eta - q\cos\theta)\,;\ Q = \Pi f(p\cos\theta - r\cos\zeta)$$
$$\text{et } R = \Pi f(q\cos\zeta - p\cos\eta),$$

tum vero vidimus esse $\Pi = M\left(1 - \frac{f\,dd.\cos\varrho}{2g\,dt^2}\right)$; quia autem $\cos\varrho$ proxime est $= 1$, et minimas variationes subit, erit satis exacte $\Pi = M$, ita ut corpus toto suo pondere planum horizontale premere sit censendum: sicque habebimus

$$P = Mf(r\cos\eta - q\cos\theta)$$
$$Q = Mf(p\cos\theta - r\cos\zeta)$$
$$R = Mf(q\cos\zeta - p\cos\eta).$$

PROBLEMA 108.

903. Si corpus basi sphaerica praeditum de situ quietis, in quo axis DI est verticalis, parumper declinetur, iterumque dimittatur, ut ex quiete versus statum aequilibrii revertatur, determinare ejus motum.

SOLUTIO.

Elapso tempore t teneat corpus situm in fig. 114, repraesentatum, Fig. 114.
madeantque omnes denominationes in probl. praecedente stabilitae:

tum vero sint corporis momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc respectu axium principalium IA, IB, IC. Nunc autem corpus gyretur circa axem IO in sensum ABC celeritate angulari $= \omega$, sintque arcus AO $= \alpha$, BO $= \zeta$, CO $= \gamma$: ac ponatur $\omega \cos \alpha = x$, $\omega \cos \zeta = y$, $\omega \cos \gamma = z$. Quoniam igitur initio ubi $t = 0$, corpus ex quiete motum incipere assumitur, erat tum $x = 0$, $y = 0$, et $z = 0$. Tum vero quia motus corporis perpetuo manet tardissimus, quantitates x, y, z semper manebunt minimae, ita ut binarum producta xy, xz, et yz prae singulis pro evanescentibus haberi queant. Cum ergo momenta virium sollicitantium P, Q, R, modo sint definita ex §. 810. sequentes adipiscimur aequationes.

$$dx = \frac{2fgdt}{aa}(r\cos\eta - q\cos\theta)$$
$$dy = \frac{2fgdt}{bb}(p\cos\theta - r\cos\zeta)$$
$$dz = \frac{2fgdt}{cc}(q\cos\zeta - p\cos\eta).$$

Deinde quia est $\cos l = \cos\zeta + p$, $\cos m = \cos\eta + q$, et $\cos n = \cos\theta + r$ ob ζ, η, θ constantes erit $dl \sin l = -dp$; $dm \sin m = -dq$ et $dn \sin n = -dr$, unde insuper hae ternae aequationes accedunt

$-dp = dt(y\cos\theta - z\cos\eta)$;
$-dq = dt(z\cos\zeta - x\cos\theta)$;
$-dr = dt(x\cos\eta - y\cos\zeta)$;

ubi producta yr, zq, zp, xr, xq, yp ut minima prae terminis hic exhibitis omittimus.

Denique si arcus ZA a circulo quodam verticali fixo nunc declinare statuatur angulo λ, ob $\sin l^2 = \sin\zeta^2 - 2p\cos\zeta$ habebimus hanc aequationem: $d\lambda = \frac{-dt(y\cos\eta + z\cos\theta)}{\sin\zeta^2 - 2p\cos\zeta}$. Quia autem in superioribus aequationibus quantitates x, y, z et p, q, r ubique unam dimensionem occupant, atque x, y, z posito $t = 0$ evanescere debent, manifestum est, tam huic conditioni, quam sex illis aequationibus satisfieri posse ponendo:

$x = A\sin\delta t$; $y = B\sin\delta t$; $z = C\sin\delta t$;
$p = D\cos\delta t$; $q = E\cos\delta t$, $r = F\cos\delta t$,

tum enim ternae priores aequationes per $\cos\delta t$ divisae, et ternae posteriores per $\sin\delta t$ divisae dabunt.

$$A\delta = \frac{2fg}{aa}(F\cos\eta - E\cos\theta); \quad D\delta = B\cos\theta - C\cos\eta$$
$$B\delta = \frac{2fg}{bb}(D\cos\theta - F\cos\zeta); \quad E\delta = C\cos\zeta - A\cos\theta$$

Cδ

$$C\partial = \frac{2fg}{cc}(E\cos\zeta - D\cos\eta);\quad F\partial = A\cos\eta - B\cos\zeta.$$

Ex posterioribus substituantur valores coefficientium D, E, F in prioribus et obtinebimus:

$$\frac{A\partial\partial aa}{2fg} = A\cos\eta^2 - B\cos\zeta\cos\eta - C\cos\zeta\cos\theta + A\cos\theta^2$$

$$\frac{B\partial\partial bb}{2fg} = B\cos\theta^2 - C\cos\eta\cos\theta - A\cos\zeta\cos\eta + B\cos\zeta^2$$

$$\frac{C\partial\partial cc}{2fg} = C\cos\zeta^2 - A\cos\zeta\cos\theta - B\cos\eta\cos\theta + C\cos\eta^2.$$

Quodsi jam brevitatis gratia ponamus $A\cos\zeta + B\cos\eta + C\cos\theta = G$, ob $\cos\zeta^2 + \cos\eta^2 + \cos\theta^2 = 1$ erit

$$A\left(1 - \frac{\partial\partial aa}{2fg}\right) = G\cos\zeta,\quad B\left(1 - \frac{\partial\partial bb}{2fg}\right) = G\cos\eta$$

$$\text{et } C\left(1 - \frac{\partial\partial cc}{2fg}\right) = G\cos\theta.$$

Ponamus brevitatis causa $\frac{\partial\partial}{2fg} = u$; ut fiat

$$A = \frac{G\cos\zeta}{1-aau};\quad B = \frac{G\cos\eta}{1-bbu};\quad C = \frac{G\cos\theta}{1-ccu}.$$

Cum autem sit $A\cos\zeta + B\cos\eta + C\cos\theta = G$, erit

$$\frac{\cos\zeta^2}{1-aau} + \frac{\cos\eta^2}{1-bbu} + \frac{\cos\theta^2}{1-ccu} = 1,$$

qua aequatione evoluta consequimur per u dividendo,

$$\left.\begin{aligned} aabbccuu - bbccu\sin\zeta^2 + aa\cos\zeta^2 \\ - aaccu\sin\eta^2 + bb\cos\eta^2 \\ - aabbu\sin\theta^2 + cc\cos\theta^2 \end{aligned}\right\} = 0.$$

Statuantur quantitates cognitae

$$bb\,cc\sin\zeta^2 + aa\,cc\sin\eta^2 + aa\,bb\sin\theta^2 = K\,aabbcc$$

$$aa\cos\zeta^2 + bb\cos\eta^2 + cc\cos\theta^2 = L\,aabbcc$$

ut sit $uu - Ku + L = 0$, hinc que

$$u = \frac{\partial\partial}{2fg} = \tfrac{1}{2}K + \gamma(\tfrac{1}{4}KK - L)$$

et quantitas G manet indefinita ex statu initiali definienda, dum contra

tra quantitates K et L sunt ex natura corporis datae. Cum igitur hinc inventus sit valor ipsius u, inde habemus $\delta = \gamma - 2fgu$, et

$$A = \frac{G\cos\zeta}{1-aau}; \quad B = \frac{G\cos\eta}{1-bbu}; \quad C = \frac{G\cos\theta}{1-ccu}$$

$$D = \frac{Gu(bb-cc)\cos\eta\cos\theta}{\delta(1-bbu)(1-ccu)}; \quad E = \frac{Gu(cc-aa)\cos\zeta\cos\theta}{\delta(1-ccu)(1-aau)}$$

$$\text{et } F = \frac{Gu(aa-bb)\cos\zeta\cos\eta}{\delta(1-aau)(1-bbu)}.$$

Si jam initio fuerit arcus ZD = r, qui nunc est ϱ, cum sit initio $\varrho = D$: $q = E$; $r = F$, habebimus

$$DD + EE + FF = rr,$$

unde per r invenitur constans G. Denique pro angulo λ inveniendo prodit $d\lambda = \frac{-dt(B\cos\eta + C\cos\theta)\sin\delta t}{\sin\zeta^2}$, ideoque $d\lambda = \frac{(B\cos\eta + C\cos\theta)(\cos\delta t - 1)}{\delta\sin\zeta^2}$ si quidem arcus ZA initio fuerit in verticali fixo, indeque in sensum XOY moveri sumatur, quatenus ergo haec expressio pro λ est negativa, in sensum contrarium axis IA circa Z gyrari est censendus.

Denique cum sit $pp + qq + rr = \varrho\varrho$, erit $\varrho = r\cos\delta t$, ob $r = \gamma - (DD + EE + FF)$, unde patet axem ID in situm verticalem erigi elapso tempore $= \frac{\pi}{2\delta}$ et titubationes isochronas fore oscillationibus penduli, cujus longitudo est $= \frac{2g}{\delta\delta} = \frac{\gamma}{fu} = \frac{K + \gamma - (KK - 4L)}{2Lf}$.

COROLL. 1.

904. Cum sit $DD + EE + FF = rr$, erit

$$\delta\delta\, rr = AA(\cos\eta^2 + \cos\theta^2) + BB(\cos\zeta^2 + \cos\theta^2) + CC(\cos\zeta^2 + \cos\eta^2) - 2BC\cos\eta\cos\theta - 2AC\cos\zeta\cos\theta - 2AB\cos\zeta\cos\eta$$

et quia $G = A\cos\zeta + B\cos\eta + C\cos\theta$, hujus quadratum eo additum dabit

$$\delta\delta\, rr + GG = AA + BB + CC,$$

ubi

ubi si brevitatis gratia ponatur $\frac{1}{1-aau} = \mathfrak{P}$; $\frac{1}{1-bbu} = \mathfrak{Q}$; $\frac{1}{1-ccu} = \mathfrak{R}$, ob $\mathfrak{P} \cos\zeta^2 + \mathfrak{Q} \cos\eta^2 + \mathfrak{R} \cos\theta^2 = 1$ et $A = G\mathfrak{P} \cos\zeta$; $B = G\mathfrak{Q} \cos\eta$ et $C = G\mathfrak{R} \cos\theta$, fiet

$$\partial\partial rr = GG\,(\mathfrak{P}\mathfrak{P} \cos\zeta^2 + \mathfrak{Q}\mathfrak{Q} \cos\eta^2 + \mathfrak{R}\mathfrak{R} \cos\theta^2 - 1)$$

ideoque ob $\mathfrak{P}\mathfrak{P} - \mathfrak{P} = \frac{aau}{(1-aau)^2}$ habebitur

$$\int\int rr = GGu\left(\frac{aa\cos\zeta^2}{(1-aau)^2} + \frac{bb\cos\eta^2}{(1-bbu)^2} + \frac{cc\cos\theta^2}{(1-ccu)^2}\right).$$

COROLL. 2.

905. Quia porro est $\partial\partial = 2fgu$, si in subsidium vocetur aequatio $uu - Ku + L = 0$, reperietur

$$GG = \frac{-2fgrr(1-aau)(1-bbu)(1-ccu)}{aa\cos\zeta^2 + bb\cos\eta^2 + cc\cos\theta^2 - aabbccuu}.$$

EXPLICATIO.

906. Haec expressio pro GG satis concinna sequenti modo eruitur. Posito brevitatis gratia $\frac{1}{aa} = a$, $\frac{1}{bb} = b$, $\frac{1}{cc} = c$, habemus:

I. $K = a + b + c - a\cos\zeta^2 - b\cos\eta^2 - c\cos\theta^2$

II. $L = b2\cos\zeta^2 + a2\cos\eta^2 + ab\cos\theta^2$

III. $1 = \cos\zeta^2 + \cos\eta^2 + \cos\theta^2$.

Hinc deducitur ob $uu - Ku + L = 0$

$$\cos\zeta^2 = \frac{aK - L - aa}{(a-b)(c-a)}, \text{ et } u\cos\zeta^2 = \frac{(a-u)(L-au)}{(a-b)(c-a)}$$

ideoque

$$\frac{\partial\partial rr}{GG} = \frac{a(L-au)}{(a-b)(c-a)(a-u)} + \frac{b(L-cu)}{(b-c)(a-b)(b-u)} + \frac{c(L-cu)}{(c-a)(b-c)(c-u)}$$

ex qua aequatione reducta illa expressio obtinetur.

SCHOLION.

907. Quoniam haec ad vibrationes omnium corporum, quorum basis est portio sphaerica, patent, quomodocunque ejus axes principales ratione axis naturalis DGIF fuerint dispositi, eorumque respectu momenta inertiae inaequalia, ne in tanta amplitudine confundamur,

Digitized by Google

conveniet primo formulas noſtras ad ſpecies corporum ſimpliciores accommodari, quo inde facilius ad ſpecies magis complicatas progredi liceat. Ac primo quidem caſus, quo omnia momenta ineftiae ſunt inter ſe aequalia, ſeu $aa = bb = cc$, omnium eſt ſimpliciſſimus, quia tum etiam axis DF pro principali haberi poteſt, et titubationes eaedem prodire debent, quas jam ante definivimus. Tum vero duo ſaltem momenta inertiae aequalia ſtatuamus, ſicilicet $bb = cc$.

CASUS I.

quo $aa = bb = cc$.

908. Hoc ergo caſu habemus:

$$A = \frac{G \cos\zeta}{1 - \alpha\alpha u}; \quad B = \frac{G \cos\eta}{1 - \alpha\alpha u}; \quad C = \frac{G \cos\theta}{1 - \alpha\alpha u},$$

hincque $G = \dfrac{G\cos\zeta^2 + G\cos\eta^2 + G\cos\theta^2}{1 - \alpha\alpha u} = \dfrac{G}{1 - \alpha\alpha u}$, ita ut ſit $u = 0$.

Verum iisdem quoque formulis ſatisfit ponendo $u = \frac{1}{\alpha\alpha}$ et $G = 0$, ut ſit $A \cos\zeta + B \cos\eta + C \cos\theta = 0$, neque quicquam praeterea determinetur, ſicque habebimus $\delta = \frac{\Gamma 2fg}{a}$: tum vero

$$D = \frac{B\cos\theta - C\cos\eta}{\delta}; \quad E = \frac{C\cos\zeta - A\cos\theta}{\delta}; \quad F = \frac{A\cos\eta - B\cos\zeta}{\delta}$$

atque $\Sigma rr = AA + BB + CC$: ut ſit $\varrho = r \cos \delta t$. Videamus jam circa quemnam polum O corpus ſit gyraturum, ac primo habemus $\cos OD = \cos\alpha \cos\zeta + \cos\beta \cos\eta + \cos\gamma \cos\theta$, ſeu

$u \cos OD = x \cos\zeta + y \cos\eta + z \cos\theta = 0$, ſicque arcus OD quadrans. Deinde eſt $\cos OZ = \cos\alpha \cos l + \cos\beta \cos m + \cos\gamma \cos n$ ſeu

$$u \cos OZ = x \cos l + y \cos m + z \cos n = 0 + px + qy + rz = 0$$

ob $AD + BE + CF = 0$, eritque ergo etiam OZ quadrans. Ex quo perſpicitur corpus circa punctum O, quod eſt polus circuli verticalis ZDX gyrari, ſicque axem ex D recta in ſitum verticalem Z erigi, ita ut elapſo tempore t ſit $\varrho = r \cos \frac{t\Gamma 2fg}{a}$. Quare hae titubationes iſochronae erunt oſcillationibus penduli, cujus longitudo eſt $= \frac{aa}{f}$.

CA-

CASUS II.

quo duo tantum momenta principalia sunt aequalia seu $bk = cc$.

909. Hoc ergo casu est $K = \frac{cc\sin\zeta^2 + aa\sin\eta^2 + aa\sin\theta^2}{aacc} = \frac{cc\sin\zeta + aa + aa\cos\zeta^2}{aacc}$, et $L = \frac{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2}{aac^4}$: sive cum aequatio, unde u definiri debet, sit $\frac{\cos\zeta^2}{1-aau} + \frac{\sin\zeta^2}{1-ccu} = 1$, erit

$aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2 = aacc\,u$, ideoque $u = \frac{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2}{aacc}$

qui valor etiam ex generali forma elicitur, nisi quod hoc modo radix inutilis $u = \frac{1}{cc}$ excluditur. Quamobrem habebimus

$$\delta = \frac{r^2 fg(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)}{ac},$$ tum vero

$$A = \frac{Gcc}{(aa+cc)\cos\zeta}; \quad B = \frac{Gaa\cos\eta}{(aa-cc)\sin\zeta^2}; \quad C = \frac{Gaa\cos\theta}{(aa-cc)\sin\zeta^2}.$$

Deinde pro G ex r inveniendo fit

$$\delta\delta\, rr + GG = \frac{GG(a^4\cos\zeta^2 + c^4\sin\zeta^2)}{(aa-cc)^2\sin\zeta^2\cos\zeta^2}$$ sive

$$\delta\delta rr = \frac{GG(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)^2}{(aa-cc)^2\sin\zeta^2\cos\zeta^2}, \text{ et } G = \frac{(aa-cc)\delta r\zeta\sin\zeta\cos\zeta}{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2}$$

vel $G = \frac{(aa-cc)\,r\sin\zeta\cos\zeta r^2 fg}{acr(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)}$. Deinde vero obtinemus

$$D = 0, \quad E = \frac{r\cos\theta}{\sin\zeta}; \quad F = \frac{-r\cos\eta}{\sin\zeta}; \text{ atque}$$

$$A = \frac{-cr\sin\zeta r^2 fg}{ar(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)}; \quad B = \frac{ar\cos\zeta\cos\eta r^2 fg}{c\sin\zeta r(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)};$$

$$C = \frac{ar\cos\zeta\cos\theta r^2 fg}{c\sin\zeta r(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)}$$

ex quibus consequimur

$x = \mathfrak{s} \cos \alpha = A \sin \delta t$; $y = \mathfrak{s} \cos \beta = B \sin \delta t$; $z = \mathfrak{s} \cos \gamma = C \sin \delta t$
$p = \cos l - \cos \zeta = D \cos \delta t$; $q = \cos m - \cos \eta = E \cos \delta t$; $r = \cos n - \cos \theta = F \cos \delta t$,

atque $\lambda = \dfrac{-a\mathfrak{r} \sin\zeta \cos\zeta (1 - \cos\delta t) \sqrt{2fg}}{\delta c \sqrt{(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)}} = \dfrac{-aa\mathfrak{r}\sin\zeta\cos\zeta(1-\cos\delta t)}{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2}$

estque λ angulus VZA, existente ZV circulo verticali fixo, a quo declinationem poli A computamus. Deinde vero est $\varrho = \mathfrak{r} \cos \delta t$, et ut obtineamus angulum DZV, quaeramus angulum DZA, ex formula $\cos$

$$\mathrm{DZA} = \frac{\cos\zeta - \cos l \cos\varrho}{\varrho \sin l} = \frac{\cos\zeta - \cos\zeta\cos\varrho - p\cos\varrho}{\varrho\sin\zeta} = \tfrac{1}{2}\varrho\frac{\cos\zeta}{\sin\zeta},$$

ob $D = 0$ ideoque $p = 0$, ergo $\cos \mathrm{DZA} = \dfrac{\mathfrak{r}\cos\zeta\cos\delta t}{2\sin\zeta}$, qui cum sit infinite parvus, patet angulum DZA esse rectum proxime et angulo ZDA aequalem. Quare cum initio angulus ZDA fuerit non rectus, haec solutio, quippe quae manifesto tantum est particularis, eo non extenditur. Ceterum vero et hae titubationes erunt isochronae oscillationibus penduli, cujus longitudo est $= \dfrac{aacc}{f(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)}$.

Denique cum sit $\mathfrak{s} = \sin\delta t . \sqrt{(AA + BB + CC)}$, prodibit

$$\mathfrak{s} = \frac{\mathfrak{r}\sqrt{2fg(a^4\cos\zeta^2 + c^4\sin\zeta^2)}}{ac\sqrt{(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)}} . \sin\delta t.$$

Pro polo autem gyrationis O invenimus:

$$\mathfrak{s}\cos \mathrm{OD} = (A\cos\zeta + B\cos\eta + C\cos\theta)\sin\delta t = G\sin\delta t \text{ et}$$
$$\mathfrak{s}\cos \mathrm{OZ} = (A\cos l + B\cos m + C\cos n)\sin\delta t = G\sin\delta t.$$

ita ut sit $\mathrm{OD} = \mathrm{OZ}$, ob $Ap + Bq + Cr = 0$.

SCHOLION.

910. Mirum non est, hanc solutionem non esse generalem, cum enim ex data indole corporis, quantitatibus aa, bb, cc et angulis ζ, η, θ comprehensa, et ex situ axis DF initiali ejusve declinatione $\mathfrak{r}$ a situ verticali omnes coefficientes A, B, C, D, E, F cum numero δ determinentur, ex iis angulus ADZ, quo arcus DA initio ab arcu DZ deviabat, sponte determinatur, neque amplius arbitrio nostro, uti natura rei postulat, relinquitur. Verum cum in genere pro quantitate u geminum valorem elicuerimus, quorum neutrum prae altero rejicere fas est, si utrumque simul adhibeamus, solutionem ampliorem obtinebimus,

bimus, unde simul effici potest, ut angulus ADZ initio fuerit dato angulo aequalis. Cum enim in aequationibus differentialibus quantitates x, y, z, et p, q, r ubique unicam habeant dimensionem, si iis duplici modo satisfieri queat, pro qualibet quantitate summa binorum ejus valorum statui poterit, hincque solutionem generalem impetrabimus, quam hic exponamus.

PROBLEMA. 109.

911. Si corpus basi sphaerica praeditum de situ aequilibrii quomodocunque infinite parum declinetur, subitoque dimittatur, definire motum titubatorium, quo agitabitur.

SOLUTIO.

Retentis denominationibus superioris problematis, quoniam posito

$$\frac{\sin\zeta^2}{aa} + \frac{\sin\eta^2}{bb} + \frac{\sin\theta^2}{cc} = K \text{ et } \frac{\cos\zeta^2}{bbcc} + \frac{\cos\eta^2}{aacc} + \frac{\cos\theta^2}{aabb} = L$$

pro u geminum invenimus valorem, sint ii

$$u = \tfrac{1}{2}K + \sqrt{(\tfrac{1}{4}KK - L)} \text{ et } u' = \tfrac{1}{2}K - \sqrt{(\tfrac{1}{4}KK - L)}$$

unde pro δ etiam binos adipiscimur valores, qui sint $\delta = \sqrt{2fgu}$ et $\delta' = \sqrt{2fgu'}$

atque hinc pro fenis quantitatibus x, y, z et p, q, r sequentes impetrabimus valores

$$x = u\cos\alpha = \frac{G\cos\zeta\sin\delta t}{1-aau} + \frac{H\cos\zeta\sin\delta' t}{1-aau'}$$

$$y = u\cos\beta = \frac{G\cos\eta\sin\delta t}{1-bbu} + \frac{H\cos\eta\sin\delta' t}{1-bbu'}$$

$$z = u\cos\gamma = \frac{G\cos\theta\sin\delta t}{1-ccu} + \frac{H\cos\theta\sin\delta' t}{1-ccu'}$$

tum vero porro

$$p = \cos\lambda - \cos\zeta = \frac{Gu(bb-cc)\cos\eta\cos\theta\cos\delta t}{\delta(1-bb)(1-ccu)} + \frac{Hu'(bb-cc)\cos\eta\cos\theta\cos\delta' t}{\delta'(1-bbu')(1-ccu')}$$

$x = u \cos\alpha = A \sin\delta t$; $y = u \cos\beta = B \sin\delta t$; $z = u \cos\gamma = C \sin\delta t$
$p = \cos\lambda - \cos\zeta = D \cos\delta t$; $q = \cos\mu - \cos\eta = E \cos\delta t$; $r = \cos\nu - \cos\theta = F \cos\delta t$,

atque $\lambda = \frac{-\alpha r \sin\zeta \cos\zeta (1-\cos\delta t) r 2fg}{\delta c r (aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)} = \frac{-aar\sin\zeta\cos\zeta(1-\cos\delta t)}{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2}$

esque λ angulus VZA, existente ZV circulo verticali fixo, a quo declinationem poli A computamus. Deinde vero est $\varrho = r \cos\delta t$, et ut obtineamus angulum DZV, quaeramus angulum DZA, ex formula $\cos DZA = \frac{\cos\zeta - \cos\lambda\cos\varrho}{\varrho\sin\lambda} = \frac{\cos\zeta - \cos\zeta\cos\varrho - p\cos\varrho}{\varrho\sin\zeta} = \frac{1}{2}\varrho\frac{\cos\zeta}{\sin\zeta}$,

ob $D = 0$ ideoque $p = 0$, ergo $\cos DZA = \frac{r\cos\zeta\cos\delta t}{2\sin\zeta}$, qui cum sit infinite parvus, patet angulum DZA esse rectum proxime et angulo ZDA aequalem. Quare cum initio angulus ZDA fuerit non rectus, haec solutio, quippe quae manifesto tantum est particularis, eo non extenditur. Ceterum vero et hae titubationes erunt isochronae oscillationibus penduli, cujus longitudo est $= \frac{aacc}{f(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)}$.

Denique cum sit $u = \sin\delta t . r(AA + BB + CC)$, prodibit

$$u = \frac{rr2fg(a^4\cos\zeta^2 + c^4\sin\zeta^2)}{acr(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)} \cdot \sin\delta t.$$

Pro polo autem gyrationis O invenimus:

$u \cos OD = (A\cos\zeta + B\cos\eta + C\cos\theta)\sin\delta t = G\sin\delta t$ et
$u \cos OZ = (A\cos\lambda + B\cos\mu + C\cos\nu)\sin\delta t = G\sin\delta t$,

ita ut sit $OD = OZ$, ob $Ap + Bq + Cr = 0$.

SCHOLION.

910. Mirum non est, hanc solutionem non esse generalem, cum enim ex data indole corporis, quantitatibus aa, bb, cc et angulis ζ, η, θ comprehensa, et ex situ axis DF initiali ejusve declinatione r a situ verticali omnes coefficientes A, B, C, D, E, F cum numero δ determineantur, ex iis angulus ADZ, quo arcus DA initio ab arcu DZ deviabat, sponte determinatur, neque amplius arbitrio nostro, uti natura rei postulat, relinquitur. Verum cum in genere pro quantitate u geminum valorem elicuerimus, quorum neutrum prae altero rejicere fas est, si utrumque simul adhibeamus, solutionem ampliorem obtinebimus,

Digitized by Google

bimus, unde simul effici potest, ut angulus ADZ initio fuerit dato angulo aequalis. Cum enim in aequationibus differentialibus quantitates x, y, z, et p, q, r ubique unicam habeant dimensionem, si iis duplici modo satisfieri queat, pro qualibet quantitate summa binorum ejus valorum statui poterit, hincque solutionem generalem impetrabimus, quam hic exponamus.

PROBLEMA. 109.

911. Si corpus basi sphaerica praeditum de situ aequilibrii quomodocunque infinite parum declinetur, subitoque dimittatur, definire motum titubatorium, quo agitabitur.

SOLUTIO.

Retentis denominationibus superioris problematis, quoniam posito

$$\frac{\sin\zeta^2}{aa}+\frac{\sin\eta^2}{bb}+\frac{\sin\theta^2}{cc}=\mathrm{K} \text{ et } \frac{\cos\zeta^2}{bbcc}+\frac{\cos\eta^2}{aacc}+\frac{\cos\theta^2}{aabb}=\mathrm{L}$$

pro u geminum invenimus valorem, sint ii

$$u=\tfrac{1}{2}\mathrm{K}+\gamma\,(\tfrac{1}{4}\mathrm{KK}-\mathrm{L}) \text{ et } u'=\tfrac{1}{2}\mathrm{K}-\gamma\,(\tfrac{1}{4}\mathrm{KK}-\mathrm{L})$$

unde pro δ etiam binos adipiscimur valores, qui sint $\delta=\gamma 2fgu$ et $\delta=\gamma 2fgu'$

atque hinc pro fenis quantitatibus x, y, z et p, q, r sequentes impetrabimus valores

$$x=z\cos\alpha=\frac{G\cos\zeta\sin\delta t}{1-aau}+\frac{H\cos\zeta\sin\delta' t}{1-aau'}$$

$$y=z\cos\beta=\frac{G\cos\eta\sin\delta t}{1-bbu}+\frac{H\cos\eta\sin\delta' t}{1-bbu'}$$

$$z=z\cos\gamma=\frac{G\cos\theta\sin\delta t}{1-ccu}+\frac{H\cos\theta\sin\delta' t}{1-ccu'}$$

tum vero porro

$$p=\cos\lambda-\cos\zeta=\frac{Gu(bb-cc)\cos\eta\cos\theta\cos\delta t}{\delta(1-bb)(1-ccu)}+\frac{Hu'(bb-cc)\cos\eta\cos\theta\cos\delta' t}{\delta(1-bbu')(1-ccu')}$$

$$q = \cos m - \cos n = \frac{Gu(cc-aa)\cos\zeta\cos\theta\cos\delta t}{\delta(1-ccu)(1-aau)} + \frac{Hu'(cc-aa)\cos\zeta\cos\theta\cos\delta' t}{\delta'(1-ccu')(1-aau')}$$

$$r = \cos n - \cos\theta = \frac{Gu(aa-bb)\cos\zeta\cos\eta\cos\delta t}{\delta(1-aau)(1-bbu)} + \frac{Hu'(aa-bb)\cos\zeta\cos\eta\cos\delta' t}{\delta'(1-aau')(1-bbu')}.$$

Hic jam habemus binas quantitates constantes arbitrarias G et H, atque hi valores ita satisfaciunt, ut facta substitutione in aequationibus differentialibus termini tam per G quam per H affecti seorsim se destruant. Verum si initio arcus ZD fuerit $= \mathfrak{r}$, posito $t = 0$, fieri debet $pp + qq + rr = \mathfrak{rr}$. Deinde vero si initio fuerit angulus ZDA $= \mathfrak{f}$, ob

$$\cos\mathfrak{f} = \frac{\cos\mathfrak{l} - \cos\zeta\cos\mathfrak{r}}{\sin\zeta\sin\mathfrak{r}} = \frac{\cos\zeta(1-\cos\mathfrak{r})+p}{\sin\zeta\sin\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{r}\cos\zeta}{\sin\zeta} + \frac{p}{\mathfrak{r}\sin\zeta}$$ et ob

$\mathfrak{r}$ infinite parvum, erit $p = \mathfrak{r}\sin\zeta\cos\mathfrak{f}$. Si hic ergo pro p ejus valor superior posito $t = 0$ substituatur, habebitur alia aequatio ex qua cum illa conjuncta binae constantes G et H determinabuntur. At posito angulo VZA $= \lambda$ erit $d\lambda = \frac{-dt(y\cos\eta + z\cos\theta)}{\sin\zeta^2}$, cujus integrale facile exhibetur. Simili autem modo positis angulis VZB $= \mu$ et VZC $= \nu$, erit

$$d\mu = \frac{-dt(z\cos\theta + x\cos\zeta)}{\sin\eta^2}; \text{ et } d\nu = \frac{-dt(x\cos\zeta + y\cos\eta)}{\sin\theta^2}.$$

Hic autem notari convenit, si sit $bb = cc$, fore binos valores $u = \frac{1}{cc}$ et $u' = \frac{\sin\zeta^2}{aa} + \frac{\cos\zeta^2}{cc}$, ideoque pro priore fractionum superiorum quasdam numeratores ac denominatores simul evanescere. Ad earum ergo valores investigandos ponatur $\frac{1}{bb} = \frac{1}{cc} + \omega$, existente ω quantitate evanescente, reperieturque

$$u = \frac{1}{cc} + \frac{\omega\cos\theta^2}{\sin\zeta^2} \text{ et } u' = \frac{\sin\zeta^2}{aa} + \frac{\cos\zeta^2}{cc};$$ hincque si

$\frac{G}{a}$

$\frac{G}{\omega}$ ponatur $= I$, ut sit $G = I\omega = o$, fiet

$$x = z\cos\alpha = \frac{H\cos\zeta\sin\delta^N t}{1-aau^t} = \frac{-Hcc\sin\delta^N t}{(aa-cc)\cos\zeta}$$

$$y = z\cos\mathfrak{C} = \frac{I\sin\zeta^2\sin\delta t}{cc\cos\eta} + \frac{H\cos\eta\sin\delta^N t}{1-ccu^t} = \frac{I\sin\zeta^2\sin\delta t}{cc\cos\eta} + \frac{Haa\cos\eta\sin\delta^N t}{(aa-cc)\sin\zeta^2}$$

$$z = z\cos\gamma = \frac{-I\sin\zeta^2\sin\delta t}{cc\cos\theta} + \frac{H\cos\theta\sin\delta^N t}{1-ccu^t} = \frac{-I\sin\zeta^2\sin\delta t}{cc\cos\theta} + \frac{Haa\cos\theta\sin\delta^N t}{(aa-cc)\sin\zeta^2}$$

deinde vero

$$p = \cos l - \cos\zeta = \frac{I\sin\zeta^4\cos\delta t}{\delta cc\cos\eta\cos\theta}$$

$$q = \cos m - \cos\eta = \frac{-I\sin\zeta^2\cos\zeta\cos\delta t}{-\delta cc\cos\theta} - \frac{Hu^t(aa-cc)\cos\zeta\cos\theta\cos\delta^N t}{\delta(1-aau^t)(1-ccu^t)}$$

$$r = \cos n - \cos\theta = \frac{-I\sin\zeta^2\cos\zeta\cos\delta t}{\delta cc\cos\eta} + \frac{Hu^t(aa-cc)\cos\zeta\cos\eta\cos\delta^N t}{\delta^N(1-aau^t)(1-ccu^t)}$$

ubi est $\frac{aa-cc}{(1-aau^t)(1-ccu^t)} = \frac{-aacc}{(aa-cc)\sin\zeta^2\cos\zeta^2}$.

Vel si ponamus $I = \frac{\mathfrak{G}\delta cc\cos\eta\cos\theta}{\sin\zeta^2}$ et $H = \frac{\mathfrak{H}\delta^N(aa-cc)\sin\zeta^2\cos\zeta}{aacc}$

ob $u^t = \frac{1}{cc}$ et $u^t = \frac{aa\cos\zeta^2+cc\sin\zeta^2}{aacc}$, ideoque $\delta = \frac{r^2fg}{\theta}$ et $\delta^N = \frac{r^2fg(aa\cos\zeta^2+cc\sin\zeta^2)}{ac}$

erit $x = z\cos\alpha = \frac{-\mathfrak{H}\delta^N\sin\zeta^2\sin\delta^N t}{aa}$

$y =$

$$y = \varkappa \cos \mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{H} \partial' \cos \zeta \cos \eta \sin \partial' t}{cc} + \mathfrak{G} \partial \cos \theta \sin \partial t$$

$$z = \varkappa \cos \gamma = \frac{\mathfrak{H} \partial' \cos \zeta \cos \theta \sin \partial' t}{cc} - \mathfrak{G} \partial \cos \eta \sin \partial t$$

$$p = \cos l - \cos \zeta = \mathfrak{G} \sin \zeta^2 \cos \partial t$$
$$q = \cos m - \cos \eta = -\mathfrak{G} \cos \zeta \cos \eta \cos \partial t + \mathfrak{H} u' \cos \theta \cos \partial' t$$
$$r = \cos n - \cos \eta = -\mathfrak{G} \cos \zeta \cos \theta \cos \partial t - \mathfrak{H} u' \cos \eta \cos \partial' t$$

quae formulae iam sine ulla difficultate ad omnes casus accommodari possunt.

COROLL. 1.

912. Haec integralia adhuc latius extendi possunt, cum x, y, z et p, q, r partes constantes recipiant; ac forma litterarum G et H mutata, habebimus:

$$x = \cos \zeta \left(\mathfrak{E} + \mathfrak{G} (1 - bbu)(1 - ccu) \sin \partial t + \mathfrak{H} (1 - bbu')(1 - ccu') \sin \partial' t \right)$$
$$y = \cos \eta \left(\mathfrak{E} + \mathfrak{G} (1 - aau)(1 - ccu) \sin \partial t + \mathfrak{H} (1 - aau')(1 - ccu') \sin \partial' t \right)$$
$$z = \cos \theta \left(\mathfrak{E} + \mathfrak{G} (1 - aau)(1 - bbu) \sin \partial t + \mathfrak{H} (1 - aau')(1 - bbu') \sin \partial' t \right)$$

atque

$$p = \mathfrak{F} \cos \zeta + (bb - cc) \cos \eta \cos \theta \left(\frac{\mathfrak{G} u (1 - aau) \cos \partial t}{\partial} + \frac{\mathfrak{H} u' (1 - aau') \cos \partial' t}{\partial'} \right)$$

$$q = \mathfrak{F} \cos \eta + (cc - aa) \cos \zeta \cos \theta \left(\frac{\mathfrak{G} u (1 - bbu) \cos \partial t}{\partial} + \frac{\mathfrak{H} u' (1 - bbu') \cos \partial' t}{\partial'} \right)$$

$$r = \mathfrak{F} \cos \theta + (aa - bb) \cos \zeta \cos \eta \left(\frac{\mathfrak{G} u (1 - ccu) \cos \partial t}{\partial} + \frac{\mathfrak{H} u' (1 - ccu') \cos \partial' t}{\partial'} \right)$$

CO-

Digitized by Google

COROLL. 2.

913. Angulorum etiam δt et $\delta' t$ uterque quantitate conſtante augeri poteſt, ac ſi eorum loco ſcribamus $\delta t + g$ et $\delta t + \mathfrak{h}$, integralia continebunt ſex conſtantes arbitrarias g, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, ideoque erunt integralia completa harum ſex aequationum differentialium:

$$aadx = 2fgdt\,(r\,cof\,\eta - q\,cof\,\theta);\quad dp = dt\,(z\,cof\,\eta - y\,cof\,\theta)$$
$$bbdy = 2fgdt\,(p\,cof\,\theta - r\,cof\,\zeta);\quad dq = dt\,(x\,cof\,\theta - z\,cof\,\zeta)$$
$$ccdz = 2fgdt\,(q\,cof\,\zeta - p\,cof\,\eta);\quad dr = dt\,(y\,cof\,\zeta - x\,cof\,\eta).$$

COROLL. 3.

914. Si corpus initio quieverit, ut in problemate aſſumſimus, ita ut tum fuerit $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$; poni debet $\mathfrak{E} = 0$, $g = 0$, et $\mathfrak{h} = 0$, reliquas autem conſtantes ex ſitu corporis initiali definiri oportet

COROLL. 4.

915. Nempe ſi pro initio, quo $t = 0$, ponantur anguli $ZDA = l$, $ZDB = m$, et $ZDC = n$; ut ſit

$$ſi\,(l - m) = \frac{-cof\,\theta}{ſi\,\zeta\,ſi\,\eta};\quad ſi\,(m - n) = \frac{-cof\,\zeta}{ſi\,\eta\,ſi\,\theta};\quad ſi\,(n - l) = \frac{-cof\,\eta}{ſi\,\zeta\,ſi\,\theta}$$

$$cof\,(l - m) = \frac{-cof\,\zeta\,cof\,\eta}{ſi\,\zeta\,ſi\,\eta};\quad cof\,(m - n) = \frac{-cof\,\eta\,cof\,\theta}{ſi\,\eta\,ſi\,\theta};\quad cof\,(n - l) = \frac{-cof\,\zeta\,cof\,\theta}{ſi\,\zeta\,ſi\,\theta}$$

pro initio $t = 0$, conſtantes ita definiri oportet, ut ſi tum fuerit $ZD = r$, fiat

$$p = r\,ſi\,\zeta\,cof\,l;\quad q = r\,ſi\,\eta\,cof\,m;\quad r = r\,ſi\,\theta\,cof\,n.$$

EXPLICATIO.

916. Ad conſtantes $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ in genere ex ſtatu initiali modo deſcripto definiendas, ponamus brevitatis gratia

$$aa\,cof\,\zeta^2 + bb\,cof\,\eta^2 + cc\,cof\,\theta^2 = \mathfrak{A}$$
$$bb\,cc\,cof\,\zeta^2 + aa\,cc\,cof\,\eta^2 + aa\,bb\,cof\,\theta^2 = \mathfrak{B}$$

Digitized by Google

sitque $\frac{\mathfrak{G} u \cos g}{\delta} = X$, et $\frac{\mathfrak{H} u' \cos h}{\delta} = Y$, quo calculus facilius expediatur.

Eo autem absoluto reperietur

$$\mathfrak{F} = r \sin\zeta \cos\zeta \cos l + r \sin\eta \cos\eta \cos m + r \sin\theta \cos\theta \cos n$$

$$X + Y = \frac{+r\sin\zeta\cos l}{\cos\eta\cos\theta}(\mathfrak{B} - bbcc) + \frac{r\sin\eta\cos m}{\cos\zeta\cos\theta}(\mathfrak{B} - aacc) + \frac{r\sin\theta\cos n}{\cos\zeta\cos\eta}(\mathfrak{B} - aabb)$$
$$\overline{(bb-cc)(cc-aa)(aa-bb)}$$

$$uX + u'Y = \frac{-r\sin\zeta\cos l}{\cos\eta\cos\theta}(\mathfrak{A} - aa) - \frac{r\sin\eta\cos m}{\cos\zeta\cos\theta}(\mathfrak{A} - bb) - \frac{r\sin\theta\cos n}{\cos\zeta\cos\theta}(\mathfrak{A} - cc)$$
$$\overline{(bb-cc)(cc-aa)(aa-bb)}$$

Ex his autem valoribus $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ est pro superioribus

$$L = \frac{\mathfrak{A}}{aabbcc} \text{ et } K = \frac{aabb+aacc+bbcc-\mathfrak{B}}{aabbcc}$$

ex quibus fit

$$u\ \tfrac{1}{2}K - r(\tfrac{1}{4}KK - L) \text{ et } u' = \tfrac{1}{2}K + r(\tfrac{1}{4}KK - L)$$

ita ut sit $u + u' = K$ et $u' - u = r(KK - 4L)$.

Haec analysis in genere valet, etiamsi corpori initio motus fuerit impressus, quoniam loco angulorum δt et $\delta' t$ hic adhibuimus $\delta t + g$ et $\delta' t + h$. Simili modo, quo hic ex situ initiali constantes $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ definivimus, ex motu initio impresso, quantitates x, y, z datos obtinebunt valores, quibus si formulae coroll. 1. traditae et pro δt et $\delta' t$ scribendo $\delta t + g$ et $\delta' t + h$ extensae, posito $t = 0$ aequentur, determinabuntur reliquae constantes $\mathfrak{E}$, g et h: quae quidem, uti jam ante notavimus evanescunt, si motus a quiete incipiat.

SCHOLION.

917. Pro casu ergo ejusmodi corporum pro quibus est $bb = cc$, erit $u = \frac{1}{cc}$, $u' = \frac{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2}{aacc}$, atque $\delta = r^2 fgu$, $\delta' = r^2 fgu'$, integralia in genere ita se habebunt:

$$x = \mathfrak{E}\cos\zeta \quad \ldots = \frac{\mathfrak{H}\delta'\sin\zeta^2\sin(\delta' t + h)}{aa}$$

$$y = \mathfrak{E}\cos\eta + \mathfrak{G}\delta\cos\theta\sin(\delta t + g) + \frac{\mathfrak{H}\delta'\cos\zeta\cos\eta\sin(\delta' t + h)}{cc}$$

$z =$

Digitized by Google

$$z = \mathfrak{E}\cos\theta - \mathfrak{G}\delta\cos\eta\sin(\delta t+g) + \frac{\mathfrak{H}\delta'\cos\zeta\cos\theta\sin(\delta' t+h)}{cc}$$

atque

$$p = \mathfrak{F}\cos\zeta + \mathfrak{G}\sin\zeta^2\cos(\delta t+g)$$
$$q = \mathfrak{F}\cos\eta - \mathfrak{G}\cos\zeta\cos\eta\cos(\delta t+g) + \mathfrak{H}u'\cos\theta\cos(\delta' t+h)$$
$$r = \mathfrak{F}\cos\theta - \mathfrak{G}\cos\zeta\cos\theta\cos(\delta t+g) - \mathfrak{H}u'\cos\eta\cos(\delta' t+h).$$

Quare si initio $t = 0$ fuerit

$$p = r\sin\zeta\cos l\,;\quad q = r\sin\eta\cos m\,,\quad r = r\sin\theta\cos n$$

reperitur

$$\mathfrak{H} = \frac{r\sin\eta\cos\theta\cos m - r\cos\eta\sin\theta\cos n}{u'\sin\zeta^2\cos h}$$

$$\mathfrak{G} = \frac{r\sin\zeta^2\cos l - r\sin\eta\cos\zeta\cos\eta\cos m - r\sin\theta\cos\zeta\cos\theta\cos n}{\sin\zeta^2\cos g}$$

$$\mathfrak{F} = r\sin\zeta\cos\zeta\cos l + r\sin\eta\cos\eta\cos m + r\sin\theta\cos\theta\cos n.$$

At datis angulis l, m, n, simul dantur ζ, η, θ

$$\cos\zeta^2 = \frac{\cos(l-m)\cos(n-l)}{\sin(l-m)\sin(n-l)};\quad \cos\eta^2 = \frac{\cos(m-n)\cos(l-m)}{\sin(m-n)\sin(l-m)};$$

$$\cos\theta^2 = \frac{\cos(n-l)\cos(m-n)}{\sin(n-l)\sin(m-n)}$$

$$\sin\zeta^2 = \frac{-\cos(m-n)}{\sin(l-m)\sin(n-l)};\quad \sin\eta^2 = \frac{-\cos(n-l)}{\sin(m-n)\sin(l-m)};$$

$$\sin\theta^2 = \frac{-\cos(l-m)}{\sin(n-l)\sin(m-n)}.$$

Ex his autem formulis colligitur, esse

$$\sin\zeta\cos\zeta\cos l + \sin\eta\cos\eta\cos m + \sin\theta\cos\theta\cos n = 0,$$

ita ut constans supra definita $\mathfrak{F}$ semper sit $= 0$. Simili vero modo est

$$\frac{\sin\zeta\cos l}{\cos\eta\cos\theta} - \frac{\sin\eta\cos m}{\cos\zeta\cos\theta} + \frac{\sin\theta\cos n}{\cos\zeta\cos\eta} = 0$$

unde valores coefficientium supra definiti multo simplicius determinantur, ita ut litterae $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ex illis prorsus elidantur. Valent haec in genere etiamsi non sit $bb = cc$.

PROBLEMA. 110.

918. Si corpus basi sphaerica praeditum habeat duos axes principales pares, eique cum de situ quietis infinite parum fuerit declinatum

tum, motus minimus quicunque fuerit impressus, definire motus continuationem.

SOLUTIO.

Fig. 116. Sit ID axis corporis aequilibrii per centrum inertiae I et centrum basis G transiens, sitque hoc illo altius situm existente intervallo GI $= f$. Sit porro IA axis corporis singularis principalis ejusque respectu momentum inertiae $= Maa$, respectu axium omnium autem ad hunc normalium $= Mcc$, quos omnes cum aeque pro principalibus habere liceat, sumatur alter IB in arcu DA producto, eritque alter IC, ut quadrans AC sit ad AD normalis, ideoque DC etiam quadrans ad AD normalis. Posito ergo $DA = \zeta$, erit $DB = \eta = \zeta + 90°$ et $DC = \theta = 90°$. Initio autem quo $t = 0$, fuerit arcus $DZ = r$, et angulus $ZDA = l$, erit $ZDB = m = l$ et $ZDC = n = l + 90°$. Ex formulis ergo praecedentibus habebimus

$$u = \frac{l}{cc}; u' = \frac{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2}{aacc}; \vartheta = \frac{r - 2fg}{c}; \gamma = \frac{r - 2fg\,(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)}{ac}$$

tum vero ex hoc situ initiali fiet primo $\mathfrak{F} = 0$, tum vero

$$r\sin\zeta\cos l = \mathfrak{G}\sin\zeta^2\cos g; \quad \text{ergo}$$

$$r\cos\zeta\cos l = \mathfrak{G}\sin\zeta\cos\zeta\cos g; \quad \mathfrak{G} = \frac{r\cos l}{\sin\zeta\cos g}$$

$$-r\sin l = \mathfrak{H}u'\sin\zeta\cos\mathfrak{h}; \quad \mathfrak{H} = \frac{-r\sin l}{u'\sin\zeta\cos\mathfrak{h}}.$$

Deinde initio corpori motus sit impressus circa axem IO celeritate angulari $= s$ in sensum ABC, existente $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, fierique debet

$$s\cos a = \mathfrak{E}\cos\zeta - \frac{\mathfrak{H}\vartheta\sin\zeta^2\sin\mathfrak{h}}{aa}$$

$$s\cos b = -\mathfrak{E}\sin\zeta - \frac{\mathfrak{H}\vartheta\sin\zeta\cos\zeta\sin\mathfrak{h}}{cc}$$

$$s\cos c = \mathfrak{G}\vartheta\sin\zeta\sin g$$

unde concludimus

$$s\,(aa\cos a\cos\zeta - cc\cos b\sin\zeta) = \mathfrak{E}\,(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)$$

$$\text{et } s\,(\cos a\sin\zeta + \cos b\cos\zeta) = -\mathfrak{H}\vartheta'\sin\zeta\sin\mathfrak{h}\left(\frac{\sin\zeta^2}{aa} + \frac{\cos\zeta^2}{cc}\right)$$

Ergo

Digitized by Google

Ergo $\mathfrak{E} = \frac{\varepsilon(aa\cos\alpha\cos\zeta - cc\cos\mathfrak{b}\sin\zeta)}{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2}$

$\mathfrak{G} = \frac{\varepsilon\cos c}{\delta\sin\zeta\sin\mathfrak{g}}$

$\mathfrak{H} = \frac{-\varepsilon(\cos\alpha\sin\zeta + \cos\mathfrak{b}\cos\zeta)}{\delta' u'\sin\zeta\sin\mathfrak{h}}$

hinc erit $tang\ \mathfrak{g} = \frac{\varepsilon\cos c}{\delta r\cos l}$, et $tang\ \mathfrak{h} = \frac{\varepsilon(\cos\alpha\sin\zeta + \cos\mathfrak{b}\cos\zeta)}{\delta' r\sin l}$ unde anguli $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{h}$ hincque numeri $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ innotescunt.

His definitis teneat corpus elapso tempore t situm in figura repraesentatum, sitque $ZD = \varrho$, $ZA = l$, $ZB = m$, $ZC = n$: ac ponatur $\cos l = \cos\zeta + p$, $\cos m = \cos\eta + q$; $\cos n = \cos\theta + r$ seu $\cos m = -\sin\zeta + q$ et $\cos n = r$. Deinde gyretur nunc circa axem IO celeritate angulari $= \varkappa$ in sensum ABC existentibus arcubus $OA = \mathfrak{a}$, $OB = \mathfrak{C}$, $OC = \gamma$, ac ponendo $\varkappa\cos\mathfrak{a} = x$, $\varkappa\cos\mathfrak{C} = y$ et $\varkappa\cos\gamma = z$, habebimus ex §. 917.

$$\varkappa\cos\mathfrak{a} = \frac{\varepsilon\cos\zeta(aa\cos\alpha\cos\zeta - cc\cos\mathfrak{C}\sin\zeta)}{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2} + \frac{\delta' r\sin\zeta\sin l\sin(\delta' t + \mathfrak{h})}{aau'\cos\mathfrak{h}}$$

$$\varkappa\cos\mathfrak{C} = \frac{-\varepsilon\sin\zeta(aa\cos\alpha\cos\zeta - cc\cos\mathfrak{C}\sin\zeta)}{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2} + \frac{\delta' r\cos\zeta\sin l\sin(\delta' t + \mathfrak{h})}{aau'\cos\mathfrak{h}}$$

$$\varkappa\cos\gamma = \frac{\delta r\cos l\sin(\delta t + \mathfrak{g})}{\cos\mathfrak{g}}$$

tum vero praeterea:

$$p = \frac{r\sin\zeta\cos l\cos(\delta t + \mathfrak{g})}{\cos\mathfrak{g}}$$

$$q = \frac{r\cos\zeta\cos l\cos(\delta t + \mathfrak{g})}{\cos\mathfrak{g}}$$

$$r = \frac{-r\sin l\cos(\delta' t + \mathfrak{h})}{\cos\mathfrak{h}}.$$

Ex his si ponatur arcus $ZD = \varrho$, erit

$$\varrho = r\sqrt{\left(\frac{\cos l^2\cos(\delta t + \mathfrak{g})^2}{\cos\mathfrak{g}^2} + \frac{\sin l^2\cos\delta' t + \mathfrak{h})^2}{\cos\mathfrak{h}^2}\right)}.$$

Digitized by Google

Porro ex triangulo AZD est $cof ADZ = \frac{cos\, l - cos\, \zeta cos\, \varrho}{si\, \zeta si\, \varrho} = \frac{p + \frac{1}{2}\varrho\varrho cos\, \zeta}{\varrho si\, \zeta}$

$= \frac{p}{\varrho si\, \zeta}$ evanescente termino $\frac{\varrho cos\, \zeta}{2 si\, \zeta}$, hinc ergo erit

$$cof\ ADZ = \frac{cos\, l\, cos(\delta t + g)}{cos\, g} : r\left(\frac{cos\, l^2\, cos(\delta t + g)^2}{cos\, g^2} + \frac{si\, l^2\, cos(\delta' t + h)^2}{cos\, h^2}\right)$$

ideoque $tang\ ADZ = \frac{cos\, g\, tang\, l\, cos(\delta' t + h)}{cos\, h\, cos(\delta t + g)}$.

Praeter arcum autem $DZ = \varrho$ et angulum ADZ nosse oportet angulum XZD a circulo verticali fixo ZX computatum; est vero $DZA = 180° - ADZ$, seu $tang\ DZA = \frac{-cof\, g\, cof(\delta t + h)}{cof\, h\, cof(\delta t + g)}\ tang\ l$, cum initio esset $DZA = 180° - l$ et $tang\ DZA = -tang\ l$. Deinde vero posito angulo $XZA = \lambda$, est $d\lambda = \frac{-dt(y\, cof\, \eta + z\, cof\, \theta}{si\, \zeta^2} = \frac{y\, dt}{si\, \zeta}$, hincque $\lambda = Const. - \frac{\varepsilon t(a\, a\, cof\, \alpha\, cof\, \zeta - c\, c\, cof\, b\, si\, \zeta)}{a\, a\, cof\, \zeta^2 + c\, c\, si\, \zeta^2} - \frac{r\, cof\, \zeta\, si\, l\, cos(\delta' t + h)}{c\, c\, u'\, si\, cof\, h}$. Quodsi ponamus initio angulum XZD evanuisse, initio fuerat $\lambda = 180° - l$, sicque constans hic ingressa est:

$$Const. = 180° - l + \frac{r\, cof\, \zeta\, si\, l}{c\, c\, u'\, si\, \zeta}$$

unde habebimus:

$$\lambda = 180° - l - \frac{\varepsilon t(a\, a\, cof\, \alpha\, cof\, \zeta - c\, c\, cof\, b\, si\, \zeta)}{a\, a\, cof\, \zeta^2 + c\, c\, si\, \zeta^2} + \frac{r\, cof\, \zeta\, si\, l}{c\, c\, u'\, si\, \zeta}\left(1 - \frac{cof(\delta' t + h)}{cof\, h}\right)$$

hincque $XZD = \lambda - DZA$, ex quibus ad tempus t situs corporis perfecte cognoscitur, in hacque determinatione simul motus continetur.

COROLL. 2.

919. Si motus corpori initio impressus evanescat, est $g = 0$ et $h = 0$; hincque

$\kappa =$

$$x = \varrho \cos\alpha = \frac{\delta' r \sin\zeta \sin\lambda \sin\delta' t}{a a u'}$$

$$y = \varrho \cos\beta = \frac{\delta' r \cos\zeta \sin\lambda \sin\delta' t}{c c u'}$$

$$z = \varrho \cos\gamma = \delta r \cos\lambda \sin\delta t$$

$$p = r \sin\zeta \cos\lambda \cos\delta t;\ q = r \cos\zeta \cos\lambda \cos\delta t;\ r = -r \sin\lambda \cos\delta' t$$

$\tang \mathrm{ADZ} = \tang (180° - \mathrm{DZA}) = \frac{\cos\delta' t}{\cos\delta t} \tang\lambda$, et $\lambda = 180° - l + \frac{r \cos\zeta \sin l}{c c u' \sin\zeta} (1 - \cos\delta' t)$.

COROLL. 2.

920. Sin autem corpori initio motus fuerit impressus celeritate angulari ε, haec non multo major esse debet quam r. Si enim $\frac{\varepsilon}{r}$ esset numerus praemagnus, anguli g et $\mathfrak{h}$ prodirent fere recti, eorumque cosinus fere evanescentes, sicque numeri p, q, r nimis fierent magni, quam ut tanquam valde parvae, uti natura solutionis exigit, considerari possent. Namque arcus $ZD = \varrho$ semper minimus esse debet.

COROLL. 3.

921. Cum sit $\varrho = \gamma (xx + yy + zz)$, nisi ternae quantitates x, y, z seorsim evanescant, fieri nequit, ut corpus unquam ad quietem redigatur. Atque etiamsi corpus a quiete moveri inceperit, tamen fieri potest, ut corpus deinceps nunquam ad quietem revertatur, hocque adeo semper eveniet, nisi fuerit vel $\sin l = 0$ vel $\cos l = 0$; quin etiam tum axis corporis naturalis DF nunquam in situm verticalem perveniet.

COROLL. 4.

922. Cum fit r quantitas valde exigua, si corpus initio nullum motum acceperit, ut sit $\varepsilon = 0$, erit satis exacte $\lambda = 180 - l$; scilicet angulus XZA manebit constans, motusque axis IA ita comparatus, ut in arcu ZA modo ad punctum verticale Z propius accedat modo ab eo longius recedat, erit autem $\mathrm{AZ} = \zeta - r \cos l \cos\delta t$, et ang. $\mathrm{ZAD} = \frac{r \sin l \cos\delta' t}{\sin\zeta}$.

CO-

Digitized by Google

COROLL. 5.

923. In genere autem quicunque motus corpori initio fuerit impressus, erit

$$XZA = \lambda = 180^\circ - \int - \frac{\varepsilon t (aa \cos a \cos\zeta - cc \cos b \sin\zeta)}{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2}$$

sicque arcus ZA uniformiter circa punctum verticale Z circumferetur: deinde vero cum sit $\sin AD : \sin DZA = ZD\ (\varrho) : ZAD$, erit $ZAD = \frac{r \sin I \cos(\delta' t + \mathfrak{h})}{\sin\zeta \cos\mathfrak{h}}$ atque arcus $ZA = \zeta - \frac{r \cos I \cos(\delta t + \mathfrak{g})}{\cos\mathfrak{g}}$. Seu pro $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ substituendis valoribus:

$$\text{angulus } ZAD = \frac{r \sin I \cos \delta' t}{\sin\zeta} - \frac{\varepsilon(\cos a \sin\zeta + \cos b \cos\zeta) \sin \delta' t}{\delta \sin\zeta}$$

$$\text{et arcus } ZA = \zeta - r \cos I \cos \delta t + \frac{\varepsilon \cos c \sin \delta t}{\delta}.$$

SCHOLION. 1.

924. Hae tres postremae formulae, angulos XZA, ZAD cum arcu ZA exhibentes, totam problematis solutionem complectuntur. Quodsi enim has res ad quodvis tempus assignare possumus, situm corporis perfecte cognoscimus. Quare si pro δ et δ' valores supra inventos substituamus, universa problematis solutio his formulis continebitur:

$$\text{ang. } XZA = 180^\circ - \int - \frac{\varepsilon t (aa \cos a \cos\zeta - cc \cos b \sin\zeta)}{aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2}$$

$$\text{arc. } ZA = \zeta - r \cos I \cos \frac{t\sqrt{2fg}}{c} + \frac{\varepsilon c \cos c}{\sqrt{2fg}} \sin \frac{t\sqrt{2fg}}{c}$$

$$\text{ang. } ZAD = \frac{r \sin I}{\sin\zeta} \cos \frac{t\sqrt{2fg}(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)}{ac} - \frac{\varepsilon ac(\cos a \sin\zeta + \cos b \cos\zeta)}{\sin\zeta\sqrt{2fg}(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)}$$
$$\sin \frac{t\sqrt{2fg}(aa\cos\zeta^2 + cc\sin\zeta^2)}{ac}.$$

Quodsi ergo omnia momenta inertiae fuerint aequalia, scilicet $aa = cc$, erit

$$\text{ang. } XZA = 180^\circ - \int - \varepsilon t (\cos a \cos\zeta - \cos b \sin\zeta)$$

$$\text{arc. } ZA = \zeta - r \cos I \cos \frac{t\sqrt{2fg}}{c} + \frac{\varepsilon c \cos c}{\sqrt{2fg}} \sin \frac{t\sqrt{2fg}}{c}$$

ang.

Digitized by Google

$$\text{ang. ZAD} = \frac{\text{r}\,\text{si}\,\text{l}}{\text{si}\,\zeta}\,\text{cos}\,\frac{\text{t}\sqrt{2fg}}{c} - \frac{\text{sc}\,(\text{cos}\,\text{a}\,\text{si}\,\zeta + \text{cos}\,\text{b}\,\text{cos}\,\zeta)}{\text{si}\,\zeta\sqrt{2fg}}\,\text{si}\,\frac{\text{t}\sqrt{2fg}}{c}$$

quo casu positio puncti A est plane arbitraria.

SCHOLION. 2.

925. Argumentum, quod in hoc capite potissimum evolvendum suscepimus, motum scilicet titubatorium corporum basi sphaerica praeditorum, perfecte pertractavimus, dummodo titubationes fuerint quam minimae, quae hypothesis etiam in doctrina oscillationum statui solet: formulae enim §. 912. et seqq. exhibitae perfectam continent hujus quaestionis solutionem, si quidem ibi anguli δt et $\delta' t$ constantibus g et h augeantur. Constantes autem ex statu initiali definire docuimus in §. 916. quae operatio vehementer sublevatur annotatione sub finem §. 917. adjuncta; quare ad motum corporum cylindricorum explicandum progrediamur.

CAPUT XIX.

DE MOTU CORPORUM CYLINDRICORUM SUPER PLANO HORIZONTALI.

THEOREMA. 11.

926. Dum corpus cylindricum plano horizontali movetur, pressio, qua plano innititur, est verticalis, et per centrum cujusdam sectionis cylindri ad longitudinem normaliter factae transit.

DEMONSTRATIO.

Corpus cylindricum plano horizontali incumbit secundum lineam rectam axi cylindri parallelam, in qua vires existunt cylindrum sustentantes, fierique potest ut hae vires per totam illam rectam sint dispersae. Cum autem istae vires omnes sint ad planum horizontale normales, ideoque verticales, ac parallelae inter se, una dabitur vis iis omnibus aequivalens: cujus ergo directio pariter erit verticalis, certoque rectae contactus puncto insistet. Quodsi igitur in hoc puncto cylindrus ad longitudinem normaliter secetur, sectio erit circulus, et vis omnibus pressionibus aequivalens, quia est in hac sectione ad punctum con-

Digitized by Google

tactus verticalis per ejus centrum transibit. Nisi ergo haec sectio transeat per centrum inertiae corporis, directio media pressionis non in sectione per centrum inertiae ad longitudinem normaliter facta versabitur.

EXPLICATIO.

927. Corpora igitur hic consideramus cylindrica, in quibus primo notetur eorum axis quasi geometricus, ad quem omnes sectiones normaliter factae, sint circuli aequales, ita ut corpus sit cylindrus rectus, cujus motus, dum plano horizontali perpetuo incumbit, sumus exploraturi. Fig. 117. Si centrum inertiae in ipso axe geometrico esset, in omni situ cylindrus aequilibrium teneret: sin autem secus, consideretur sectio cylindri ad axem normalis per centrum inertiae I facta, cujus centrum sit in G, atque ad statum aequilibrii requiritur, ut recta GI sit verticalis, ex quo duplex datur aequilibrii situs, alter quo centrum inertiae I infra G alter, quo supra G versatur, quorum ille *stabilis*, hic *labilis* vocetur. In omni autem cylindri situ axis geometricus est horizontalis, rectae contactus verticaliter imminens. Deinde ternos axes mechanicos cylindri nosse oportet, qui si qualemcunque materiae distributionem admittimus, utcunque ab axe geometrico seu secundum longitudinem ducto differre possunt, a quorum positione motus determinatio potissimum pendet. Per centrum inertiae I etiam ducta concipiatur recta axi geometrico parallela, quae plerumque axis principalis esse solet, et semper manet horizontalis. His igitur notatis, quomodocunque cylindrus plano horizontali incumbat, in sectione LMFN per centrum inertiae I facta notetur punctum T, ubi hic circulus planum horizontale tangit, deinde etiam illa sectio huic parallela probe notetur, in qua media directio pressionum versatur, quae rectae TG erit parallela; ac tam quam quantitas pressionis, quam distantia sectionis, in qua versatur, a sectione per centrum inertiae facta, erit incognita, demum ex motu deinceps determinanda: siquidem hac vi effici debet, ut axis cylindri longitudinalis perpetuo maneat horizontalis, et cylindrus plano horizontali incumbat.

SCHOLION.

928. In his motibus investigandis non opus est, ut totum corpus in figuram cylindri sit efformatum, sed sufficit, si in locis, quibus plano horizontali incumbit, talem habuerit formam. Huc ergo pertinent motus omnium eorum corporum, quae in terminos cylindricos definunt,

Digitized by Google

desinunt, quibus tantum planis horizontalibus aeque elevatis utrinque incumbant, dum intra eos moles corporis utcunque fuerit extensa, quemadmodum evenit in cunis, quae motu vacillatorio super terminis, quos tanquam circulos spectare licet, agitantur: deinde etiam huc referendus est motus pendulorum, quae non circa axem linearem, uti supra assumsimus, sed materialem utrinque in cylindrum abeuntem oscillantur, dum his binis cylindris planis horizontalibus incumbunt, intra quae massa penduli dependet. Etsi igitur his casibus sectiones mediae non sunt circuli, tamen binas illas sectiones, in quarum altera centrum inertiae versatur, in altera vero vis pressionis, tanquam circulos spectare licet, quoniam figura eatenus tantum in censum venit, quatenus corpus plano horizontali incumbit. Tum vero etiam nisi hujusmodi corpora integras circumvolutiones peragant, ne opus quidem est, ut toti termini sint cylindrici, sed sufficit, si eorum portio, qua fit contactus, talem habeat figuram, cujus axem longitudinalem per totum corpus extensum probe notasse convenit. Quocirca haec tractatio ad plurimos casus extenditur, de quo motu primum tenendum, centrum inertiae a viribus sollicitantibus alium motum nisi in eadem recta verticali recipere non posse; ita ut nullum consequatur motum horizontalem, nisi extrinsecus talem acceperit, quem autem deinceps uniformiter esset prosecuturum, in quo cum nulla insit difficultas, ad eum hic non attendimus.

PROBLEMA III.

929. Si corpus cylindricum super plano horizontali moveatur, deturque pressio, qua plano innititur, definire motum progressivum, quo centrum inertiae corporis incedet.

SOLUTIO.

Ad axem cylindri fiat sectio normalis per centrum inertiae I, quae sive corpus sit cylindrus continuus, sive tantum terminis cylindricis sit praeditum, spectetur tanquam circulus LMFN basibus aequalis, cujus centrum sit in G, centrum autem inertiae corporis in I, existente intervallo GI $= f$, ita ut in statu quietis recta LIGF teneat situm verticalem, in quo centrum inertiae I supra centrum circuli G in figura repraesentatur, quod si fuerit profundius, intervallum GI $= f$ negative est capiendum. Nunc autem contactus respondeat puncto T, ita ut recta ad planum circuli in T normalis sit linea contactus in planum horizontale Hh cadens. Ducta igitur per centrum circuli recta ΠGT ad contactum Fig. 118.

Digitized by Google

T, parallela erit directioni pressionis, qua corpus a plano horizontali repellitur, quae vis, in quacunque alia sectione versetur, ponatur $= \Pi$, quam tanquam cognitam spectamus. Sit porro pondus cylindri $= M$, radius circuli $GF = GT = e$, et angulus declinationis $\Pi GL = \varphi$; erit elevatio centri inertiae I supra horizontem $IP = e + f \cos \varphi$, quae ponatur $= v$. Quoniam igitur in motum progressivum inquirimus, et gravitas deorsum urget secundum IP vi $= M$, pressionis vis Π ipsi centro inertiae I sursum secundum IV applicata concipiatur, ita ut jam tota vis deorsum sollicitans sit $= M - \Pi$, et massa movenda $= M$: unde ex principiis motus habetur $ddv = \frac{-2g(M-\Pi)}{M} dt^2$, hincque $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{ddv}{2g\,dt^2}$ seu $\Pi = M\left(1 + \frac{f\,dd.\cos\varphi}{2g\,dt^2}\right)$, qua aequatione angulus $\Pi GL = \varphi$, ex eoque elevatio centri inertiae $IP = e + f \cos \varphi$ innotescit: ac nisi corpori motus horizontalis fuerit impressus, punctum I in recta PIV agitaretur, in ea vel ascendens vel descendens, ita ut punctum P maneret fixum, ex quo punctum contactus T definitur, quia est $PT = f \sin \varphi$. Sin autem corpus acceperit motum horizontalem, eum constanter servaret uniformem in directum, motusque puncti I ex hoc aequabili rectilineo horizontali et illo verticali foret compositus.

SCHOLION.

930. Praeterea autem in hoc corpore motus gyratorius generari potest, ita tamen ut tam punctum G quam recta ad circulum LMFN in G normalis, quae est axis proprius cylindri, perpetuo maneat in eodem plano horizontali. Ad hunc motum gyratorium investigandum, sepositio motu progressivo centrum inertiae I tanquam in quiete spectabimus, circa quod sphaera descripta, in ea circulus LMFN perpetuo erit verticalis, ad quem si recta normalis per I ducatur, erit ea axis cylindri longitudinalis. Qua conditione observata, omnes motus gyratorii, quorum cylindrus est capax, facile in figura repraesentari possunt. Hic autem ante omnia ad situm axium principalium probe attendi oportet, quorum respectu momenta ex vi pressionis nata sunt definienda.

PROBLEMA. 112.

931. Si corpus cylindricum plano horizontali incumbens habeat situm quemcunque, deturque tam pressio Π quam sectio cylindri transversa-

Digitized by Google

versa, in qua versatur, invenire ejus momenta respectu axium principalium.

SOLUTIO.

Sectio cylindri per centrum inertiae I ad longitudinem normaliter facta cadat in planum tabulae, in qua recta IZ sit normalis, et recta LIG per centrum hujus sectionis G transeat, ita ut sit intervallum IG $= f$, et angulus ZIL $= \varrho$. Ex G erigatur ad planum tabulae normalis GH usque ad sectionem, in qua vis pressionis Π versatur, sitque intervallum GH $= h$, ac supra vidimus esse $\Pi = M\left(1 + \frac{f\,dd.\cos\varrho}{2g\,dt^2}\right)$ cujus vis directio erit HΠ verticalis ideoque parallela ipsi IZ. Iam radio arbitrario $= 1$, circa centrum inertiae I sphaera concipiatur descripta, ad cujus superficiei puncta A, B, C axes corporis principales dirigantur, vocenturque arcus pro horum punctorum determinatione LA $= \zeta$, LB $= \eta$, LC $= \theta$; item ZA $= l$, ZB $= m$, ZC $= n$ existente ZL $= \varrho$; tum vero anguli ZLA $= \mathfrak{f}$, ZLB $= \mathfrak{g}$, ZLC $= \mathfrak{h}$, ut sit Fig. 119.

$$\cos l = \cos\zeta\cos\varrho + \cos\mathfrak{f}\sin\zeta\sin\varrho;\quad \cos m = \cos\eta\cos\varrho + \cos\mathfrak{g}\sin\eta\sin\varrho;$$
$$\cos n = \cos\theta\cos\varrho + \cos\mathfrak{h}\sin\theta\sin\varrho.$$

Ac primo quidem vis HΠ $= \Pi$ resolvatur secundum directiones axibus principalibus parallelas, quae resolutio perinde instituitur, ac si vis haec in centro I secundum directionem IZ esset applicata: inde autem nascitur

vis sec. IA $= \Pi\cos l$; vis sec. IB $= \Pi\cos m$; vis sec. IC $= \Pi\cos n$, quae autem vires jam in puncto H applicatae sunt intelligendae. Ducatur recta IH quae erit $= \sqrt{(ff + hh)}$, secans sphaeram in F, erit $\tang$ GIH $= \frac{h}{f}$, et arcus LF cum arcu ZL faciet angulum ZLF rectum. Ponatur arcus LF $= e$, erit $h = -f\tang e$ et IH $= \frac{-f}{\cos e}$, ita ut loco intervalli GH $= h$ commode arcum LF $= e$ in calculo retineamus. Nunc autem investigari oportet, quomodo recta IF ad axes principales inclinetur, quae inclinatio per arcus FA, FB et FC definitur. Reperitur autem

$$\cos AF = \cos\zeta\cos e + \sin\mathfrak{f}\sin\zeta\sin e$$
$$\cos BF = \cos\eta\cos e + \sin\mathfrak{g}\sin\eta\sin e$$
$$\cos CF = \cos\theta\cos e + \sin\mathfrak{h}\sin\theta\sin e.$$

Repraesentent jam rectae inter se normales IA, IB, IC axes principales Fig. 120.

les corporis, inter quos existat recta $IH = \frac{-f}{\cos e}$ eruntque coordinatae pro puncto H axibus parallelae

$$IN = IH \cos AF \; ; \; NM = IH \cos BF \; ; \; MH = IH \cos CF$$

et vires in H applicatae axibusque parallelae erunt

$$\text{vis } Ha = \Pi \cos l \; ; \; \text{vis } Hb = \Pi \cos m \; ; \; \text{vis } Hc = \Pi \cos n,$$

unde respectu axium principalium nascuntur momenta:

Mom. respectu axis IA in sensum BC $= \Pi . IH (\cos n \cos BF - \cos m \cos CF)$

Mom. respectu axis IB in sensum CA $= \Pi . IH (\cos l \cos CF - \cos n \cos AF)$

Mom. respectu axis IC in sensum AB $= \Pi . IH (\cos m \cos AF - \cos l \cos BF)$.

Quae momenta cum supra litteris P, Q, R indicaverimus, si valores supra exhibitos substituamus, obtinebimus:

$$P = \frac{-\Pi f}{\cos e}\Big(\sin e \cos \varepsilon (\sin \gamma \sin \eta \cos \theta - \sin \beta \cos \eta \sin \theta) + \cos e \sin \varepsilon (\cos \beta \cos \eta \sin \theta - \cos \gamma \sin \eta \cos \theta) + \sin \eta \sin \theta \sin e \sin \varepsilon (\sin \gamma \cos \beta - \cos \gamma \sin \beta)\Big)$$

At est $\sin \gamma \cos \beta - \cos \gamma \sin \beta = \sin (\gamma - \beta) = \frac{-\cos \zeta}{\sin \eta \sin \theta}$, tum vero

$$\sin \gamma \sin \eta \cos \theta - \sin \beta \cos \eta \sin \theta = \cos \xi \sin \zeta$$
$$\cos \beta \cos \eta \sin \theta - \cos \gamma \sin \eta \cos \theta = \sin \xi \sin \zeta$$

ita ut tam pro P quam pro Q et R ex analogia habeamus

$$P = \frac{-\Pi f}{\cos e}(\cos \xi \sin \zeta \sin e \cos \varepsilon + \sin \xi \sin \zeta \cos e \sin \varepsilon - \cos \zeta \sin e \sin \varepsilon)$$

$$Q = \frac{-\Pi f}{\cos e}(\cos \gamma \sin \eta \sin e \cos \varepsilon + \sin \gamma \sin \eta \cos e \sin \varepsilon - \cos \eta \sin e \sin \varepsilon)$$

$$R = \frac{-\Pi f}{\cos e}(\cos \beta \sin \theta \sin e \cos \varepsilon + \sin \beta \sin \theta \cos e \sin \varepsilon - \cos \theta \sin e \sin \varepsilon).$$

COROLL. 1.

932. Cum sit $-f \tang e = h$, et h denotet intervallum GH, quo sectio, in quam cadit pressio, antrorsum distat a sectione, in qua est centrum inertiae, erit

$$P = -\Pi f \sin \xi \sin \zeta \sin \varepsilon + \Pi h (\cos \xi \sin \zeta \cos \varepsilon - \cos \zeta \sin \varepsilon)$$
$$Q = -\Pi f \sin \gamma \sin \eta \sin \varepsilon + \Pi h (\cos \gamma \sin \eta \cos \varepsilon - \cos \eta \sin \varepsilon)$$
$$R = -\Pi f \sin \beta \sin \theta \sin \varepsilon + \Pi h (\cos \beta \sin \theta \cos \varepsilon - \cos \theta \sin \varepsilon).$$

CO-

Digitized by Google

COROLL. 2.

933. Dum ergo motus corporis determinatur, non solum quantitatem pressionis Π sed etiam intervallum $GH = b$ definiri oportet, ut habeatur locus, ubi media directio pressionum est applicata.

EXPLICATIO.

934. Relatio inter arcus ζ, η, θ et angulos $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ insignes suppeditat proprietates, inter quas substitutiones in solutione adhibitae continentur. Primo enim pro illorum angulorum differentiis invenimus

$$\cos(\mathfrak{f}-\mathfrak{g}) = \frac{-\cos\zeta\cos\eta}{\sin\zeta\sin\eta}; \quad \cos(\mathfrak{g}-\mathfrak{h}) = \frac{-\cos\eta\cos\theta}{\sin\eta\sin\theta}; \quad \cos(\mathfrak{h}-\mathfrak{f}) = \frac{-\cos\zeta\cos\theta}{\sin\zeta\sin\theta}$$

$$\sin(\mathfrak{f}-\mathfrak{g}) = \frac{-\cos\theta}{\sin\zeta\sin\eta}; \quad \sin(\mathfrak{g}-\mathfrak{h}) = \frac{-\cos\zeta}{\sin\eta\sin\theta}; \quad \sin(\mathfrak{h}-\mathfrak{f}) = \frac{-\cos\eta}{\sin\zeta\sin\theta}$$

Hinc jam anguli $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ ad angulum $\mathfrak{f}$ reduci possunt, ob $\mathfrak{g} = \mathfrak{f} - (\mathfrak{f}-\mathfrak{g})$ et $\mathfrak{h} = \mathfrak{f} + (\mathfrak{h}-\mathfrak{f})$, unde colligitur

$$\sin\mathfrak{g} = \frac{-\sin\mathfrak{f}\cos\zeta\cos\eta + \cos\mathfrak{f}\cos\theta}{\sin\zeta\sin\eta}; \quad \sin\mathfrak{h} = \frac{-\sin\mathfrak{f}\cos\zeta\cos\theta - \cos\mathfrak{f}\cos\eta}{\sin\zeta\sin\theta}$$

$$\cos\mathfrak{g} = \frac{-\cos\mathfrak{f}\cos\zeta\cos\eta - \sin\mathfrak{f}\cos\theta}{\sin\zeta\sin\eta}; \quad \cos\mathfrak{h} = \frac{-\cos\mathfrak{f}\cos\zeta\cos\theta + \sin\mathfrak{f}\cos\eta}{\sin\zeta\sin\theta}$$

Quodsi binis conjungendis vel $\cos\mathfrak{f}$ vel $\sin\mathfrak{f}$ elidatur, obtinentur sequentes formulae:

I. $\sin\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\zeta + \sin\mathfrak{g}\sin\eta\cos\eta + \sin\mathfrak{h}\sin\theta\cos\theta = 0$

II. $\cos\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\zeta + \cos\mathfrak{g}\sin\eta\cos\eta + \cos\mathfrak{h}\sin\theta\cos\theta = 0$

III. $\sin\mathfrak{f}\sin\zeta = -\cos\mathfrak{g}\sin\eta\cos\theta + \cos\mathfrak{h}\cos\eta\sin\theta$

IV. $\sin\mathfrak{g}\sin\eta = -\cos\mathfrak{h}\sin\theta\cos\zeta + \cos\mathfrak{f}\cos\mathfrak{h}\sin\zeta$

V. $\sin\mathfrak{h}\sin\theta = -\cos\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\eta + \cos\mathfrak{g}\cos\zeta\sin\eta$

VI. $\cos\mathfrak{f}\sin\zeta = \sin\mathfrak{g}\sin\eta\cos\theta - \sin\mathfrak{h}\cos\eta\sin\theta$

VII. $\cos\mathfrak{g}\sin\eta = \sin\mathfrak{h}\sin\theta\cos\zeta - \sin\mathfrak{f}\cos\theta\sin\zeta$

VIII. $\cos\mathfrak{h}\sin\theta = \sin\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\eta - \sin\mathfrak{g}\cos\zeta\sin\eta$

IX. $\sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{f}\sin\zeta^2 + \sin\mathfrak{g}\cos\mathfrak{g}\sin\eta^2 + \sin\mathfrak{h}\cos\mathfrak{h}\sin\theta^2 = 0$

X. $\sin\mathfrak{f}^2\sin\zeta^2 + \sin\mathfrak{g}^2\sin\eta^2 + \sin\mathfrak{h}^2\sin\theta^2 = 1$: XI. $\cos\mathfrak{f}^2\sin\zeta^2 + \cos\mathfrak{g}^2\sin\eta^2 + \cos\mathfrak{h}^2\sin\theta^2 = 1$

quarum

Digitized by Google

quarum ope aequationes, ad quas motus determinatio perducitur, simpliciores reddi possunt.

PROBLEMA. 113.

Fig. 121. 935. Si corpus cylindricum quodcunque super plano horizontali moveatur utcunque, aequationes exhibere, quibus ad quodvis tempus ejus situs et motus gyratorius determinetur.

SOLUTIO.

Manentibus denominationibus in praecedente problemate factis, consideretur centrum inertiae I ut quiescens, circa quod descripta sit sphaera, cujus punctum verticale Z, et circulus verticalis fixus ZDX, in quo recta centralis IL initio situm ID tenuerit. Elapso autem tempore t ea pervenerit in L, ac ponatur arcus $ZL = \varrho$ et angulus $XZL = \varphi$, atque hinc situs axium principalium, quorum poli sint A, B, C ita definitur, ut sint arcus $LA = \zeta$, $LB = \eta$, $LC = \theta$, et anguli $ZLA = \mathfrak{f}$, $ZLB = \mathfrak{g}$, $ZLC = \mathfrak{h}$, qui sunt quantitates constantes, ex quibus cum arcu variabili $ZL = \varrho$, ita definiuntur arcus $ZA = l$, $ZB = m$, $ZC = n$ ut sit:

$$\cos l = \cos\zeta\cos\varrho + \cos\mathfrak{f}\sin\zeta\sin\varrho;\ \cos m = \cos\eta\cos\varrho + \cos\mathfrak{g}\sin\eta\sin\varrho;\ \cos n = \cos\theta\cos\varrho + \cos\mathfrak{h}\sin\theta\sin\varrho.$$

Quodsi jam momenta inertiae corporis respectu axium principalium IA, IB, IC sint Maa, Mbb, Mcc existente M massa corporis, Π autem sit pressio, et sectio in qua ea versatur ab I antrorsum distet intervallo $= s$, quod quia est variabile, in superioribus formulis loco b scribi debet s. Gyretur nunc corpus circa polum O celeritate angulari $= \omega$ in sensum ABC, positisque arcubus $OA = \alpha$, $OB = \zeta$, $OC = \gamma$ sit $\omega\cos\alpha = x$, $\omega\cos\zeta = y$, $\omega\cos\gamma = z$, ac primo habemus $\Pi = M\left(1 + \frac{fdd.\cos\varrho}{2gdt^2}\right)$, tum vero has tres aequationes

$$aadx + (cc - bb)\,yzdt = \frac{-2\Pi fg}{M}\,dt\sin\mathfrak{f}\sin\zeta\sin\varrho + \frac{2\Pi gs}{M}\,dt\,(\cos\mathfrak{f}\sin\zeta\cos\varrho - \cos\zeta\sin\varrho)$$

$$bbdy + (aa - cc)\,xzdt = \frac{-2\Pi fg}{M}\,dt\sin\mathfrak{g}\sin\eta\sin\varrho + \frac{2\Pi gs}{M}\,dt\,(\cos\mathfrak{g}\sin\eta\cos\varrho - \cos\eta\sin\varrho)$$

$ccdz$

Digitized by Google

$$cc dz + (bb - aa)\, xy dt = \frac{-2\Pi f g}{M} dt \sin\mathfrak{h} \sin\theta \sin\varrho + \frac{2\Pi g s}{M} dt$$
$$(\cos\mathfrak{h} \sin\theta \cos\varrho - \cos\theta \sin\varrho).$$

Praeterea habemus has tres aequationes

$$dl \sin l = dt\,(y \cos n - z \cos m) = d\varrho\,(\cos\zeta \sin\varrho - \cos\mathfrak{f} \sin\mathfrak{f} \sin\zeta \cos\varrho)$$
$$dm \sin m = dt\,(z \cos l - x \cos n) = d\varrho\,(\cos\eta \sin\varrho - \cos\mathfrak{g} \sin\eta \cos\varrho)$$
$$dn \sin n = dt\,(x \cos m - y \cos l) = d\varrho\,(\cos\theta \sin\varrho - \cos\mathfrak{h} \sin\theta \cos\varrho)$$

quarum autem binas tantum sumsisse sufficit, ita ut supersint sex aequationes, ex quibus variabiles totidem x, y, z, Π, s et ϱ ad datum tempus t determinari oporteat. Denique vero positis angulis $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$, $XZC = \nu$, sit

$$d\lambda \sin l^2 = -dt\,(y \cos m + z \cos n)$$

quam unam resolvisse sufficit. At cum sit $LZA = \lambda - \Phi$, erit $\cos(\lambda - \Phi) = \frac{\cos\zeta - \cos l \cos\varrho}{\sin l \sin\varrho}$ et $\sin(\lambda - \Phi) = \frac{\sin\mathfrak{f} \sin\zeta}{\sin l}$, unde $(d\lambda - d\Phi)\cos(\lambda - \Phi) = \frac{-dl \sin\mathfrak{f} \sin\zeta \cos l}{\sin l^2} = \frac{(d\lambda - d\Phi)(\cos\zeta - \cos l \cos\varrho)}{\sin l \sin\varrho}$, ideoque

$$d\Phi = \frac{-dt\,(y \cos m + z \cos n)}{\sin l^2} + \frac{dl \sin\mathfrak{f} \sin\zeta \cos l \sin\varrho}{\sin l\,(\cos\zeta - \cos l \cos\varrho)},$$

hincque etiam ad datum tempus angulus Φ definitur: ex quibus rebus motus corporis perfecte cognoscitur.

COROLL. 1.

936. Cum sit $\cos\zeta - \cos l \cos\varrho = \sin\varrho\,(\cos\zeta \sin\varrho - \cos\mathfrak{f} \sin\mathfrak{f} \sin\zeta \cos\varrho) = \frac{dl \sin l \sin\varrho}{d\varrho}$ erit $d\Phi = \frac{-dt\,(y \cos m + z \cos n)}{\sin l^2} + \frac{d\varrho \sin\mathfrak{f} \sin\mathfrak{f} \sin\zeta \cos l}{\sin l^2}$, hincque

$$d\Phi \sin l^2 = -dt\,(y \cos m + z \cos n) + d\varrho \cos\varrho \sin\mathfrak{f} \sin\mathfrak{f} \sin\zeta \cos\zeta + a\varrho \sin\varrho \sin\mathfrak{f} \cos\mathfrak{f} \sin\zeta^2.$$

Similes autem expressiones pro $d\Phi \sin m^2$ et $d\Phi \sin n^2$ reperiuntur, quae in unam summam collectae, ob $\sin l^2 + \sin m^2 + \sin n^2 = 2$, dabunt

$$d\Phi = -dt\,(x \cos l + y \cos m + z \cos n)$$

per n° 1 et IX. §. 934. ubi $x \cos l + y \cos m + z \cos n$ denotat cosinum arcus ZO per $*$ multiplicatum.

COROLL. 2.

937. Ex aequationibus pro $dl \sin l$, $dm \sin m$, $dn \sin n$ inventis colligimus,

$$dl\,\mathfrak{fi}\,l\cos\zeta + dm\,\mathfrak{fi}\,m\cos\eta + dn\,\mathfrak{fi}\,n\cos\theta = d\varrho\,\mathfrak{fi}\,\varrho$$

ac valoribus per dx substituendis, impetrabimus,

$$d\varrho = -dt\,(x\,\mathfrak{fi}\,f\,\mathfrak{fi}\,\zeta + y\,\mathfrak{fi}\,g\,\mathfrak{fi}\,\eta + z\,\mathfrak{fi}\,h\,\mathfrak{fi}\,\theta)$$

ope reductionum supra traditarum.

COROLL. 3.

938. Ex tribus autem prioribus aequationibus deducimus, ob $xdl\,\mathfrak{fi}\,l + ydm\,\mathfrak{fi}\,m + zdn\,\mathfrak{fi}\,n = 0$, hanc aequationem

$$aaxdx + bbydy + cczdz = \frac{-2\Pi fg}{M}\,dt\,\mathfrak{fi}\,\varrho\,(x\,\mathfrak{fi}\,f\,\mathfrak{fi}\,\zeta + y\,\mathfrak{fi}\,g\,\mathfrak{fi}\,\eta + z\,\mathfrak{fi}\,h\,\mathfrak{fi}\,\theta)$$

$$= \frac{2\Pi fg}{M}\,d\varrho\,\mathfrak{fi}\,\varrho = -2fgd.\cos\varrho\,\left(1 + \frac{f\,dd.\cos\varrho}{2g\,dt^2}\right),$$ cuius ergo integrale est

$$aaxx + bbyy + cczz = C - 4fg\cos\varrho - \frac{ff\,d\varrho^2\,\mathfrak{fi}\,\varrho^2}{dt^2}.$$

SCHOLION.

939. Si in sphaera nostra dicatur circulus maximus horizontalis YMX, in eo perpetuo axis cylindri longitudinalis reperiatur necesse est. Pertingat ejus terminus anterior in M, et quia tam ML quam MZ sunt quadrantes, erunt anguli MZL et MLZ recti, ideoque angulus ZML $= \varrho$ et arcus XM = angulo XZM $= 90° + \Phi$. Tum vero quia punctum M aliter nisi in circulo XY moveri nequit, polus gyrationis O necessario in quadrante ZM situs sit necesse est. Hinc si arcus OM ponatur $= \omega$, ob celeritatem angularem $= u$ in sensum ABC tendentem, punctum M tempusculo dt regreditur versus X per arculum $= u\,dt\,\mathfrak{fi}\,\omega$: est vero $\mathfrak{fi}\,\omega = \cos OZ = \cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n$, ideoque $u\,\mathfrak{fi}\,\omega = x\cos l + y\cos m + z\cos n$, ita ut sit $-d\Phi = dt\,(x\cos l + y\cos m + z\cos n)$ uti in coroll. 1. invenimus. Deinde cum in triangulo OZL sit ZO $= 90° - \omega$, ZL $= \varrho$ et OZL $= 90°$, erit arcus cos OL $= \mathfrak{fi}\,\omega\cos\varrho$, $\mathfrak{fi}$ OLZ $= \frac{\cos\omega}{\mathfrak{fi}\,OL}$ et cos OLZ $= \frac{\mathfrak{fi}\,\omega\,\mathfrak{fi}\,\varrho}{\mathfrak{fi}\,OL}$ ob cot OLZ $= \frac{\mathfrak{fi}\,\varrho\,\mathfrak{fi}\,\omega}{\cos\omega}$. Quare si tempusculo dt punctum L circa O gyretur in l, erit $Ll = u\,dt\,\mathfrak{fi}$ OL, et angulus OLl rectus; hinc ducto circulo $l\lambda$ ad Zl perpendiculari fiet $L\lambda = Ll\cos ZLl = Ll\,\mathfrak{fi}$ OLZ $= u\,dt\,\cos\omega$, at est $L\lambda = -d\varrho$ ideoque $d\varrho = -u\,dt\cos\omega$. Quae formula comparata cum ea, quam §. 937. invenimus, dat

Fig. 122.

$u\cos$

$$\omega \cos\omega = x \sin\varphi \sin\zeta + y \sin\gamma \sin\eta + z \sin\beta \sin\theta$$

at est $xx + yy + zz = \omega\omega = (x\cos l + y\cos m + z\cos n)^2 + (x l \sin\varphi \sin\zeta + y\sin\gamma \sin\eta + z \sin\beta \sin\theta)^2$ quae aequalitas per aequationem $xdl \sin l + ydm \sin m + zdn \sin n = 0$ confirmatur. Verum ne multitudine litterarum obruamur, evolvamus casum, quo axis cylindri longitudinalis simul est axis principalis.

PROBLEMA. 114.

940. Si corporis cylindrici axis longitudinalis per ejus centrum inertiae ductus simul fuerit axis principalis, idque super plano horizontali utcunque moveatur, definire ejus motum. Fig. 123.

SOLUTIO.

Cum puncta A et M in unum incidant, bini reliqui poli principales B et C in circulo verticali ZL existent, eritque propterea: $LA = \zeta = 90°$; $LB = \eta$; $LC = \theta = 90° - \eta$: $ZLA = \varphi = 90°$, $ZLB = \gamma = 180°$; $ZLC = \beta = 0$; hincque $ZA = l = 90$; $ZB = m = \eta + \varrho$ et $ZC = n = \varrho - \theta = \eta + \varrho - 90°$. Quibus valoribus substitutis, habebimus istas aequationes:

$$\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fdd.\cos\varrho}{2gdt^2}$$

$$aadx + (cc - bb)\,yzdt = \frac{-2\Pi fg}{M}\,dt \sin\varrho$$

$$bbdy + (aa - cc)\,xzdt = \frac{-2\Pi gs}{M}\,dt \sin(\eta + \varrho)$$

$$ccdz + (bb - aa)\,xydt = \frac{2\Pi gs}{M}\,dt \cos(\eta + \varrho)$$

$$y \sin(\eta + \varrho) - z\cos(\eta + \varrho) = 0$$

$$-xdt \sin(\eta + \varrho) = d\varrho \sin(\eta + \varrho) \text{ seu } d\varrho = -xdt$$

$$\text{et } d\Phi = -dt\,(y\cos(\eta + \varrho) + z \sin(\eta + \varrho)).$$

Ponatur $y = u\cos(\eta + \varrho)$ et $z = u \sin(\eta + \varrho)$, ac pro dt scribatur $= \frac{d\varrho}{n}$, seu $x = \frac{-d\varrho}{dt}$, quo facto nostrae aequationes erunt

$$\text{I. } \frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fdd.\cos\varrho}{2gdt^2}$$

$$\text{II. } -aaddq + \tfrac{1}{2}(cc - bb)\,uudt^2 \sin 2(\eta + \varrho) + \frac{2\Pi}{M} fgdt^2 \sin\varrho = 0$$

Digitized by Google

III. $bbdu\ cof(\eta+\varphi)-(aa+bb-cc)\,ud\varphi\ fi(\eta+\varphi)=\frac{-2\Pi}{M}$
$g\,s\,dt\ fi(\eta+\varphi)$

IV. $ccdu\ fi(\eta+\varphi)+(aa-bb+cc)\,ud\varphi\ cof(\eta+\varphi)=\frac{2\Pi}{M}$
$g\,s\,dt\ cof(\eta+\varphi)$

et V. $d\Phi=-u\,dt$.

Ex tertia et quarta eliminando s nanciſcimur,

$bbdu\ cof(\eta+\varphi)^2+ccdu\ fi(\eta+\varphi)^2-2(bb-cc)\,ud\varphi\ fi(\eta+\varphi)$
$cof(\eta+\varphi)=0$

cujus integrale eſt

$$u=\frac{C}{bb+cc+(bb-cc)\,cof(2\eta+2\varphi)}$$

qui valor in II ſubſtitutus praebet

$$-2aadd\varphi+\frac{CC(cc-bb)\,dt^2\,fi\,2(\eta+\varphi)}{(bb+cc+(bb-cc)\,cof\,2(\eta+\varphi))^2}+dt^2\,fi\,\varphi\,(4fg+\frac{2ffdd.cof\varphi}{dt^2})=0$$

quae aequatio per $d\varphi$ multiplicata et integrata dat,

$$-aad\varphi^2-\frac{\frac{1}{2}CCdt^2}{bb+cc+(bb-cc)\,cof\,2(\eta+\varphi)}-4fgdt^2\,cof\,\varphi-ffd\varphi^2\,fi\,\varphi^2+Ddt^2=0$$

ſeu $d\varphi^2(aa+ffſi\varphi^2)=dt^2(D-4fg\,cof\varphi-\frac{\frac{1}{2}CC}{bb+cc+(bb-cc)\,cof\,2(\eta+\varphi)})$

unde ſit

$$dt=\frac{d\varphi\sqrt{(aa+ffſi\varphi^2)(bb+cc+(bb-cc)\,cof\,2(\eta+\varphi))}}{\sqrt{((D-4fg\,cof\varphi)(bb+cc+(bb-cc)\,cof\,2(\eta+\varphi))-\frac{1}{2}CC)}}.$$

Nunc dato tempore t per φ, pariter ac u, inde colligimus preſſionem π porroque intervallum s ex hac aequatione

$$\frac{2\Pi}{M}g\,s\,dt=(cc-bb)\,du\,fi(\eta+\varphi)\,cof(\eta+\varphi)+aaud\varphi+(cc-bb)\,ud\varphi\,cof\,2(\eta+\varphi).$$

Tum vero obtinemus $x=\frac{-d\varphi}{dt}$; $\eta=u\,cof(\eta+\varphi)$ et $z=u\,fi(\eta+\varphi)$ ac denique $\Phi=-\int u\,dt$.

CO-

Digitized by Google

COROLL. 1.

941. Si initio punctum L fuerit in D ut sit ZD $= \mathfrak{r}$, ibique quieverit, posito $t = 0$ erat $u = 0$, $\frac{d\varrho}{dt} = 0$, ob $g = 0$; ideoque constantes ita definiri oportet, ut sit C $= 0$; et D $= 4fg \cos \mathfrak{r}$: unde fit $dt = d\varrho \sqrt{\frac{aa + ff \sin \varrho^2}{4fg(\cos \mathfrak{r} - \cos \varrho)}}$, sicque $\varrho > \mathfrak{r}$. Porro est $u = 0$, hinc $\varphi = 0$, et $s = 0$; pressio autem II hinc facile innotescit, et cum ϱ ad 90° augeri possit, corpus quasi procumbet. Hic ergo motus neque a positione axium principalium IB et IC, neque a radio basium cylindri e pendet.

COROLL. 2.

942. Si initio recta IL fuerit verticalis seu $\varrho = 0$, et corpus circa eam gyrari coeperit celeritate angulari ε in sensum AB, ut fuerit O in L, ideoque $\alpha = 90°$, $\zeta = \eta$ et $\gamma = 90° - \eta$: initio erat $x = \frac{-d\varrho}{dt} = 0$, $y = \varepsilon \cos \eta$ et $z = \varepsilon \sin \eta$. Hinc fiunt constantes $C = \varepsilon (bb + cc + (bb - cc) \cos 2\eta)$ et $D = 4fg + \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon (bb + cc + (bb - cc) \cos 2\eta)$: unde colligitur $u = \frac{\varepsilon(bb + cc + (bb - cc)\cos 2\eta)}{bb + cc + (bb - cc)\cos 2\eta(\eta + \varrho)}$ atque $\frac{d\varrho^2(aa + ff \sin \varrho^2)}{dt^2} = 4fg(1 - \cos \varrho) + \frac{\frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon(bb - cc)(bb + cc + (bb - cc)\cos 2\eta)(\cos 2(\eta + \varrho) - \cos 2\eta)}{bb + cc + (bb - cc)\cos 2(\eta + \varrho)}$.

COROLL. 3.

943. Si esset $bb = cc$, fieret $dt = d\varrho \sqrt{\frac{aa + ff \sin \varrho^2}{4fg(1 - \cos \varrho)}}$, et recta IL perpetuo maneret verticalis: corpusque circa eam uniformiter gyrari pergeret: cum enim denominator contineat $\sqrt{(1 - \cos \varrho)} = \sin \frac{1}{2} \varrho \sqrt{2}$ nonnisi tempore elapso infinito arcus ϱ finitus evaderet: quod idem evenit, si fuerit vel $\eta = 0$, vel $\theta = 0$, hoc est si recta IL fuerit axis principalis.

SCHOLION.

944. Nisi axis longitudinalis simul sit axis principalis corporis, ob multitudinem literarum vix patet, quomodo formulae supra

Digitized by Google

rutae generaliter evolvi queant, quod tamen inferius ſuſcipiemus. Verum ſi hujusmodi corporum cylindricorum tantum motus quaſi infinite parvos conſideremus, ad quod neceſſe eſt, ut in recta centrali LF (ſig. 118.) centrum inertiae I infra centrum circuli G cadat, corpusque infinite parum de ſtatu quietis deturbetur, oſcillationes vel vacillationes minimae orientur, quarum indolem ex formulis noſtris generalibus determinare li-
Fig. 124. cebit. Hic non opus eſt, ut totum corpus ſit cylindricum, ſed ſufficit, ſi ejus termini circa M et N ſint cylindrici, quibus ſuper planis horizontalibus firmis P et Q ſuſtentetur, quin etiam ſufficit, ſi tantum circa contactum utriusque termini figura fuerit cylindrica, ſiquidem motus tantum admittimus infinite parvos. Deinde inter ſuſtentacula P et Q annexum eſſe poteſt corpus pendulum quodcunque FMH*n*, ut oriatur pendulum non circa axem fixum linearem, ſed circa terminos cylindricos planis horizontalibus incumbentes mobile, cujus motum oſcillatorium definiri oporteat. In tali ergo pendulo primo notetur ejus centrum inertiae I, per quod ducatur recta *mn* axi geometrico cylindri MN parallela, quae eſt axis longitudinalis jugiter manens horizontalis. Ducatur porro ex I ad MN recta perpendicularis IGL, quae ſi fuerit verticalis, corpus in quiete verſabitur: ac ſi intervallum GI ponamus $= f$, in ſuperioribus formulis litteram f negative ſumere debemus. Tum pro figura cylindrica terminorum ſit radius baſis $= e$, qui autem, ut vidimus, prorſus non in computum ingreditur, ita ut perinde ſit ſive termini ſint craſſiores ſive graciliores. Quodſi recta IG $= f$ minor fuerit, quam GF $= e$, totumque corpus ſupra ſuſtentacula P et Q verſetur, motus prodit ſimilis ei, quo cunae agitari ſolent. Quicquid autem ſit centrum inertiae I, perpetuo in eadem recta verticali manebit, unde tota inveſtigatio ad motum gyratorium definiendum perducitur, in quo centrum inertiae I ut quieſcens conſideramus.

PROBLEMA. 115.

945. Si corpus, quod baſibus cylindricis ſuper planis horizontalibus incumbit, infinite parum de ſitu quietis deturbetur, eique forte ſimul motus infinite parvus imprimatur, determinare motum vacillatorium, quo agitabitur.

SOLUTIO.

Fig. 121. In formulis noſtris generalibus primo intervallum GI $= f$ negativum ſtatuatur: deinde arcus ZL $= \varrho$, quo recta centralis LGI a ſitu verticali declinat, ut infinite parvus ſpectari debet, perinde atque celeritas

Digitized by Google

ritas angularis $\varkappa$: unde quantitates $x = \varkappa \cos \alpha$, $y = \varkappa \cos \mathfrak{G}$, $z = \varkappa \cos \gamma$, ut evanescentes tractari debent. Quomodocunque ergo axes principales IA, IB, IC respectu rectae centralis GI et axis longitudinalis mn fuerint dispositi, quorum situs cum arcubus $LA = \zeta$, $LB = \eta$, $LC = \theta$, tum angulis $ZLA = \mathfrak{f}$, $ZLB = \mathfrak{g}$, $ZLC = \mathfrak{h}$ definitur, primo habebimus $\sin \varrho = \varrho$, $\cos \varrho = 1$, deinde producta xy, xz et yz omitti poterunt; unde fiet $\cos l = \cos \zeta$, $\cos m = \cos \eta$ et $\cos n = \cos \theta$; et aequationes solutionem continentes ex probl. 113. ob $\frac{\Pi}{M} = 1 - \frac{fdd.\cos \varrho}{2gdt^2} = 1$ erunt:

I. $aadx = 2fg\varrho dt \sin \mathfrak{f} \sin \zeta + 2gs\, dt \cos \mathfrak{f} \sin \zeta$

II. $bbdy = 2fg\varrho dt \sin \mathfrak{g} \sin \eta + 2gs\, dt \cos \mathfrak{g} \sin \eta$

III. $ccdz = 2fg\varrho dt \sin \mathfrak{h} \sin \theta + 2gs\, dt \cos \mathfrak{h} \sin \theta$

unde ex §. 938. haec integralis est derivata

$$aaxx + bbyy + cczz = C - 2fg\varrho\varrho - \frac{ff\varrho\varrho d\varrho^2}{dt^2}$$

ob $\cos \varrho = 1 - \frac{1}{2}\varrho\varrho$, quia hic infinite parvum $\varrho\varrho$ negligere non licet. Deinde habemus:

IV. $y \cos \theta - z \cos \eta = -\frac{d\varrho}{dt} \cos \mathfrak{f} \sin \zeta$

V. $z \cos \zeta - x \cos \theta = -\frac{d\varrho}{dt} \cos \mathfrak{g} \sin \eta$

VI. $x \cos \eta - y \cos \zeta = -\frac{d\varrho}{dt} \cos \mathfrak{h} \sin \theta$

atque ex §. §. 936. et 937.

$$d\varrho = -dt\,(x \sin \mathfrak{f} \sin \zeta + y \sin \mathfrak{g} \sin \eta + z \sin \mathfrak{h} \sin \theta)$$

$$d\varphi = -dt\,(x \cos \zeta + y \cos \eta + z \cos \theta).$$

Cum nunc sit IV. x + V. y + VI. $z = 0$, erit

$$x \cos \mathfrak{f} \sin \zeta + y \cos \mathfrak{g} \sin \eta + z \cos \mathfrak{h} \sin \theta = 0.$$

Deinde ex n°. I. II. III. in subsidium vocando formulas n°. I. et II. ex §. 934. colligimus

$$aax \cos \zeta + bb\, y \cos \eta + cc\, z \cos \theta = \Lambda.$$

et pro intervallo s determinando

$$aadx \cos \mathfrak{f} \sin \zeta + bbdy \cos \mathfrak{g} \sin \eta + ccdz \cos \mathfrak{h} \sin \theta = 2gs\, dt.$$

Statuamus $d\varrho = -udt$ et $d\varphi = -vdt$, atque ob $x \cos \mathfrak{f} \sin \zeta + y \cos \mathfrak{g} \sin \eta + z \cos \mathfrak{h} \sin \theta = 0$ consequimur

$\varkappa =$

Digitized by Google

$x = u \sin f \sin \zeta + v \cos \zeta$; $y = u \sin g \sin \eta + v \cos \eta$; $z = u \sin h \sin \theta + v \cos \theta$ hincque

$$A = u\,(aa \sin f \sin \zeta \cos \zeta + bb \sin g \sin \eta \cos \eta + cc \sin h \sin \theta \cos \theta) + v\,(aa \cos \zeta^2 + bb \cos \eta^2 + cc \cos \theta^2).$$

Ponamus ad abbreviandum

$$\left.\begin{array}{l} bb \cos h \cos \eta \sin \theta - cc \cos g \sin \eta \cos \theta = \mathfrak{A} \\ cc \cos f \cos \theta \sin \zeta - aa \cos h \sin \theta \cos \zeta = \mathfrak{B} \\ aa \cos g \cos \zeta \sin \eta - bb \cos f \sin \zeta \cos \eta = \mathfrak{C} \end{array}\right\} \text{eritque } \mathfrak{A} \cos f \sin \zeta + \mathfrak{B} \cos g \sin \eta + \mathfrak{C} \cos h \sin \theta = 0$$

$$aa \cos \zeta^2 + bb \cos \eta^2 + cc \cos \theta^2 = \mathfrak{D} : aa \sin f \sin \zeta \cos \zeta + bb \sin g \sin \eta \cos \eta + cc \sin h \sin \theta \cos \theta = \mathfrak{F}$$

et habebimus

$$v = \frac{A - \mathfrak{F} u}{\mathfrak{D}}$$

$$x = \frac{A \cos \zeta + \mathfrak{A} u}{\mathfrak{D}}; \quad y = \frac{A \cos \eta + \mathfrak{B} u}{\mathfrak{D}}; \quad z = \frac{A \cos \theta + \mathfrak{C} u}{\mathfrak{D}}$$

qui valores, in aequatione integrali vim vivam complectente substituti, ob $\frac{d\varrho}{dt} = -u$ dabunt:

$$\frac{AA\mathfrak{D} + 2Au(\mathfrak{A}a^2 \cos \zeta + \mathfrak{B}b^2 \cos \eta + \mathfrak{C}c^2 \cos \theta) + uu(\mathfrak{A}^2 a^2 + \mathfrak{B}^2 b^2 + \mathfrak{C}^2 c^2)}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}} = C - 2fg\varrho\varrho - ff\varrho\varrho uu$$

quae aequatio ob $\mathfrak{A}aa \cos \zeta + \mathfrak{B}bb \cos \eta + \mathfrak{C} cc \cos \theta = 0$ abit in hanc

$$AA\mathfrak{D} + (\mathfrak{A}^2 a^2 + \mathfrak{B}^2 b^2 + \mathfrak{C}^2 c^2)\, uu = C\mathfrak{D}\mathfrak{D} - 2\mathfrak{D}\mathfrak{D} fg\varrho\varrho - \mathfrak{D}\mathfrak{D} ff \varrho\varrho uu$$

ubi si loco $C\mathfrak{D}\mathfrak{D} - AA\mathfrak{D}$ ponatur $B\mathfrak{D}\mathfrak{D}$, fiet

$$u = \frac{\mathfrak{D} r (B - 2fg\varrho\varrho)}{r(\mathfrak{A}^2 a^2 + \mathfrak{B}^2 b^2 + \mathfrak{C}^2 c^2 + \mathfrak{D}\mathfrak{D} ff \varrho\varrho)}.$$

Statuamus porro $\mathfrak{A}^2 a^2 + \mathfrak{B}^2 b^2 + \mathfrak{C}^2 c^2 = \mathfrak{D}\mathfrak{D}\mathfrak{H}\mathfrak{H}$, et rejecto termino infinite parvo $\mathfrak{D}\mathfrak{D} ff\, \varrho\varrho$ habebimus

$$u = \frac{r(B - 2fg\varrho\varrho)}{\mathfrak{H}} \text{ et } dt = \frac{-\mathfrak{H} d\varrho}{r(B - 2fg\varrho\varrho)},$$

unde colligimus $t = \text{Const.} + \frac{\mathfrak{H}}{r 2fg} \text{Arc. } \cos \frac{\varrho r 2fg}{rB}$, seu

$$\varrho = \frac{rB}{r 2fg} \cos \frac{(t+\delta) r 2fg}{\mathfrak{H}}, \text{ et } u = \frac{rB}{\mathfrak{H}} \sin \frac{(t+\delta) r 2fg}{\mathfrak{H}}$$

cum

tum vero $v = \frac{A}{\mathfrak{D}} - \frac{\mathfrak{F} r^B}{\mathfrak{D}\mathfrak{H}} \int \frac{(t+\delta) r^{2fg}}{\mathfrak{H}}$; hincque

$$\varphi = D - \frac{At}{\mathfrak{D}} - \frac{\mathfrak{F} r^B}{\mathfrak{D} r^{2fg}} \cos \frac{(t+\delta) r^{2fg}}{\mathfrak{H}} = D - \frac{At}{\mathfrak{D}} - \frac{\mathfrak{F}\varrho}{\mathfrak{D}}.$$

Deinde reperiemus:

$$s = \frac{-r^{Bf}}{\mathfrak{D}\mathfrak{H}\mathfrak{H} r^{2g}} (aa\,bb \int \mathfrak{h} \cos \mathfrak{h} \int \theta^2 + aa\,cc \int \mathfrak{g} \cos \mathfrak{g} \int \eta^2 + bb\,cc \int \mathfrak{f} \cos \mathfrak{f} \int \zeta^2) \cos \frac{(t+\delta) r^{2fg}}{\mathfrak{H}}.$$

Denique vero erit

$$uu = xx + yy + zz = \frac{AA - 2A\mathfrak{F}u + (\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{B} + \mathfrak{C}\mathfrak{C}) uu}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}}$$

ſicque omnia ad datum tempus ſunt definita. Ceterum hic notaſſe juvat, eſſe $\mathfrak{A}\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\mathfrak{B} + \mathfrak{C}\mathfrak{C} = \mathfrak{D}\mathfrak{D} + \mathfrak{F}\mathfrak{F}$, ita ut ſit $uu = vv + uu$.

COROLL. 1.

946. Cum ſit $\varrho = \frac{r^B}{r^{2fg}} \cos \frac{(t+\delta) r^{2fg}}{\mathfrak{H}}$; patet arcum $ZL = \varrho$ ſeu declinationem rectae LI a ſitu verticali ad ſimilitudinem penduli variari, hujusque lineae LI vacillationes iſochronas fore oſcillationibus penduli, cujus longitudo eſt $= \frac{\mathfrak{H}\mathfrak{H}}{f}$, quae longitudo eſt $= \frac{\mathfrak{A}^2 a^2 + \mathfrak{B}^2 b^2 + \mathfrak{C}^2 c^2}{\mathfrak{D}\mathfrak{D} f}$.

COROLL. 2.

947. Deinde cum ſit $\varphi = D - \frac{At}{\mathfrak{D}} - \frac{\mathfrak{F}\varrho}{\mathfrak{D}}$, punctum L motu medio revolvitur circa verticem Z celeritate angulari $= \frac{A}{\mathfrak{D}}$; verum locus medius corrigi debet particula $\frac{\mathfrak{F}\varrho}{\mathfrak{D}}$. Sin autem ſit conſtans $A = 0$, angulus DZL parumper mutatur, niſi ſit $\mathfrak{F} = 0$.

COROLL. 3.

948. Si ergo revolutiones corporis circa axem verticalem IZ excludantur, ut ſit $A = 0$, atque initio fuerit $\varphi = 0$; $\varrho = t$

et celeritas angularis $\mathfrak{u} = \mathfrak{e}$, constantes ita definientur, ut sit

$$D = \frac{\mathfrak{F}\mathfrak{r}}{\mathfrak{D}};\ \mathfrak{r} = \frac{\sqrt{B}}{\sqrt{2fg}} \cos\frac{\delta\sqrt{2fg}}{\mathfrak{H}} \text{ et } \mathfrak{e}\mathfrak{e} = \frac{(\mathfrak{D}\mathfrak{D}+\mathfrak{F}\mathfrak{F})B}{\mathfrak{D}\mathfrak{D}\mathfrak{H}\mathfrak{H}}\left(\sin\frac{\delta\sqrt{2fg}}{\mathfrak{H}}\right)^2$$

$$\text{Ergo } \sqrt{B} = \frac{\mathfrak{r}\sqrt{2fg}}{\cos\frac{\delta\sqrt{2fg}}{\mathfrak{H}}} = \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{D}\mathfrak{H}}{\sin\frac{\delta\sqrt{2fg}}{\mathfrak{H}}\sqrt{(\mathfrak{D}\mathfrak{D}+\mathfrak{F}\mathfrak{F})}}, \text{ ideoque}$$

$$\tang\frac{\delta\sqrt{2fg}}{\mathfrak{H}} = \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{D}\mathfrak{H}}{\mathfrak{r}\sqrt{2fg}(\mathfrak{D}\mathfrak{D}+\mathfrak{F}\mathfrak{F})}, \text{ unde et constans B innotescit.}$$

Sin autem fuerit $\mathfrak{e} = 0$; prodit $\sqrt{B} = \mathfrak{r}\sqrt{2fg}$, et $\delta = 0$.

EXEMPLUM.

Fig. 123. 949. Ponamus rectam IM, quae per centrum inertiae I axi geometrico cylindri (MN fig. 124.) parallela ducitur, simul esse corporis axem principalem, et habebimus uti §. 940. $\mathfrak{f} = 90°$, $\mathfrak{g} = 180°$, $\mathfrak{h} = 0$ et $\zeta = 90°$, atque $\theta = 90° - \eta$. Hinc autem colligimus:

$$\mathfrak{A} = bb\cos\eta^2 + cc\sin\eta^2;\ \mathfrak{B} = 0;\ \mathfrak{C} = 0;\ \mathfrak{D} = \mathfrak{A} \text{ et } \mathfrak{F} = 0$$

ergo $aa = \mathfrak{H}\mathfrak{H}$: unde longitudo penduli simplicis isochroni fit $= \frac{aa}{f}$. Tum vero axis IA horizontalis manebit immotus. Ac si initio, ubi $\varrho = \mathfrak{r}$, corpus motum a quiete inceperit, erit $\delta = 0$, et $\sqrt{B} = \mathfrak{r}\sqrt{2fg}$: ex quibus reliquae quantitates variabiles colliguntur,

$$\varrho = \mathfrak{r}\cos\frac{t\sqrt{2fg}}{a};\ u = \frac{\mathfrak{r}\sqrt{2fg}}{a}\sin\frac{t\sqrt{2fg}}{a};\ v = 0;\ \text{ob } A = 0$$

$$\text{et } x = u = \frac{\mathfrak{r}\sqrt{2fg}}{a}\sin\frac{t\sqrt{2fg}}{a};\ y = 0 \text{ et } z = 0, \text{ atque } \mathfrak{u} = x.$$

Fig. 124. Revera autem adjuncto motu progressivo centrum inertiae I in recta verticali alternatim ascendet ac descendet, cylindro superiore MN hunc motum sequente, dum super planis P et Q liberrime incedere potest, neque a frictione impediri assumitur.

SCHOLION.

950. Quia magnitudo cylindri MN in computum non ingreditur, eadem solutio valebit, si ejus crassities evanescat, corpusque annexum ab axe lineari esset suspensum. Ex quo hic motus convenire debere videtur cum motu oscillatorio supra definito, quod tamen longe aliter usu venit; quoniam pro motu oscillatorio vero longitudo penduli simplicis isochroni prodiit $= f + \frac{aa}{f} = \frac{aa+ff}{f}$, cum hic tantum sit $= \frac{aa}{f}$.

Causa

Digitized by Google

Causa hujus discriminis in eo est sita, quod supra in doctrina oscillationum axem MN fixum assumsimus, dum hic liberrime mobilis statuitur. Hinc patet, ob libertatem axis, etsi plano horizontali incumbat, oscillationes multo promtiores fieri, quam si axis in eodem loco firmiter detineretur. Atque hoc etiam Theoriae omnino est conforme, si enim (fig. 118.) circulus ΠMTN planum semper in eodem puncto T tangere debeat, praeter pressionem Π vis quaedam horizontalis in calculum introduci debet, quae si ponatur $= \Theta$ secundum TH urgens, ut punctum T maneat constans, ob $TP = f\sin\varphi$ esse oportet $\frac{f\,dd\,\sin\varphi^2}{dt^2} = \frac{-2\Theta g}{M}$. Ex hac autem vi quoque nascitur momentum respectu axium principalium, qua propterea motus gyratorius afficitur, ut talis prodeat, qualem supra in motus oscillatorii investigatione determinavimus. Ceterum hic probe notasse juvabit, si axiculi penduli planis horizontalibus politissimis incumbant, motum oscillatorium plurimum discrepare posse ab eo, qui oriretur, si firmiter detinerentur, et multo quidem promtiorem esse futurum. Minima autem frictio hoc discrimen tollere, motumque ad oscillationum legem reducere valebit. Hujus autem problematis solutio nos ad solutionem problematis generalis n°. 113. manuducet.

PROBLEMA. 116.

951. Si corpus cylindricum quodcunque super plano horizontali moveatur utcunque, aequationes supra inventas, quibus ejus motus definitur, resolvere atque ad integrationem perducere.

SOLUTIO.

Maneant hic omnia, uti supra in problemate 113. sunt constituta, atque in recta centrali LIGF sumamus ut ibi centrum inertiae I a puncto F magis remotum, quam centrum sectionis cylindri G, ponendo intervallum $GI = f$. Ex aequationibus igitur differentialibus ibi exhibitis jam unam aequationem integralem eruimus, quae est: Fig. 131.

$$aaxx + bbyy + cczz = C - afg\cos\varphi - \frac{ff\,d\varphi^2\sin\varphi^2}{dta}.$$

Praeterea vero ternae priores aequationes ope ternarum posteriorum in postremis terminis applicatarum abeunt in has formas

Digitized by Google

I. $aadx + (cc-bb)yzdt = \frac{-2\Pi fg}{M}.dt\,fi\,\zeta\,fi\,\varrho - \frac{2\Pi gs}{M}.\frac{dt\,dl\,fil}{d\varrho}$

II. $bbdy + (aa-cc)xzdt = \frac{-2\Pi fg}{M}.dt\,fi\,g\,fi\,\eta\,fi\,\varrho - \frac{2\Pi gs}{M}.\frac{dt\,dm\,fim}{d\varrho}$

III. $ccdz + (bb-aa)xydt = \frac{-2\Pi fg}{M}.dt\,fi\,\mathfrak{h}\,fi\,\theta\,fi\,\varrho - \frac{2\Pi gs}{M}.\frac{dt\,dn\,fin}{d\varrho}$.

Hinc jam colligatur forma I. $cos\,l$ + II. $cos\,m$ + III. $cos\,n$, et quia $dl\,fi\,l\,cos\,l + dm\,fi\,m\,cos\,m + dn\,fi\,n\,cos\,n = 0$, terminini ultimi intervallum s involventes se destruent: tum vero etiam per relationes §. 934. traditas reperitur

$$fi\,\zeta\,fi\,\zeta\,cos\,l + fi\,g\,fi\,\eta\,cos\,m + fi\,\mathfrak{h}\,fi\,\theta\,cos\,n = 0$$

ita ut quoque penultimi tollantur. Quocirca perveniemus ad hanc aequationem.

$aadx\,cos\,l + bbdy\,cos\,m + ccdz\,cos\,n + aaxzdt\,cos\,m + bbxy\,dt\,cos\,n + ccyzdt\,cos\,l = 0$
$\quad - aaxydt\,cos\,n - bbyzdt\,cos\,l - ccxzdt\,cos\,m$

at ex ternis posterioribus est

$x\,cos\,m - y\,cos\,n = \frac{-dl\,fil}{dt}$; $x\,cos\,n - z\,cos\,l = \frac{-dm\,fim}{dt}$; $y\,cos\,l - x\,cos\,m = \frac{-dn\,fin}{dt}$

quibus valoribus substitutis obtinemus

$aadx\,cos\,l + bbdy\,cos\,m + ccdz\,cos\,n - aax\,dl\,fil - bby\,dm\,fim - ccz\,dn\,fin = 0$

cujus integralis est

$$aax\,cos\,l + bby\,cos\,m + ccz\,cos\,n = D.$$

Deinde loco x, y et z introducamus novas variabiles hinc definiendas

$$x\,cos\,\zeta + y\,cos\,\eta + z\,cos\,\theta = p$$
$$x\,cos\,\mathfrak{f}\,fi\,\zeta + y\,cos\,g\,fi\,\eta + z\,cos\,\mathfrak{h}\,fi\,\theta = q$$
$$x\,fi\,\mathfrak{f}\,fi\,\zeta + y\,fi\,g\,fi\,\eta + z\,fi\,\mathfrak{h}\,fi\,\theta = r$$

eritque primo $d\varrho = -rdt$; porro ob $x\,cos\,l + y\,cos\,m + z\,cos\,n = p\,cos\,\varrho + q\,fi\,\varrho$; erit $d\Phi = -dt\,(p\,cos\,\varrho + q\,fi\,\varrho)$. Praeterea ob $x\,dl\,fil + ydm\,fi\,m + zdn\,fi\,n = 0$, fit, $p\,fi\,\varrho - q\,cos\,\varrho = 0$. Quam ob rem ponamus

$$p = u\,cos\,\varrho \text{ et } q = u\,fin\,\varrho \text{ eritque } d\Phi = -udt \text{ et } d\varrho = -rdt,$$

at ex illis aequationibus assumtis elicimus

$x = r\,fi\,\mathfrak{f}\,fi\,\zeta + u\,cos\,l$; $y = r\,fi\,g\,fi\,\eta + u\,cos\,m$; $z = r\,fi\,\mathfrak{h}\,fi\,\theta + u\,cos\,n$

hincque $xx + yy + zz = rr + uu = ss$.

Nunc aequatio integralis modo ante inventa praebet

$$D = r$$

Digitized by Google

$$D = r\,(aa\,\mathit{sf}\,\mathit{sf}\,\zeta\,\mathit{cof}\,l + bb\,\mathit{sf}\,\mathfrak{g}\,\mathit{sf}\,\eta\,\mathit{cof}\,m + cc\,\mathit{sf}\,\mathfrak{h}\,\mathit{sf}\,\theta\,\mathit{cof}\,n) + u\,(aa\,\mathit{cof}\,l^2 + bb\,\mathit{cof}\,m^2 + cc\,\mathit{cof}\,n^2)$$

qua u determinatur per r et ϱ; ideoque et x, y, z. Denique aequatio integralis primum inventa

$$aaxx + bbyy + cczz = C - 4fg\,\mathit{cof}\,\varrho - \mathit{ff}\,rr\,\mathit{sf}\,\varrho^2$$

quia tantum r et ϱ continet, determinabit ϱ per ϱ, indeque aequatio $dt = \frac{-d\varrho}{r}$ pro dato tempore t omnes quantitates motum continentes manifestabit.

Quodsi ad abbreviandum ponantur constantes:

$$\begin{aligned}
&aa\,\mathit{cof}\,\zeta^2 + bb\,\mathit{cof}\,\eta^2 + cc\,\mathit{cof}\,\theta^2 = \mathfrak{A}\\
&aa\,\mathit{cof}\,\mathfrak{f}\,\mathit{sf}\,\zeta\,\mathit{cof}\,\zeta + bb\,\mathit{cof}\,\mathfrak{g}\,\mathit{sf}\,\eta\,\mathit{cof}\,\eta + cc\,\mathit{cof}\,\mathfrak{h}\,\mathit{sf}\,\theta\,\mathit{cof}\,\theta = \mathfrak{B}\\
&aa\,\mathit{cof}\,\mathfrak{f}^2\,\mathit{sf}\,\zeta^2 + bb\,\mathit{cof}\,\mathfrak{g}^2\,\mathit{sf}\,\eta^2 + cc\,\mathit{cof}\,\mathfrak{h}^2\,\mathit{sf}\,\theta^2 = \mathfrak{C}\\
&aa\,\mathit{sf}\,\mathfrak{f}\,\mathit{sf}\,\zeta\,\mathit{cof}\,\zeta + bb\,\mathit{sf}\,\mathfrak{g}\,\mathit{sf}\,\eta\,\mathit{cof}\,\eta + cc\,\mathit{sf}\,\mathfrak{h}\,\mathit{sf}\,\theta\,\mathit{cof}\,\theta = \mathfrak{D}\\
&aa\,\mathit{sf}\,\mathfrak{f}\,\mathit{cof}\,\mathfrak{f}\,\mathit{sf}\,\zeta^2 + bb\,\mathit{sf}\,\mathfrak{g}\,\mathit{cof}\,\mathfrak{g}\,\mathit{sf}\,\eta^2 + cc\,\mathit{sf}\,\mathfrak{h}\,\mathit{cof}\,\mathfrak{h}\,\mathit{sf}\,\theta^2 = \mathfrak{E}\\
&aa\,\mathit{sf}\,\mathfrak{f}^2\,\mathit{sf}\,\zeta^2 + bb\,\mathit{sf}\,\mathfrak{g}^2\,\mathit{sf}\,\eta^2 + cc\,\mathit{sf}\,\mathfrak{h}^2\,\mathit{sf}\,\theta^2 = \mathfrak{F}
\end{aligned}$$

nostrae aequationes integrales erunt

$$\begin{aligned}
&D = r\,(\mathfrak{D}\,\mathit{cof}\,\varrho + \mathfrak{E}\,\mathit{sf}\,\varrho) + u\,(\mathfrak{A}\,\mathit{cof}\,\varrho^2 + 2\mathfrak{B}\,\mathit{sf}\,\varrho\,\mathit{cof}\,\varrho + \mathfrak{C}\,\mathit{sf}\,\varrho^2)\\
&C - 4fg\,\mathit{cof}\,\varrho - \mathit{ff}\,rr\,\mathit{sf}\,\varrho^2 = \mathfrak{F}\,rr + 2ru\,(\mathfrak{D}\,\mathit{cof}\,\varrho + \mathfrak{E}\,\mathit{sf}\,\varrho) + uu\,(\mathfrak{A}\,\mathit{cof}\,\varrho^2 + 2\mathfrak{B}\,\mathit{sf}\,\varrho\,\mathit{cof}\,\varrho + \mathfrak{C}\,\mathit{sf}\,\varrho^2)
\end{aligned}$$

ex quibus concluditur

$$rr = \frac{DD - (\mathfrak{A}\,\mathit{cof}\,\varrho^2 + 2\mathfrak{B}\,\mathit{sf}\,\varrho\,\mathit{cof}\,\varrho + \mathfrak{C}\,\mathit{sf}\,\varrho^2)(C - 4fg\,\mathit{cof}\,\varrho)}{(\mathfrak{D}\,\mathit{cof}\,\varrho + \mathfrak{E}\,\mathit{sf}\,\varrho)^2 - (\mathfrak{A}\,\mathit{cof}\,\varrho^2 + 2\mathfrak{B}\,\mathit{sf}\,\varrho\,\mathit{cof}\,\varrho + \mathfrak{C}\,\mathit{sf}\,\varrho^2)(\mathfrak{F} + \mathit{ff}\,\mathit{sf}\,\varrho^2)}$$

Hinc pro tempore adipiscimur $t = \int \frac{-d\varrho}{r}$, et cum sit $u = \frac{D - r\,(\mathfrak{D}\,\mathit{cof}\,\varrho + \mathfrak{E}\,\mathit{sf}\,\varrho)}{\mathfrak{A}\,\mathit{cof}\,\varrho^2 + 2\mathfrak{B}\,\mathit{sf}\,\varrho\,\mathit{cof}\,\varrho + \mathfrak{C}\,\mathit{sf}\,\varrho^2}$, erit angulus $\varphi = -\int u dt = \int \frac{u\,d\varrho}{r}$.

Cum autem ad quodvis tempus t tam arcum ϱ quam angulum φ determinaverimus, totus motus erit perfecte cognitus.

COROLL. 1.

952. Quantitates ergo $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, et $\mathfrak{F}$ necessario sunt positivae, et $\mathfrak{B}$ ad $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ ad $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{C}$ ita refertur, ut sit

$$\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}\mathfrak{B} = aabb\,\mathit{sf}\,\mathfrak{h}^2\,\mathit{sf}\,\theta^2 + aacc\,\mathit{sf}\,\mathfrak{g}^2\,\mathit{sf}\,\eta^2 + bbcc\,\mathit{sf}\,\mathfrak{f}^2\,\mathit{sf}\,\zeta^2$$

unde patet, formam $\mathfrak{A}\,\mathit{cof}\,\varrho^2 + 2\mathfrak{B}\,\mathit{sf}\,\varrho\,\mathit{cof}\,\varrho + \mathfrak{C}\,\mathit{sf}\,\varrho^2$ in duos factores simplices resolvi non posse,

Digitized by Google

COROLL. 2.

953. Ex hac solutione generali casus in praecedente problemate evolutus facile deducitur, sumendo f negative, et arcum ϱ infinite parvum, unde fit

$$rr = \frac{DD - \mathfrak{A}C - 4\mathfrak{A}fg\cos\varrho}{DD - \mathfrak{A}\mathfrak{F}} = \frac{Const. + 4\mathfrak{A}fg\cos\varrho}{\mathfrak{A}f - DD}.$$

Reperitur autem valoribus evolutis

$$\mathfrak{A}\mathfrak{F} - DD = aabb\cos\mathfrak{h}^2 \sin\theta^2 + aacc\cos\mathfrak{g}^2 \sin\eta^2 + bbcc\cos\mathfrak{f}^2 \sin\zeta^2$$

unde longitudo penduli simplicis isochroni simplicius quam supra ita exhibetur, ut sit $= \frac{aabb\cos\mathfrak{h}^2 \sin\theta^2 + aacc\cos\mathfrak{g}^2 \sin\eta^2 + bbcc\cos\mathfrak{f}^2 \sin\zeta^2}{f(aa\cos\zeta^2 + bb\cos\eta^2 + cc\cos\theta^2)}$.

SCHOLION.

954. His de motu corporum cylindricorum super plano horizontali expeditis, instituera pauca de motu super plano inclinato adjungere: verum si motus fuerit simplex, res nullam habet difficultatem, sin autem sit complicatus, in calculos incommodos incideremus. Quare cum in praxi frictionem ab his motibus separare haud liceat, motus saltem simpliciores super plano inclinato ita pertractabimus, ut simul frictionis rationem habeamus, ex quo peculiarem tractatum de motu corporum rigidorum a frictione perturbato adjungi conveniet.

SUP-

Digitized by Google

SUPPLEMENTUM
DE
MOTU CORPORUM
RIGIDORUM A FRICTIONE
PERTURBATO.

Digitized by Google

Digitized by Google

CAPUT I.

DE FRICTIONE IN GENERE.

DEFINITIO.

955. *Frictio* est resistentia, quam corpus super superficie aspera incedens eamque radens, in motu suo patitur.

Est ergo frictio vis motus directioni contraria, et basi corporis, qua superficiem tangit, applicata

COROLL. 1.

956. Quamdiu corpus quiescit, frictio nullam plane vim exerit, statim autem atque corpus movetur, subito ejus vis existit motui semper contraria eumque propterea retardans.

COROLL. 2.

957. Si corpus a vi quapiam sollicitetur, etiamsi quiescat, frictio se illi vi opponit, quoniam in prima motus generatione statim existit, ac nisi vis sollicitans frictionem superet, corpus movere non valebit.

COROLL. 3.

958. Quia directio frictionis motus directioni jugiter est contraria, mutata motus directione simul frictionis directio mutatur. Statim autem atque corpus ad quietem redigitur, uti motus directio tollitur, ita subito frictio evanescit.

EXPLICATIO.

959. Ad haec, quae ad frictionem pertinent, dilucidanda, ad omnes circumstantias, quae ad frictionem quicquam conferre posse videantur, attendi conveniet, etsi adhuc minime pateat, quid quisque efficere valeat. Primo igitur superficies, super qua fit incessus, considerari debet, quae sive sit plana sive secus parum refert, quoniam

Digitized by Google

Fig. 125. quovis tempore ad contactum eſt reſpiciendum. Sit igitur EF ſuperficies, quam tanquam planam contemplemur, ſiquidem hinc facile ad ſuperficies convexas et concavas judicium extendere licebit: hujus ergo aſperitas praecipuum locum inter cauſas frictionis tenet, quoniam ſi ſuperficies perfecte eſſet polita et laevigata, frictioni nullus locus relinqueretur: ex quo colligitur, quo magis ſuperficies fuerit aſpera, eo majorem frictionem fieri oportere. Deinde baſis corporis AB, qua fit contactus, in computum eſt ducenda, cujus magnitudo et figura an quicquam ad frictionem conferat, nondum liquet, aſperitas vero certe cum aſperitate ſuperficiei conjuncta, ubi imprimis motui eſt obſtaculo, ita frictionem generare eſt putanda. Circa ipſum denique corpus ABCD praeter ejus maſſam reliquasque proprietates, ejus preſſio ad ſuperficiem ſine dubio maximi eſt momenti, quoniam ſi nulla vi ad eam apprimeretur, nulla certe frictio adeſſet, corpusque perinde moveretur, ac ſi ſuperficies abeſſet. Cum tandem frictio non niſi in motu cernatur, celeritas quoque tanquam inſigne frictionis momentum videri poſſet, ſed praeter expectationem videbimus, celeritatem nullo modo ad frictionem determinandam concurrere, quod eo magis eſt mirandum, cum ſublata celeritate omnis frictio certe ceſſet. Quod ſi ergo corpus ſecundum directionem BF ſuper ſuperficie promoveatur, vis aderit, qua id ſecundum directionem oppoſitam AE ſollicitatur, haecque vis frictio vocatur.

SCHOLION.

960. Frictionem hic primo tanquam phaenomenon conſiderabo, cujus quantitas et indoles nobis experientia innotuerit, deinceps in ejus cauſas, quantum fieri licet, inquiſiturus. Cum enim hic phyſicae corporum qualitates, cujusmodi ſint aſperitates ſuperficierum, et ratio, qua duae ſuperficies invicem appreſſae ſibi mutuo cedant, et minimis particulis quasdam impreſſiones inducant, totum quaſi negotium conficiant; ob defectum talis cognitionis corporum contenti eſſe debemus phaenomena frictionis ita accipere, prouti ea nobis ab experientia ſuppeditantur, quemadmodum etiam aliarum virium, quarum effectus in Mechanica evolvimus, origo minime eſt perſpecta. Quae ergo per experientiam nobis circa frictionis indolem innotuerunt, breviter recenſeamus.

PHAENOMENON. 1.

961. *Si cetera ſint paria, frictio non pendet a corporis celeritate, ſed ſive id celerius incedat ſive tardius, eandem exerit vim, cujus directio ſemper eſt contraria motus directioni.*

CO-

Digitized by Google

COROLL. 1.

962. Frictio ergo non tanquam functio quaedam celeritatis ſpectari poteſt, cum perpetuo eandem quantitatem ſervet, ſive motus ſit celerrimus, ſive tardiſſimus. Interim tamen, motu penitus ceſſante, ſubito evaneſcit.

COROLL. 2.

963. Etſi autem frictio a motus celeritate neutiquam pendet, tamen ejus directio per motus directionem unice determinatur, quippe cui eſt contraria et in ipſo contactu applicata.

SCHOLION.

964. De motu corporis abſoluto haec ſunt intelligenda, ſi ſuperficies, in qua corpus incedit, abſolute quieſcat, ſin autem haec ſuperficies ipſa moveatur, ex motu corporis reſpectivo ad ſuperficiem relato judicium eſt petendum. Scilicet ſi corpus reſpectu ſuperficiei quieſcat, etiamſi utcumque moveatur abſolute, frictio eſt nulla, ſin autem reſpectu ſuperficiei moveatur, frictio eam impetrat quantitatem, quam reliquae circumſtantiae exigunt, neque quantitas motus huc quicquam confert. Directio autem frictionis per directionem reſpectivam corporis reſpectu ſuperficiei conſtanter determinatur: neque igitur hic motum ſecundum duas tresve directiones reſolvere licet, et pro quolibet, quaſi ſolus adeſſet, frictionem definire, indeque frictionem totam colligere: ſed uti quantitas frictionis non a motus quantitate pendet, ità directio ſemper ex directione, ſecundum quam corpus ſuper ſuperficie incedit, definiri debet. Ceterum hoc phaenomenon non ita accurate per experimenta indicatur, ut nullis plane dubiis ſit ſubjectum: quin potius motus celerrimi ab hac regula aliquantillum recedere videntur. Quodſi forte veritati fuerit conſentaneum, id potius alii cauſae tribuamus, quam ſtabilitam frictionis notionem immutemus: et cum aberratio ſit valde parva, eam eo magis negligamus, cum alias nonnullas exiguas vires, quae ex eodem fonte atque frictio originem trahere videntur, negligere cogamur. Hic ſcilicet in eos tantum effectus, qui à frictione prouti vulgo concipi ſolet, inquirere conſtitui, de aliis motus obſtaculis minime ſollicitus.

PHAENOMENON. 2.

965. *Si cetera ſunt paria, quantitas frictionis etiam neque a figura neque magnitudine baſis, qua corpus ſuperficiem contingit, pendet; ſed ſi-*

ve ea fuerit major sive minor, et cujuscunque figurae, frictio eandem semper vim exerit.

COROLL. 1.

Fig. 125. 966. Quodsi ergo basis, qua corpus superficiem contingit, AB ponatur $= bb$, haec quantitas non in expressionem frictionis ingreditur, aeque parum ac velocitas corporis.

COROLL. 2.

967. Neque etiam frictio mutatur, licet contactus in unico fiat puncto, quemadmodum evenit, si corpus sit globus seu corpus basi convexa praeditum; dummodo corpus superficiem radat.

SCHOLION.

968. Hoc phaenomenon, etsi certissimis experimentis confirmatum, exceptionem tamen patitur, si corpus in acutissimam desinat cuspidem, qua superficiei infigi queat, quo casu sine dubio penitus coerceretur. Excipiendi scilicet hinc sunt casus, quibus superficies ab incedente corpore damnum patitur, de quibus etiam hic non tractabimus. Ceterum maxime paradoxon videbitur, quod a contactu in unico puncto facto tanta frictio nasci queat, quanta a basi satis vasta, cum frictio ab asperitate ambarum superficierum, quae se mutuo terunt producatur, in ampliori autem contactu plus asperitatis superari debeat. Verum hoc dubium mox evanescet, cum ostendemus, quomodo frictio se ratione pressionis habere debeat.

PHAENOMENON. 3.

969. *Si cetera sint paria, frictio proportionalis est pressioni, qua corpus ad superficiem apprimitur: eoque majori pressionis parti aequatur, quo major fuerit asperitas superficierum se mutuo atterentium.*

COROLL. 1.

970. Quodsi corpus nulla plane vi ad superficiem, super qua incedit, apprimatur, nullam etiam patietur frictionem; quae autem eo major evadet, quo magis appressio augetur.

COROLL. 2.

971. Si ergo asperitas fuerit eadem, frictio, quam corpora super superficiebus incedentia patiuntur, certae cuidam parti pressionis aequatur, qua parte cognita, frictionis quantitas perfecte determinatur.

CO-

Digitized by Google

COROLL. 3.

972. Quodsi ergo corpus ABCD vi $= P$ ad superficiem apprimatur, ac super ea incedat in directione BF, frictio erit $= \delta P$ (denotante δ partem illam memoratam) qua corpus secundum directionem oppositam AE retrahitur. Fig. 125.

SCHOLION. 1.

973. Haec manifesta sunt, quando corpus motu progressivo incedit super superficie, quo casu frictio motus directioni est contraria. Verum si corpus insuper habeat motum quempiam gyratorium, videndum est, in quanam directione basis superficiem terat, huicque erit contraria frictionis directio, cujus quantitas cum ex pressione constet, effectus frictionis in motu corporis perturbando ex principiis supra stabilitis definiri poterit. Ceterum quemadmodum frictio a solo attritu corporis et superficiei oritur, patet si corpus ita volvendo promoveatur, ut nullus attritus existat, cujusmodi motus provolutio perfecta vocatur, nulla etiam frictio locum habebit: simulatque autem motus volutorius tantillo fuerit celerior vel tardior, quam illa conditio postulat, sicque attritus sese admisceat, etiamsi sit minimus, tamen statim subito plena frictio δ effectum suum exerit. Quare phaenomena hinc orta ingentem saltum implicare debent, cum pro certa motus specie omnis frictio subito tollatur, dum autem motus tantillum inde discrepat, pleno effectu adsit.

SCHOLION. 2.

974. Insigne calculi compendium hinc consequimur, quod frictio tam simpliciter exprimitur, et a sola pressione P cum fractione δ, quam asperitas definit, pendet; si enim insuper tam a celeritate corporis quam ab ejus basi penderet, facile in calculos inextricabiles illaberemur. Ac si calculum ad praxin accomodare velimus, totum negotium ad valorem fractionis δ reducitur, quem unico experimento pro singulis corporum generibus assignasse sufficit. Pro corporibus autem ligneis experimenta ostendunt litterae δ valorem circiter $\frac{1}{3}$ tribui debere, si quidem eorum superficies mediocriter fuerit dolata, sin autem magis sit rudis et aspera, majorem valorem sortitur, quemadmodum e contrario corpora metallica probe polita pro littera δ fractionem $\frac{1}{4}$ adeoque minorem exigunt. Verum ex sequentibus patebit, quomodo quovis casu per experimenta conveniens fractionis δ quantitas facile explorari queat. Experientia autem didicimus, nullam superficiem neque

Digitized by Google

que corpus tam perfecte poliri posse, ut frictio plane evanescat, quin potius semper satis notabili adhuc parti frictionis aequari deprehenditur. Quare quae supra de motu corporum super plano politissimo, quod nullam gignat frictionem, sunt allata, in praxi neutiquam locum inveniunt.

PROBLEMA. 1.

975. Si corpus superficiei cuicunque incumbens quiescat, simulque a viribus quibuscunque sollicitetur, distinguere casus, quibus id vel ad motum impellatur vel in quiete perseveret.

SOLUTIO.

Fig. 125. Omnes vires, quibus corpus ABCD sollicitatur, resolvantur in binas, quarum altera sit ad superficiem normalis, altera eidem parallela. Sit P summa omnium ad superficiem perpendicularium, quatenus corpus ab iis ad superficiem apprimitur, erit P pressio, foretque $\eth P$ frictio, si corpus moveretur. Quod ad alteras vires attinet, consideremus hic tantum casum, quo ab iis corpori motus progressivus induceretur, si nulla esset frictio; quoniam motus gyratorius ampliorem postulat evolutionem infra suscipiendam. Cum igitur corpus alium motum nisi secundum directionem superficiei recipere nequeat, vires huic parallelae quasi uni puncto applicatae spectentur, earumque quaeratur aequivalens, quae sit = V secundum directionem BF urgens, atque manifestum est, quamdiu fuerit $V < \eth P$ corpus in quiete esse perseveraturum, neque id commoveri posse, nisi vis sollicitans V major fuerit, quam $\eth P$. Habemus ergo pro vi sollicitante V terminum $\eth P$, quo si vis fuerit minor, nullus motus sit consecuturus, sin autem fuerit major, tum demum motus producatur.

COROLL. 1.

976. Cum corpus in quiete persistere pergat, quamdiu fuerit $V < \eth P$, frictio censenda est vim exercere ipsi vi V aequalem et contrariam: si enim fortius urgeret, corpus in plagam oppositam AE moveri deberet, quod esset absurdum, cum in plagam BF incitetur.

COROLL. 2.

977. Dum ergo corpus quiescit, frictio non determinatam exerit vim, sed quovis casu tantam, quanta opus est ad corpus in quiete conservan-

Digitized by Google

ſervandum, niſi opus fuerit vi majori quam ♃P. Unde ſi corpus a nulla vi ſollicitetur ad motum, etiam frictio nullam vim exercet.

COROLL. 3.

978. Quamdiu ergo motus a vi, quae non ſuperet ♃P, impediri poteſt, eam vim frictio ſuppeditat, et quidem ſecundum eam directionem, qua opus eſt ad motum impediendum. Sin autem quietis conſervatio majorem poſtulet vim, quoniam frictio tantum praeſtare nequit, motus generabitur.

SCHOLION. 1.

979. Cum ſupra dixerimus, in quiete corporum nullam dari frictionem, id de vera quiete tantum, in qua corpus eſſet perſeveraturum, etiamſi nulla adeſſet frictio, eſt intelligendum. Statim enim atque corpus a viribus ſollicitatur, quibus ad motum incitaretur, ſi nulla eſſet frictio, huic etiam motus productioni frictio reluctatur, etiamſi corpus adhuc ſit in quiete. Ita igitur frictio tam ratione motus quam quietis eſt definienda, ut dum corpus movetur, vim exerat perpetuo ipſi ♃P aequalem et ſecundum directionem motui contrariam: dum autem corpus quieſcit, eadem vim non per ſe definitam, ſed tantam duntaxat exerceat, quanta motui impediendo ſufficit, niſi forte ad hoc majori vi opus ſit quam ♃P: tum enim hac tantum vi ♃P motus productioni reſiſtit, quae cum motum coercere non valeat, motus revera generabitur. Vis ſcilicet ♃P eſt maximus conatus, quo frictio anniti poteſt, quo revera ſemper ipſi motui reſiſtit, et quo etiam motus generationi reluctatur, ſi opus eſt. Sin autem minor vis ſufficiat, etiam minorem tantum exerit: ſeu quoties vis ad motus productionem cohibendam neceſſaria non fuerit major quam ♃P, ea vis a frictione ſuppeditatur. Haec autem tantum de motu progreſſivo ſunt tenenda, ſi enim motus gyratorius accedat, praecipue ſi axis gyrationis fuerit ad ſuperficiem inclinatus, res eſt altioris indaginis, et quia hoc caſu non omnia baſis elementa ſecundum eandem directionem moventur, ſuperficiemque terunt, frictio ſingulorum elementorum conſiderari debet, ex quo etiam baſis figura et magnitudo in computum ingredietur. Atque ad hanc circumſtantiam ſupra, ubi baſis figuram a determinatione frictionis removimus, non reſpeximus.

SCHOLION. 2.

980. Difficile ſane eſt frictionis, quemadmodum hic eam experientiae conſentaneam ſtatuimus, cauſam aſſignare, facile autem cauſas, quae

Digitized by Google

quae forte menti occurrant, reſellere. Perſpicuum enim eſt, neque ab abraſione quadam particularum, neque a depreſſione filamentorum, dum corpus ſuper ſuperficie incedit, frictionem oriri poſſe, quia tum neceſſario baſeos magnitudo in computum intraret. Quod ad frictionem, quatenus motus generationi reſiſtit, attendamus, ea ſequenti modo haud inepte explicari poſſe videtur. Fig. 126. Dum nempe corpus ABCD ſuperficiei EF incumbit, contactus non ſecundum planum AB, ut ſenſus oſtendit, fieri eſt concipiendus, ſed ob minimas utrinque prominentias et cavitates ſecundum ſuperficiem ſinuoſam et quaſi undulatam, *ab ab ab*, dum ob preſſionem prominentiae alterius in cavitates alterius ſe inſinuant. Hoc admiſſo corpus moveri nequit, quin ſimul ſupra ſuperficiem AB aliquantillum elevetur; ſeu prima motus impreſſio non ſecundum directionem OV ipſi AB parallelam, ſed ſecundum quandam directionem OS inclinatam fieri debet, quae ſcilicet parallela ſit maximae quaſi declivitati in contactu illo ſinuoſo: atque haec declivitas ſeu obliquitas reſpondet aſperitati utriusque ſuperficiei in contactu ita, ut pro majore minoreve aſperitate angulus VOS major minorve ſit concipiendus. Statuatur ergo iſte angulus VOS $= \zeta$, corpusque ſuperficiei apprimatur vi OP $= P$, ac jam videamus, quanta vi ſecundum directionem OV agente opus ſit, ut corpus de ſitu ſuo dimovere valeat. Agat ergo vis OV $= V$, a qua corpus ſecundum directionem OS ſollicitabitur vi $= V \cos \zeta$: at vis preſſionis OP $= P$ huic actioni reſiſtit vi $= P \sin \zeta$. Quare nili fuerit $V \cos \zeta > P \sin \zeta$ ſeu $V > P \tang \zeta$, corpus de quiete non deturbabitur; vel quamdiu vis ſollicitans OV $= V$ minor fuerit quam $P \tang \zeta$, corpus in quiete perſeverabit. Id quod egregie cum ſupra traditis convenit, cum loco fractionis illius δ hic habeamus tangentem cujuſpiam anguli ζ. Verum fateri cogor, hinc non intelligi, cur dum corpus movetur, frictionis vis motui contraria etiam ipſi $P \tang \zeta$ aequalis eſſe debeat: cum enim baſis corporis alternatim ſe ex illis ſinuoſitatibus expediat, iterumque ſe eo inſinuet, minus patet quantum detrimentum hinc motus ſit paſſurus. Quoniam tamen hypotheſis ſtabilita hinc non evertitur, ei inhaereamus, cauſamque hic aſſignatam tanquam a vero non abhorrentem ſpectemus.

CAPUT

Digitized by Google

CAPUT II.

DE MOTU PROGRESSIVO CORPORUM GRAVIUM A FRICTIONE IMPEDITO.

PROBLEMA. 2.

981. Si corpus grave ſuper plano horizontali motu progreſſivo incedat, determinare motus retardationem a frictione oriundam.

SOLUTIO.

Sit M corporis maſſa idemque ejus pondus, quod planum horizontale EF tangat baſi ſua AB, quam pariter planam eſſe oportet. Conſideretur corporis centrum inertiae O, in quo ejus pondus M collectum concipiatur, ita ut corpus deorſum ſollicitetur vi OP = M, quae cum ad planum EF ſit normalis, tanta quoque vi ad planum apprimitur: ubi primum obſervo, niſi recta OP intra corporis baſin AB cadat, motum progreſſivum eſſe non poſſe. Verum ne hoc quidem ſufficit, cum enim progrediente corpore ſecundum directionem BF id ſecundum directionem contrariam BE ob frictionem retrahatur vi = ϑM, denotante ϑ rationem preſſionis ad frictionem, haec vis conatur corpori motum gyratorium circa horizontalem axem per O tranſeuntem inducere, cujus momentum eſt = ϑM. OP. Cui vi ſi corpus obſequatur, primo inſtanti baſis punctum A elevari incipiet, ita ut jam totum corpus extremitati baſis B innitatur, quo etiam preſſio transferetur. In hoc ergo ſtatu ad gyrandum proclivi corpus in B ſurſum urgeri cenſendum eſt vi BM = M, unde momentum gyrationi reſiſtens naſcitur = M. BP: quod niſi ſuperet illud ϑM. OP, corpus revera gyrari incipiet. Quare cum hic tantum motum progreſſivum contemplari ſtatuerimus, haec conditio inſuper requiritur, ut ſit BP > ϑ. OP, quam ergo hic locum habere aſſumamus. Fuerit ergo initio corporis celeritas ſecundum directionem EF = c, et elapſo tempore t confecerit ſpatium = s, habeatque celeritatem = v. Atque ob vim ϑM motui contrariam erit $\frac{dv}{2g\,dt} = \frac{-\vartheta M}{M} = -\vartheta$, ideoque $v = c - 2g\vartheta t$. Porro quia eſt $ds = v\,dt$, fiet $s = ct - \vartheta gtt$. Motus autem tamdiu tantum durabit, quoad corpus ad quietem fuerit reductum, frictione ϑM tum ſubito

Fig. 127.

bito ceſſante: corpus ergo ad quietem redigetur elapſo tempore $t = \frac{c}{2\delta g}$ et percurſo ſpatio $= \frac{cc}{4\delta g}$.

COROLL. 1.

982. Ut ergo corpus grave ſuper plano horizontali motu progreſſivo incedere poſſit, perpendiculum OP ex centro inertiae corporis O in planum demiſſum non ſolum intra baſin AB cadere, ſed etiam a termino baſis anteriori B tanto intervallo BP remotum eſſe debet, ut ſit $BP > \delta$. OP.

COROLL. 2.

983. Ductis igitur ex centro inertiae O cum perpendiculari OP, tum ad anteriorem baſis terminum B recta OB, angulum BOP majorem eſſe oportet angulo, cujus tangens eſt $= \delta$. Unde ſi fuerit $\delta = \frac{1}{3}$, angulus BOP major eſſe debet quam 18°, 26′. Sin autem fuerit minor, corpus progrediendo ſimul provolvetur.

COROLL. 3.

984. At ſi corpus motu progreſſivo puro promoveatur, ejus motus erit uniformiter retardatus, et ſimilis ei, quo corpus celeritate c ſurſum projectum aſcenderet, deorſum ſollicitatum vi, quae ſit ad ejus maſſam ut δ ad 1. Hoc tantum diſcrimine, quod hic corpus ad quietem redactum perpetuo in quiete ſit permanſurum.

SCHOLION. 1.

985. Ut tali corpori quieto motus imprimatur, neceſſe eſt ut ſecundum directionem horizontalem impellatur vi, quae major ſit quam δM: quamdiu autem ſollicitatur vi minore, in quiete perſeverabit, niſi forte ad provolutionem incitetur, quod quando evenire debeat, accuratius evolvamus. Sollicitetur ergo primo corpus ſecundum directionem horizontalem OS, quae per ejus centrum inertiae O tranſeat, vi OS = S, ut ſit $S < \delta M$, et frictio pari vi S ſecundum BA renitetur. An autem circa extremitatem B provolvatur? judicium petetur ex momento frictionis S. OP et momento preſſionis M in B translatae, quod eſt = M. BP: hinc ſi fuerit S. OP > M. BP, corpus provolvetur, ſin minus, in quiete perſiſtet: quia enim vis ſollicitans OS = S ipſi centro inertiae eſt applicata, ea nihil huc confert. Sit nunc vis S infra centrum

Digitized by Google

trum inertiae in R applicata, et quia hinc momentum provolutioni contrarium naſcitur = S. OR, ne corpus provolvatur, eſſe oportet S. OR + M. BP > S. OP, ſeu S. PR < M. BP; unde ſimul patet, ſi vis horizontalis S ſublimius in *r* eſſet applicata, corpus provolutioni non fore obnoxium, ſi fuerit S. P*r* < M. BP, ubi quidem aſſumimus eſſe S < ∫M. Idem etiam hinc magis fit perſpicuum, ſi punctum B ut axem fixum, corpusque circa eum mobile ſpectemus, tum enim vis *rv* = S momentum in ſenſum DC eſt = S. P*r*, expondere autem corporis M in O collecto oritur momentum in ſenſum contrarium M. BP: ideoque corpus provolvetur ſi S. P*r* > M. BP, quieſcet vero ſi S. P*r* < M. BP.

SCHOLION. 2.

986. Sin autem vis *rv* = S major fuerit quam ∫M, motus corpori progreſſivus inducetur ab exceſſu S — ∫M, quia frictio jam tantum vi = ∫M ſecundum directionem BE reluctatur. Utrum autem ſimul corpus ſit motum gyratorium adepturum, nec ne? hoc modo cognoſcetur. Sepoſito nimirum motu progreſſivo, aſſumo corpori alium motum gyratorium imprimi non poſſe, niſi circa axem horizontalem per centrum inertiae O tranſeuntem et ad motus directionem OS normalem, ad quem inveſtigandum, cum baſis punctum B maneat in plano horizontali, ſimul ac punctum A elevari incipit, tota preſſio in puncto B exercetur, ita ut tum in B habeatur vis ſurſum urgens BM = M. Nunc igitur ex viribus *rv* = S, BE = ∫M, OP = M et BM = M colligitur momentum provolutionem producens = S. O*r* + ∫M. PO — M. BP; quare ut corpus ſolo motu progreſſivo feratur, haec conditio requiritur, ut ſit S. O*r* + ∫M. PO < M. BP, ubi per hypotheſin eſt S > ∫M. Si vis horizontalis S infra centrum inertiae in R eſſet applicata, corpus provolutioni non erit obnoxium, ſi fuerit ∫M. PO < M. BP + S. OR ſeu S. OR + M. BP > ∫M. PO. Hinc igitur clare intelligimus, quantum cum amplitudo baſis, ſeu diſtantia perpendiculi ex centro inertiae demiſſi OP ab ejus terminis, tum elevatio centri inertiae ſupra planum horizontale, tum altitudo in qua vis horizontalis applicatur, atque ipſa frictio conferant, ut nulla provolutio ſit metuenda.

PROBLEMA. 3.

987. Si corpus grave ABCD plano inclinato EF imponatur, definire conditiones, ſub quibus id ob frictionem in quiete ſit permanſurum. Fig. 128.

Digitized by Google

SOLUTIO.

Sit angulus, quem planum inclinatum EF cum horizonte GF constituit, GFE $= \zeta$, corporis autem ei impositi massa $= M$, et centrum inertiae O, basi autem AB plano inclinato incumbat. Ducatur recta verticalis OQR, secundum quam corpus ob gravitatem sollicitari censendum est vi $= M$, quae resolvatur secundum directiones OP et OC, quarum illa in planum EF sit normalis, haec vero eidem parallela, et ob angulum POQ $=$ GFE $= \zeta$, erit vis OP $= M$ *cof* ζ et vis OC $= M$ *sin* ζ. Illa autem vi OP corpus ad planum EF apprimitur, unde si moveretur, frictio foret $= \delta M$ *cof* ζ: haec vero vi OC $= M$ *fi* ζ ad motum secundum plani inclinati EF directionem sollicitatur. Nisi ergo haec vis M *fi* ζ major sit, quam δM *cof* ζ, corpus nullum motum progressivum adipiscetur; quare ut corpus quiescat, necesse est, sit M *fi* $\zeta < \delta M$ *cof* ζ seu *tang* $\zeta < \delta$. Prima ergo conditio ad conservationem quietis necessaria exigit, ut anguli inclinationis F $= \zeta$ tangens minor sit quam fractio δ qua frictio determinatur. Deinde manifesto requiritur, ut recta verticalis OQ intra basin AB cadat. Nam ne corpus circa basis extremitatem B provolvatur, necesse est, ut vis OQ $= M$ momentum respectu puncti B, quod est M. BQ *cof* ζ sit positivum, ideoque BQ positivum, seu punctum Q intra basin AB cadere debet. Quod etiam ex motu gyratorio circa O generando ita ostendi potest. Fingamus enim corpus jam talem motum gyratorium incipere, et dum punctum A elevatur, tota pressio M *cof* ζ in B transferetur, ut nunc corpus in B sollicitetur primo vi BM $= M$ *cof* ζ, ob frictionem autem vi BA $= M$ *fi* ζ, ex quibus momentum generans motum gyratorium erit $= M$ *fi* ζ. OP $- M$ *cof* ζ. BP. Quare ne talis motus oriatur, debet esse BP *cof* $\zeta >$ OP. *fi* ζ seu BP $>$ OP *tang* ζ, at OP *tang* $\zeta =$ PQ, ergo ob BP $>$ PQ intervallum BQ positivum esse oportet. Consequenter ut corpus ABCD plano inclinato EF impositum quiescat, primo requiritur, ut verticalis OQ intra basin AB cadat, deinde ut tangens anguli inclinationis F minor sit quam δ.

COROLL. I.

988. Hinc igitur facillimum modum nanciscimur, explorandi frictionem seu fractionem δ: planum enim EF eousque elevetur, quoad corpus super eo descendere incipiat, et tangens anguli maximi F, quo corpus etiamnum in quiete persistit, dabit valorem fractionis δ.

CO-

Digitized by Google

COROLL. 2.

989. Quodsi fuerit $\delta = \frac{1}{3}$, corpus tamdiu in quiete permanebit, quamdiu angulus elevationis GFE non superat 18°, 26′. Sin autem sit $\delta = \frac{1}{4}$, hunc angulum minorem esse oportet, quam 14°, 2′, sicque vicissim ex hoc angulo valor ipsius δ innotescit.

COROLL. 3.

990. Ut autem corpus super plano inclinato quiescat, non sufficit ut sit *tang* GFE $< \delta$, sed etiam basis corporis tum ampla esse debet, ut sit BP $>$ OP *tang* GFE; seu ut angulus BOP major sit quam angulus GFE.

SCHOLION.

991. In figura repraesentatur sectio corporis verticalis per ejus centrum inertiae O facta, quae simul ad planum inclinatum sit normalis; in qua propterea recta OP ad id est perpendicularis, et OC sit directio motus progressivi, quem gravitas corpori imprimere conatur. Ex dictis autem manifestum est, motum progressivum coerceri, si fuerit *tang* F $< \delta$. Verum ad judicium expediendum, num corpus motum gyratorium sit accepturum, non sufficit ad solam sectionem ABCD ejusque basin AB spectare, cum fieri posset, ut in hac sectione corpus plano nusquam incumberet, sed contactus in extremitatibus corporis tantum existeret. Tum igitur universus contactus considerari ac dispici debet, quomodo et circa quamnam lineam provolutio oriri possit, quae utique ex figura basis est dijudicanda. Quodsi ergo corpora tam irregularia adhibeantur, ut hoc judicium nimis difficile evadat, experientiam consulere conveniet, an corpus ad provolutionem sit proclive? prior vero conclusio de angulo F manet, et ab hac irregularitate neutiquam pendet.

PROBLEMA. 4.

992. Si elevatio plani inclinati EF major fuerit, quam ut grave ei incumbens ABCD in quiete persistere possit, definire conditiones, quibus id solo motu progressivo super plano inclinato EF sit descensurum.

SOLUTIO.

Sit massa, idemque pondus corporis $= M$, et ejus centrum inertiae O ut ante, atque δ exponens frictionis. Vocato ergo angulo elevationis GFE $= \zeta$, erit per hypothesin *tang* $\zeta > \delta$. Iam ex vi gravitatis Fig. 128.

Digitized by Google

vitatis OQR = M colligimus preſſionem in planum inclinatum, ſeu vim OP = M *cof* ζ, et vim ad deſcenſum ſollicitantem OC = M *ſi* ζ. Cum igitur frictio ei renitatur vi = ϑM *cof* ζ, corpus revera ad deſcenſum incitabitur exceſſu virium M *ſi* ζ − ϑM *cof* ζ = M (*ſi* − ϑ *cof* ζ), a qua motus progreſſivus producetur, dummodo praeterea in corpore nullus motus gyratorius generetur. Videamus ergo, ſub quibusnam conditionibus corpori motus gyratorius circa axem horizontalem et ad planum COP normalem per centrum inertiae O ductum generari poſſit; ſtatim autem ac talis motus incipit, tota preſſio M *cof* ζ in B transfertur, ita ut nunc corpus ſollicitetur a vi BM = M *cof* ζ, et ob frictionem a vi BA = ϑM *cof* ζ, unde momentum gyrationem in ſenſum BADC generans eſt = ϑM *cof* ζ . OP − M *cof* ζ. BP. Quare ne corpus provolutioni ſit obnoxium, oportet hanc quantitatem eſſe negativam, ideoque BP > ϑ. OP. ſeu *tang* BOP > ϑ.

COROLL. 1.

993. Quia conditio inventa *tang* BOP > ϑ non pendet ab inclinatione plani EF, ſi corpus in minori inclinatione provolutioni non fuerit obnoxium, etiam in majori elevatione nulla provolutio erit metuenda.

COROLL. 2.

994. Quodſi ergo fuerit ϑ = $\frac{1}{3}$, dummodo angulus BOP major ſit quam 18°. 26′, corpus nullum motum volutorium accipiet, ſed ſuper plano inclinato vel quieſcet, vel ſolo motu progreſſivo deſcendet.

SCHOLION.

995. In hoc autem judicio pro puncto B non tam extremitas in ipſa ſectione ABCD per centrum inertiae O facta eſt ſumenda, ſed in tota baſi, qua fit contactus, linea per terminos a puncto P *maxime remotos* ducta eſt intelligenda, cujus a P diſtantia pro *intervallo PB* accipi debet.

PROBLEMA. 5.

996. Si corpus ita fuerit comparatum, ut nulla provolutio ſit metuenda, ejus motum deſcenſus ſuper plano inclinato EF determinare.

SOLUTIO.

Poſita corporis maſſa eodemque pondere = M, et elevatione plani ſupra horizontem ſeu angulo GFE = ζ, ut ſit *tang* ζ > ϑ, quia ſo-

Digitized by Google

alioquin corpus in quiete perseveraret. Confecerit jam corpus tempore $= t$ super plano inclinato spatium $= s$, motu scilicet a quiete inchoato, et quia vis accelerans est $= M \sin \zeta$, a gravitate oriunda, retardans autem $= \delta M \cos \zeta$ a frictione profecta, hinc nanciscimur istam aequationem: $\frac{dds}{2g dt^2} = \frac{M \sin \zeta - \delta M \cos \zeta}{M} = \sin \zeta - \delta \cos \zeta$, hincque integrando $\frac{ds}{dt} = 2gt (\sin \zeta - \delta \cos \zeta)$, quae est celeritas corporis hoc tempore t acquisita, ipsum autem spatium interea confectum fit $s = g\,tt (\sin \zeta - \delta \cos \zeta)$.

COROLL. 1.

997. Frictio ergo non impedit, quo minus corpus super plano inclinato descendat motu uniformiter accelerato, cum celeritates in ratione temporum crescant: verum in multo minore ratione crescunt; sublata enim frictione foret $s = gtt \sin \zeta$.

COROLL. 2.

998. Si observetur tempus t quo datum spatium s fuerit confectum, simulque elevatio plani seu angulus ζ fuerit exploratus, inde exponens frictionis δ colligi poterit: erit enim $\delta = tang\, \zeta - \frac{s}{gtt \cos \zeta}$.

SCHOLION.

999. Hoc modo explorari poterit, utrum pro quiete idem valor exponentis δ reperiatur, ac pro motu eoque sive celeriore sive tardiore: sed hujusmodi experimenta sunt lubrica, quia exiguus error in observatione temporis t commissus multum turbat. Tum vero etiam resistentiae aeris ratio est habenda, quae praesertim in motibus velocioribus insigne momentum afferre potest. Quare nonnisi plurimis hujusmodi experimentis summa cura institutis quicquam certi in hoc negotio concludi poterit. Ne autem resistentia aeris moram faceſſat, planum non multum ultra statum quietis elevari convenit, quia in motibus tardioribus ejus effectus est minimus. Tum vero corpus quantum fieri potest, ponderosum efficiatur, frustum plumbi intra ejus volumen includendo, ut tamen basis ex ea constet materia, cujus frictionem explorare lubet.

EXEM-

EXEMPLUM.

1000. Ponamus tabulae EF longitudinem esse 6 ped. Rehn. tempusque t observari, quo corpus descendendo totam hanc longitudinem conficiat, ac videamus, quantum discrimen in tempore t frictione δ parumper mutata oriri debeat. Cum igitur sit $g = 15\frac{1}{8}$ ped. Rhen. erit tempus descensus $t = \gamma\frac{48}{125(\sin\zeta - \delta\cos\zeta)}$.

Ponamus $\delta = \frac{1}{3}$, et angulum $\zeta = 20°$, quia debet esse $tang\ \zeta > \frac{1}{3}$, ac reperietur tempus descensus $t = 3$, 652 min. sec. seu $t = 3\frac{2}{3}$ sec. proxime.

Sit jam δ aliquantulum majus, nempe $\delta = \frac{1}{3} + \frac{1}{100}$, manente $\zeta = 20°$, et prodit tempus $t = 4$, $45 = 4\frac{9}{20}$ sec.

At si esset $\delta = \frac{1}{3} - \frac{1}{100}$ manente $\zeta = 20°$, invenitur tempus $t = 3$, $171 = 3\frac{1}{6}$ sec.

Pars igitur centesima unitatis in valore ipsius δ gignit temporis discrimen illo casu $\frac{1}{4}$ sec. hoc vero tantum $\frac{1}{2}$ sec. unde in observatione temporis valde attentum esse oportet. Si plano minor tribuatur elevatio, ut motus multo lentior oriatur, dubium est, an observationibus multum confidere queamus. Levissima enim inaequalitas in superficie descensum vehementer perturbare valebit, ita ut si experimentum idem aliquoties repetatur, phaenomena multum discrepare possint. Atque hanc ob causam, etsi hic calculum hypothesi de frictione stabilitae superstruo, tamen si conclusiones inde deductas cum experientia conferre velimus, minime perfectum consensum expectare debemus,

CAPUT. III.

DE MOTU GYRATORIO CORPORUM GRAVIUM CIRCA AXEM FIXUM A FRICTIONE RETARDATO.

PROBLEMA. 6.

1001. Efficere ut corpus circa axem fixum per ejus centrum inertiae transeuntem gyrari possit.

SO-

Digitized by Google

SOLUTIO.

Si corpus debeat gyrari circa axem GG, necesse est, ut utrinque Fig. 129.
instructum sit terminis cylindricis CEFD, quos axis GG medium trajiciat, ita ut utriusque cylindri axis existat: atque hic quidem assumo, hunc axem GG per corporis centrum inertiae I transire, quanquam eadem structura est observanda, si recta GG non per corporis centrum gravitatis transire debeat. Ut jam durante motu gyratorio haec recta GG fixa maneat, id pluribus modis obtineri potest. Primo hi termini cylindrici annulis fixis ejusdem amplitudinis inseri possunt, intra quas libere, frictione saltem excepta, converti queant: verum si amplitudo annulorum non excedat amplitudinem cylindricorum CEFD, verendum est, ne ob nimis arctam insertionem ingens resistentia oriatur, ac si termini illi cylindrici vel minimum intumescant, motus omnis coerceatur.

Deinde termini cylindrici utrinque canali MLN in figuram quadra- Fig. 130.
ti excavato imponi possunt, ut contactus tantum in tribus punctis E, H, F fiat; dum enim corpus intra has cavitates circumvolvitur, axis GG manet immotus. Ne autem motus nimis impediatur, non opus est, ut ambo parietes verticales M et N cylindrum tangant, sed majore intervallo a se invicem distare possunt. Statim enim atque corpus gyratur, cylindrici termini se alterutri parieti applicabunt, perindeque est, ac si alter abesset; qui tantum ideo adjicitur, ut corpus si forte in sensum contrarium gyretur, se ei pari modo applicare possit.

Tertio termini cylindrici etiam utrinque cavitati MLN, ex duobus Fig. 131.
planis inclinatis ML et NL efformatae, imponi possunt; hoc modo contactus perpetuo fiet in duobus punctis E et F, axisque GG manebit in quiete; dummodo inclinatio illorum planorum tanta sit, ut termini cylindrici super illis non ascendant, quam conditionem deinceps investigabimus.

Quarto imponi etiam possunt ambo termini cylindrici fulcris in Fig. 132.
figuram circularem MLN excavatis, quibus quidem corpus dum quiescit ita incumbit, ut contactus fiat in imo puncto H. Quando autem gyratur, contactus fiet in alio puncto elevato, quod cum perpetuo maneat idem, uti ostendemus, axis GG, quamdiu motus gyratorius in eundem sensum durat, manebit immotus. Hic sufficit radium circuli MLM majorem fuisse radio termini cylindrici, sed tanta profunditas huic cavitati tribui debet, ut non sit verendum, ne corpus supra ejus oras M et N transiliat.

Digitized by Google

COROLL. 1.

1002. Dum corpus hoc modo utrinque talibus cavitatibus incumbit, ob pondus ſuum eas premet: ac ſi centrum inertiae I in medio verſetur, utrinque preſſio aequalis exeretur: ſin autem id non fuerit in medio, preſſiones erunt diſtantiis reciproce aequales, ita ut ſumma ſit toti ponderi aequalis.

COROLL. 2.

1003. Quodſi autem corpus gyretur, preſſio non amplius a ſolo pondere corporis pendet, ſed ob ipſam frictionem immutabitur, ideoque ex frictionis ratione determinari debet, unde etiam ultimo caſu punctum contactus eſt definiendum.

SCHOLION.

1004. Preſſio etiam, ideoque et frictio, plurimum perturbatur a viribus, quibus corpus dum gyratur, praeter gravitatem ſollicitatur. Quare quo hoc argumentum dilucide pertractemus, primo mentem ab hujusmodi viribus abſtrahamus, corpusque tantum grave ſpectemus, cui initio motus gyratorius fuerit impreſſus; et quantum is ob frictionem retardari debeat, indagemus. Tum vero etiam aſſumamus, axem gyrationis GG per centrum inertiae corporis I tranſire, ab eoque ambos terminos aeque eſſe remotos, ita ut corpus utrinque ſibi ſit ſimile. Quin etiam ne vires obliquae calculum turbent, ſtatuamus, rectam GG ſimul eſſe axem principalem corporis. Minime enim conſultum videtur, corpori figuram nimis irregularem tribuendo, inveſtigationes noſtras difficilibus calculis implicare, cum ipſa principia hactenus ſtabilita etiam his caſibus evolvendis ſufficiant, ſi quis laborem ſuſcipere voluerit. Caſus autem fig. 130. repraeſentatus in fig. 131. continetur, dum alterum planum ſit verticale et alterum horizontale: deinde vero etiam caſum fig. 132. ex eo dijudicari poſſe videbimus.

PROBLEMA. 7.

Fig. 133. 1005. Si corporis (in fig. 129. repraeſentati) termini cylindrici utrinque inter duo plana utcunque inclinata ML et NL ſuſtententur, corpusque in gyrum agatur celeritate quacunque, definire frictionem ejusque effectum in motu corporis retardando.

SO-

Digitized by Google

SOLUTIO.

Quia centrum inertiae I in medio axis GG situm assumimus, respectu terminorum cylindricorum utrinque omnia erunt paria. Sit igitur pro altero termino radius basis circularis $GE = GF = f$, et puncta contactus in E et F. Ducta verticali GH ponantur anguli $EGH = \zeta$ et $FGH = \eta$, quibus positio planorum ML et NL determinantur: tum vero corpus jam elapso tempore t gyretur in sensum EF celeritate angulari $= \omega$, quae initio fuerit $= \varepsilon$. Quia ergo ex hac parte corpus in punctis E et F sustinetur, sint E et F pressiones, quibus corpus planis innititur, ac vicissim secundum directiones eo normales EG et FG urgetur. Frictio porro in punctis E et F, ubi fit attritus, ita se exeret, ut in E corpus sollicitetur vi sec. $EM = \delta E$ et in F vi sec. $FL = \delta F$, ita ut ex hac parte quatuor habeantur vires.

vis $EG = E$; vis $EM = \delta E$; vis $FG = F$; vis $FL = \delta F$,

totidemque pares ex altera parte. Posita ergo massa eodemque pondere corporis $= M$, quia omnis motus progressivus excluditur, hae vires centro inertiae applicatae se mutuo destruere debent: Colligitur autem ex istis quaternis viribus vis verticaliter sursum tendens

$$E \cos\zeta + F \cos\eta + \delta E \sin\zeta - \delta F \sin\eta$$

et vis horizontalis dextorsum directa

$$E \sin\zeta - F \sin\eta - \delta E \cos\zeta - \delta F \cos\eta,$$

ubi haec debet evanescere, illa autem dimidio ponderi corporis aequari. Hinc nanciscimur:

$$E \sin\zeta - F \sin\eta = \delta (E \cos\zeta + F \cos\eta) \text{ et}$$
$$(1 + \delta\delta)(E \cos\zeta + F \cos\eta) = \tfrac{1}{2} M, \text{ ideoque}$$

$$E \cos\zeta + F \cos\eta = \frac{M}{2(1+\delta\delta)} \text{ et}$$

$$E \sin\zeta - F \sin\eta = \frac{M\delta}{2(1+\delta\delta)}$$

ex quibus elicitur

$$E = \frac{M(\sin\eta + \delta\cos\eta)}{2(1+\delta\delta)\sin(\zeta+\eta)}; \quad F = \frac{M(\sin\zeta - \delta\cos\zeta)}{2(1+\delta\delta)\sin(\zeta+\eta)}$$

ubi statim est observandum, cum vires E et F negative esse nequeant, necessario esse oportere $\sin\zeta > \delta\cos\zeta$ seu $\tang\zeta > \delta$.

Nunc denique colligantur momenta ex frictione nata, quae erunt

$$\delta(E+F)f = \frac{M\delta f(\sin\zeta + \sin\eta - \delta\cos\zeta + \delta\cos\eta)}{2(1+\delta\delta)\sin(\zeta+\eta)}$$ cujus duplum motui

opponitur. Quare si momentum inertiae corporis respectu axis GG fuerit $= Maa$, habebimus hanc aequationem:

$$\frac{dv}{2gdt} = \frac{-\delta f(\sin\zeta + \sin\eta - \delta\cos\zeta + \delta\cos\eta)}{(1+\delta\delta)aa\sin(\zeta+\eta)}, \text{ et integrando}$$

$$v = c - \frac{2\delta f g t(\sin\zeta + \sin\eta - \delta\cos\zeta + \delta\cos\eta)}{(1+\delta\delta)aa\sin(\zeta+\eta)}.$$

COROLL. 1.

1006. Quo minor ergo est f, seu quo graciliores termini cylindrici, eo minor est effectus frictionis. Sed hos terminos non pro lubitu diminuere licet, quia eos satis fortes esse oportet ad onus gestandum, atque quantitas f fere rationem subduplicatam ponderis M sequi debet.

COROLL. 2.

1007. Si sit $\zeta = 90$ et $\eta = 0$, qui est casus fig. 130. momentum frictionis est $= \frac{M\delta(1+\delta)f}{1+\delta\delta}$; Sin autem sit $\eta = \zeta$, seu plana ML et NL aequaliter ad horizontem inclinata, erit momentum frictionis $= \frac{2M\delta f\sin\zeta}{(1+\delta\delta)\sin 2\zeta} = \frac{M\delta f}{(1+\delta\delta)\cos\zeta}$: ubi debet esse $tang\ \zeta > \delta$.

COROLL. 3.

1008. Minimum autem fit momentum frictionis sumendo $tang\ \zeta = \delta$, tum enim ob $F = 0$, erit $E = \frac{M}{2(1+\delta\delta)\cos\zeta} = \frac{M}{2r(1+\delta\delta)}$ ideoque momentum frictionis $= \frac{M\delta f}{r(1+\delta\delta)}$. Hoc ergo casu corpus soli plano ML innititur, et alterum NL plane non in computum venit.

COROLL. 4.

1009. Hinc casus fig. 132. quaecunque sit cavitatis MLN figura facile evolvitur. Termini enim cylindrici puncto O applicabuntur, ubi tangens cum horizonte facit angulum, cujus tangens est $= \delta$, eritque momentum frictionis $= \frac{M\delta f}{r(1+\delta\delta)}$.

SCHO-

Digitized by Google

SCHOLION.

1010. Terminos ergo cylindricos ita sustentari convenit, ut contactus utrinque in unico fiat puncto, quia tum momentum frictionis minimum redditur: quem in finem eos cavitatibus MLN (fig. 132.) imponi expediet, quae in formam semicirculi crassitiem non multum superantis sint excavatae, ne situs, quem in motu obtinent, multum discrepet a situ quietis. Tum vero hos terminos cylindricos quam maxime tenues effici oportet, quantum quidem eorum firmitas ratione ponderis gestandi permittit. Praeterea etiam hi termini oleo aliave materia lubrica inungi solent, quo magis attritus diminuatur, fractionique δ minor valor concilietur. Interim tamen casu, quem sumus contemplati, motus mox extinguetur, quod fiet elapso tempore

$$t = \frac{\varepsilon(1+\delta\delta)aa\beta i(\zeta+\eta)}{2\delta fg(\beta i\zeta+\beta i\eta-\delta\cos\zeta+\delta\cos\eta)}.$$

Quando autem vires adhibentur, ad motum conservandum, ex iisdem principiis earum quantitas definiri potest, ut motus maneat uniformis. Quin etiam hujusmodi machinae, dum in gyrum aguntur, ad onera elevanda instrui solent, quae operatio ut motu uniformi perficiatur, tantis viribus opus est, quae non solum oneris resistentiam, sed etiam frictionem superare valeant; quem casum, cum in vita communi frequentissime occurrat, hic evolvamus.

PROBLEMA. 8.

1011. Si cylindrus (fig. 129.) adhibeatur ad onus quodpiam elevandum, determinare vires ei applicandas, ut habita frictionis ratione motus servetur uniformis.

SOLUTIO.

Incumbat alter terminus cylindricus, cujus radius $GE = GF = f$ Fig. 134. binis planis inclinatis ML et NL, quae cum horizonte angulos faciant ζ et η, quibus aequales erunt anguli, quos radii GE et GF ad puncta contactus E et F ducti cum recta verticali GH faciunt. Dum autem corpus in sensum EF gyratur, ope cordae in medio circumvolutae elevet onus $= Q$, quod pondere suo $= Q$ vecti horizontali $GS = s$ secundum directionem verticalem SQ motui reluctetur. Tum vero radio $GR = r$, a verticali GA declinanti angulo $AGR = \theta$ jugiter applicata sit vis $RP = P$ ad eum normalis, cujus quantitas quaeritur, ut motus maneat uniformis existente celeritate angulari circa axem $GG = s$. Quod-

si jam pondus ipsius corporis, per cujus centrum inertiae axis gyrationis GG transit, ponatur ut ante $= M$, et vires quibus alter terminus cylindricus a planis, quibus in E et F incumbit, repellitur, secundum EG $= E$ et secundum FG $= F$, unde frictiones nascuntur secundum EM $= \delta E$ et secundum FL $= \delta F$, supra vidimus, hinc oriri vim verticaliter sursum tendentem $E \cos\zeta + F \cos\eta + \delta (E \sin\zeta - F \sin\eta)$, et vim horizontalem dextorsum directam $= E \sin\zeta - F \sin\eta - \delta (E \cos\zeta + F \cos\eta)$, quas ob binos terminos cylindricos duplicari oportet. Deinde ex pondere ipsius corporis habemus vim verticaliter deorsum nitentem $= M$ et ex onere elevando vim $= Q$. Ex vi sollicitante P vero oritur vis deorsum urgens $= P \sin\theta$, et vis horizontaliter sinistrorsum $= P \cos\theta$: quae vires cum se mutuo debeant destruere, obtinebimus has aequationes:

$$E \cos\zeta + F \cos\eta + \delta (E \sin\zeta - F \sin\eta) = \tfrac{1}{2} M + \tfrac{1}{2} Q + \tfrac{1}{2} P \sin\theta$$
$$E \sin\zeta - F \sin\eta - \delta (E \cos\zeta + F \cos\eta) = \tfrac{1}{2} P \cos\theta$$

unde colligimus

$$E \cos\zeta + F \cos\eta = \frac{M + Q + P \sin\theta - \delta P \cos\theta}{2(1 + \delta\delta)}$$

$$E \sin\zeta - F \sin\eta = \frac{M\delta + Q\delta + P\delta \sin\theta + P \cos\theta}{2(1 + \delta\delta)}$$

hincque porro

$$E = \frac{M(\sin\eta + \delta\cos\eta) + Q(\sin\eta + \delta\cos\eta) + P(\sin\eta + \delta\cos\eta)\sin\theta + P(\cos\eta - \delta\sin\eta)\cos\theta}{2(1+\delta\delta)\sin(\zeta+\eta)}$$

$$F = \frac{(M + Q + P\sin\theta)(\sin\zeta - \delta\cos\zeta) - P(\cos\zeta + \delta\sin\zeta)\cos\theta}{2(1+\delta\delta)\sin(\zeta+\eta)}.$$

Praeterea vero, quia motum uniformem desideramus, momenta virium respectu axis gyrationis se destruere debent. Est autem momentum accelerans $= Pr$, et momenta opposita $= 2\delta (E + F) f + Qs$, unde necesse est sit $Pr = 2\delta (E + F) f + Qs$, ideoque

$$Pr - Qs = \frac{\delta(M + Q + P\sin\theta)(\sin\zeta + \sin\eta - \delta\cos\zeta + \delta\cos\eta) + \delta P(\cos\eta - \cos\zeta - \delta\sin\eta - \delta\sin\zeta)\cos\theta}{(1+\delta\delta)\sin(\zeta+\eta)} f$$

hincque vim sollicitantem P definire licet.

Quodsi jam ponamus terminos cylindricos in cavitatibus circularibus sustineri, ut contactus unico loco fiat, ubi scilicet tangens ad horizontem inclinetur angulo $= \zeta$: erit $F = 0$, ideoque

$$(M + Q + P\sin\theta - \delta P\cos\theta)\tan\zeta = \delta(M + Q + P\sin\theta) + P\cos\theta$$

et

et $E = \frac{M+Q+P\,sin\theta-\delta P\,cos\theta}{2(1+\delta\delta)\,cos\zeta}$.

Inde colligitur $P = \frac{(M+Q)(\delta-tang\,\zeta)}{(sin\theta-\delta cos\theta)\,tang\,\zeta-cos\theta-\delta sin\theta}$

quo valore in postrema aequatione, quae fit $Pr - Qs = 2\delta Ef$, substituto prodet

$$(M+Q)\,\delta f\,cos\theta = (M+Q)\,r\,(sin\zeta-\delta\,cos\zeta) + Qs\,((sin\theta-\delta\,cos\theta)\,sin\zeta-(cos\theta+\delta\,sin\theta)\,cos\zeta)$$

ubi si ponamus $\delta = tang\,\lambda$, haec aequatio erit

$$(M+Q)\,f\,sin\lambda\,cos\theta = (M+Q)\,r\,sin(\zeta-\lambda) - Qs\,cos(\zeta+\theta-\lambda)$$

unde angulus ζ erui debet, quo invento erit

$$P = \frac{(M+Q)\,f\,sin(\zeta-\lambda)}{cos(\zeta+\theta-\lambda)}$$

seu $P = \frac{Qs}{r} + \frac{(M+Q)\,f\,sin\lambda\,cos\theta}{r\,cos(\zeta+\theta-\lambda)}$.

COROLL. 1.

1012. Si terminus cylindricus unico loco incumbat in alveolo cavo, pro P substituto valore prodit pressio in eo loco $E = \frac{(M+Q)\,cos\theta}{2(1+\delta\delta)\,cos\lambda\,cos(\zeta+\theta-\lambda)} = \frac{(M+Q)\,cos\lambda\,cos\theta}{2\,cos(\zeta+\theta-\lambda)}$ posito $\delta = tang\,\lambda$. Haec ergo pressio evanescit casu $cos\,\theta = 0$, nisi simul fiat $cos(\zeta+\theta-\lambda) = 0$.

COROLL. 2.

1013. Posito autem $\theta = 90°$, erit

$$(M+Q)\,r\,sin(\zeta-\lambda) + Qs\,sin(\zeta-\lambda) = 0$$

quo ergo casu fit $\zeta = \lambda$ seu $tang\,\zeta = \delta$, et $P = \frac{Qs}{r} + \frac{(M+Q)\,f\,sin\lambda}{r}$.

8. Cum autem sit $E = \frac{M+Q+P}{2(1+\delta\delta)\,cos\lambda}$, erit $Pr - Qs = \frac{\delta(M+Q+P)\,f}{(1+\delta\delta)\,cos\lambda}$

$= (M+Q+P)\,f\,sin\lambda$ et $P = \frac{Qs+(M+Q)\,f\,sin\lambda}{r-f\,sin\lambda}$.

CO-

Digitized by Google

COROLL. 3.

1014. Si ponamus $\theta = -90°$, primo ob $F = 0$ habemus
$(M+Q-P)\,tang\,\zeta = \delta\,(M+Q-P)$
tum vero cum sit $E = \frac{M+Q-P}{2(1+\delta\delta)cos\zeta}$, erit
$$Pr - Qs = \frac{\delta f(M+Q-P)}{(1+\delta\delta)cos\zeta}.$$
Quare si capiatur $P = M+Q$, pressio ideoque et frictio evanescit, sumique oportet $r = \frac{Qs}{M+Q}$.

COROLL. 4.

1015. Nisi autem hoc casu $\theta = -90°$ statuatur $P = M+Q$, erit $tang\,\zeta = \delta$, et $Pr - Qs = \frac{\delta f(M+Q-P)}{r(1+\delta\delta)} = f(M+Q-P)\,ff\lambda$ hinc-que $P = \frac{Qs+(M+Q)ff\lambda}{r+ff\lambda}$. At r ita sumi oportet, ut valor ipsius E ne fiat negativus. Hoc enim casu sustentatio ex opposito fieret, ibique frictio oriretur.

SCHOLION. 1.

1016. Hoc ergo modo frictio penitus tolli posset, vim P ita applicando, ut cum pondere corporis M et onere Q aequilibrium constituat. Verum hic casus in praxi parum utilitatis haberet, quia termini cylindrici intra alveos suos, quos ipsis ampliores esse oportet, hinc inde vacillarent, quo incommodo motus magis quam frictione impediretur. Deinde vero pleraeque hujus generis machinae ita disponi solent, ut vis sollicitans P multo sit minor quam onus elevandum Q, ideoque multo magis $P < M+Q$. Si enim vim oneri aequalem impendere velimus, negotium sine machina absolvi posset, unde non mirum hoc casu frictionis lucrum obtineri posse. Ac si vis P pro data sumatur, ex nostris formulis elicitur r, pro loco applicationis: unde si celeritas angularis machinae sit $= \varepsilon$, onus elevabitur celeritate εs, vis vero sollicitans aget celeritate $= \varepsilon r$. Nisi ergo frictio motum impediret, foret $Per = Qes$, nunc autem ob frictionem erit $Per - Qes = 2\delta\varepsilon Ef$: ubi observari convenit, denotare Per actionem vis sollicitantis, Qes vero quantitatem effectus uno minuto secundo producti, cum er et

es

Digitized by Google

si fiat spatia uno minuto secundo confecta. Verum haec ad Theoriam machinarum sunt referenda, quam seorsim pertractari convenit.

SCHOLION. 2.

1017. Si vis sollicitans P cum angulo θ fuerit data, quaeraturque distantia applicationis seu longitudo vectis $GR = r$, ex prima aequatione statim colligitur angulus ζ seu punctum E, ubi in cavitate fiet contactus, scilicet:

$$tang\,\zeta = \frac{\delta(M+Q+P\,sin\,\theta)+P\,cos\,\theta}{M+Q+P\,sin\,\theta-\delta P\,cos\,\theta};$$

ad quem cognoscendum statuantur duo anguli λ et ξ ut sit

$$tang\,\lambda = \delta \text{ et } tang\,\xi = \frac{P\,cos\,\theta}{M+Q+P\,sin\,\theta}$$

eritque $tang\,\zeta = \frac{tang\,\lambda + tang\,\xi}{1 - tang\,\lambda\,tang\,\xi}$ ideoque $\zeta = \lambda + \xi$.

Unde patet fore $\zeta > \lambda$, si $cos\,\theta > 0$, hoc est, si recta GR sursum vergat, sin autem deorsum dirigatur, fore $\zeta < \lambda$, quo casu fieri potest, ut contactus fiat in infimo puncto, si scilicet fuerit $P = \frac{\delta(M+Q)}{-cos\,\theta - \delta\,sin\,\theta}$.

Tum vero habebitur pressio $E = \frac{(M+Q+P\,sin\,\theta-\delta P\,cos\,\theta)\,cos\,\lambda^2}{2\,cos\,(\lambda+\xi)}$ seu

$$E = \frac{P\,cos\,\lambda\,cos\,\theta}{2\,sin\,\xi} = \tfrac{1}{2}\,cos\,\lambda\,r\,((M+Q)^2 + 2P\,(M+Q)\,sin\,\theta + PP)$$

hincque tandem concluditur longitudo vectis

$$GR = r = \frac{Qs}{P} + \frac{f\,sin\,\lambda}{P}\,r\,((M+Q)^2 + 2P\,(M+Q)\,sin\,\theta + PP).$$

Ut igitur pro eadem vi sollicitante P pressio E ideoque et frictio fiat minima, angulum θ esse oportet $= -90°$, seu vectem GR in ipso radio GS capi convenit, quo casu fit, ut jam vidimus, $\xi = 0$, hincque $\zeta = \lambda$, et $E = \frac{1}{2}\,(M+Q-P)\,cos\,\lambda$

atque $GR = r = \frac{Qs}{P} + \frac{f(M+Q-P)\,sin\,\lambda}{P}$.

Investigemus nunc etiam motum penduli, terminis cylindricis simili modo suspensi, qui scilicet utrinque binis planis inclinatis incumbant:

et quia hic motus est reciprocus, ista plana aequaliter ad horizontem inclinata statui conveniet.

PROBLEMA 9.

1018. Si pendulum oscilletur circa axem horizontalem fixum, cujus termini cylindrici utrinque binis planis aequaliter inclinatis incumbant, definire ejus motum ob frictionem perturbatum.

SOLUTIO.

Fig. 135. Sit AEBF basis alterius termini cylindrici, qui incumbat planis ML et NL ad horizontem inclinatis angulo $= \zeta$ erunt puncta contactus in E et F, ut radii GE et GF cum verticali ABLH angulos constituant $= \zeta$, quae omnia ad alteram partem perinde se habeant, ut axis gyrationis sit recta horizontalis GG. Sit porro penduli forma utrinque sibi similis, ac jam elapso tempore t declinet penduli centrum inertiae I a situ verticali angulo $HGI = \varphi$, unde ad situm verticalem accedat celeritate angulari $= u$, ita ut motus gyratorius fiat in sensum EBF. Sit massa tota idemque pondus penduli $= M$, distantia $GI = b$, et momentum inertiae ejus respectu axis gyrationis $GG = Mkk$. Quod ergo ad actionem gravitatis attinet, totum pondus M in puncto I collectum concipere licet.

Ponatur jam terminorum cylindricorum radius $GE = GF = f$, sintque vires, quibus ii a planis sustentantur, secundum $EG = E$ et secundum $GF = F$: unde frictiones erunt secundum $EM = \delta E$, et secundum $FL = \delta F$.

Ex his autem viribus ut supra §. 1005. ubi $\eta = \zeta$ nascuntur primo vis verticalis sursum tendens $= (E+F)\cos\zeta + \delta(E-F)\sin\zeta$ et vis horizontalis dextrorsum directa $= (E-F)\sin\zeta - \delta(E+F)\cos\zeta$. Pondus autem praebet vim deorsum tendentem $= M$.

Unde pro motu progressivo seu motu centri inertiae I *habemus primo* vim verticaliter deorsum directam:

$$M - 2(E+F)\cos\zeta - 2\delta(E-F)\sin\zeta = P$$

et vim dextrorsum tendentem horizontalem

$$2(E-F)\sin\zeta - 2\delta(E+F)\cos\zeta = Q.$$

Motus autem hujus, cum celeritas centri inertiae sit $= bu$, celeritas verticalis deorsum tendens est $= bu\sin\varphi$ et celeritas horizontalis dextrorsum directa $= bu\cos\varphi$, unde colligimus:

$$\frac{bdu\sin\varphi + bud\varphi\cos\varphi}{2gdt} = \frac{P}{M} \text{ et } \frac{bdu\cos\varphi - bud\varphi\sin\varphi}{2gdt} = \frac{Q}{M}$$

ubi

ubi est $udt = -d\varphi$. Deinde cum corpus circa axem fixum GG gyretur, cujus respectu est momentum virium ad accelerandum $= M b \sin\varphi - 2\delta (E + F) f$, erit

$$\frac{'du}{2g\,dt} = \frac{Mb\sin\varphi - 2\delta(E+F)f}{Mkk}.$$

Qui valor si in illis substituatur, habebimus

$$\frac{Mbb\sin\varphi^2 - 2\delta(E+F)fb\sin\varphi}{Mkk} - \frac{buu\cos\varphi}{2g} = \frac{P}{M}$$

$$\frac{Mbb\sin\varphi\cos\varphi - 2\delta(E+F)fb\cos\varphi}{Mkk} + \frac{buu\sin\varphi}{2g} = \frac{Q}{M}$$

hincque

$$\frac{Mbb\sin\varphi - 2\delta(E+F)fb}{Mkk} = \frac{P\sin\varphi + Q\cos\varphi}{M} \text{ et}$$

$$\frac{buu}{2g} = \frac{Q\sin\varphi - P\cos\varphi}{M},$$

ex quibus quantitatibus pressiones E et F definiri debent.
Cum autem sit $P + \delta Q = M - 2(1 + \delta\delta)(E + F)\cos\zeta$, erit

$$M - 2(1+\delta\delta)(E+F)\cos\zeta = \frac{Mbb\sin\varphi(\sin\varphi + \delta\cos\varphi) - 2\delta(F+F)fb(\sin\varphi + \delta\cos\varphi)}{kk}$$

$$- \frac{Mbuu(\cos\varphi - \delta\sin\varphi)}{2g}$$

hincque

$$2(E+F)((1+\delta\delta)\,kk\cos\zeta - \delta fb(\sin\varphi + \delta\cos\varphi) =$$

$$Mkk - Mbb\sin\varphi(\sin\varphi + \delta\cos\varphi) + \frac{Mbkkuu(\cos\varphi - \delta\sin\varphi)}{2g}$$

unde valor ipsius E + F substitutus praebet

$$\frac{du}{2g\,dt} = \frac{(1+\delta\delta)b\cos\zeta\sin\varphi - \delta f - \frac{\delta fbuu(\cos\varphi - \delta\sin\varphi)}{2g}}{(1+\delta\delta)kk\cos\zeta - \delta fb(\sin\varphi + \delta\cos\varphi)}$$

ex qua aequatione motus penduli ope formulae $udt = -d\varphi$ determinari potest.

COROLL. 1.

1019. De pressione in E nullum est dubium, quin ea fiat positiva; sed pressio in F sequenti modo determinatur.

$$2F((1+\delta\delta)\,si\,2\zeta+\frac{2\delta fb}{kk}\,cos\,\zeta\,cos\,\varphi-\frac{2\delta\delta fb}{kk}\,cos\,\zeta\,si\,\varphi)=$$

$$M(si\,\zeta-\delta\,cos\,\zeta+\frac{\delta fb}{kk}\,cos\,\varphi)-\frac{Mbbsi\varphi}{kk}(cos(\zeta-\varphi)+\delta si(\zeta-\varphi))$$

$$+\frac{Mbuu}{2g}(si(\zeta-\varphi)-\delta\,cos(\zeta-\varphi)+\frac{\delta fb}{kk}\,cos\,2\varphi)$$

unde valor ipsius F positivus prodire debet, quod fit, dum fuerit $tang\,\zeta > \delta$ existente φ angulo parvo.

COROLL. 2.

1020. Si frictio esset nulla seu $\delta = 0$, foret $\frac{du}{2g\,dt} = \frac{b\,si\,\varphi}{kk}$, unde motus pendulorum supra definitus facile eruitur, pro pressionibus autem E et F haberemus has aequationes:

$$2(E+F)\,kk\,cos\,\zeta = M(kk-bb\,si\,\varphi^2+\frac{bkkuu\,cos\,\varphi}{2g})$$

$$et\ 2Fkk\,si\,2\zeta = M(kk\,si\,\zeta-bb\,si\,\varphi\,cos(\zeta-\varphi)+\frac{bkkuu\,si(\zeta-\varphi)}{2g})$$

$$et\ 2Ekk\,si\,2\zeta = M(kk\,si\,\zeta+bb\,si\,\varphi\,cos(\zeta+\varphi)+\frac{bkkuu\,si(\zeta+\varphi)}{2g})$$

quarum utraque ut sit positiva debet esse:

$$tang\,\zeta > \frac{2gbb\,si\,\varphi\,cos\,\varphi+bkkuu\,si\,\varphi}{2gkk-2gbb\,si\,\varphi^2+bkkuu\,cos\,\varphi}$$

ubi notandum est, esse $kk > bb$.

COROLL. 3.

1021. Aequatio differentialis inventa ob $dt = \frac{-d\varphi}{u}$ abit in hanc formam

$$0 = udu((1+\delta\delta)\,kk\,cos\,\zeta-\delta fb(si\,\varphi+\delta\,cos\,\varphi))-\delta fb\,uu\,d\varphi\,(cos\,\varphi-\delta\,si\,\varphi)$$

+2

Digitized by Google

$$+ 2(1 + \delta\delta) gb\, d\varphi \cos\zeta \sin\varphi - 2\delta f g\, d\varphi$$

quae per $(1 + \delta\delta) kk \cos\zeta - \delta f b (\sin\varphi + \delta\cos\varphi)$ multiplicata fit integrabilis, proditque

$$C = xx((1 + \delta\delta) kk \cos\zeta - \delta f b (\sin\varphi + \delta\cos\varphi))^2$$
$$+ 4gf d\varphi ((1 + \delta\delta) b \cos\zeta \sin\varphi - \delta f)((1 + \delta\delta) kk \cos\zeta - \delta f b (\sin\varphi + \delta\cos\varphi)).$$

SCHOLION.

1022. Si hoc integrale evolvamus, reperiemus

$$C = xx((1 + \delta\delta) kk \cos\zeta^2 - \delta f b (\sin\varphi + \delta\cos\varphi))^2 - 4(1 + \delta\delta)^2 gbkk \cos\zeta^2 \cos\varphi$$
$$- \delta(1 + \delta\delta) fgbb \cos\zeta (2\varphi - \sin 2\varphi - \delta\cos 2\varphi) - 4\delta(1 + \delta\delta) fgkk \varphi \cos\zeta$$
$$- 4\delta\delta ffgb (\cos\varphi - \zeta \sin\varphi).$$

Quare si sumamus angulum HGI initio fuisse $= \theta$, indeque pendulum a quiete descensum inchoasse, constans C ita definitur, ut sit

$$C = -4(1 + \delta\delta)^2 gbkk \cos\zeta^2 \cos\theta - \zeta(1 + \delta\delta) fgbb \cos\zeta (2\theta - \sin 2\theta - \delta\cos 2\theta)$$
$$- 4\delta(1 + \delta\delta) fgkk \theta \cos\zeta - 4\delta\delta ffgb (\cos\theta - \delta\sin\theta)$$

quo valore substituto pendulum ex altera parte eousque ascendet, donec iterum fiat $y = 0$. Verum hanc determinationem in genere suscipere haud licet, Neque vero ipsum problema in latissimo sensu resolvimus, ut ad omnia cujuscunque formae pendula pateret, sed primo assumsimus, binos terminos cylindricos utrinque a centro gravitatis aeque esse remotos: deinde etiam talem structuram statuimus, ut recta per centrum inertiae I axi gyrationis GG parallela ducta simul esset corporis axis principalis. Quae conditio nisi locum haberet, non licuisset momenta virium statim ad axem gyrationis GG transferre, sed etiam ratio habenda fuisset virium obliquarum, quae in terminis axis GG inaequales pressiones produxissent, ideoque formulae multo magis intricatae prodiissent. Ut igitur hinc quicquam ad usum concludamus, statuamus oscillationes esse minimas, et quomodo earum motus a frictione perturbetur, diligentius investigemus.

PROBLEMA 10.

1023. Si pendulum eò modo suspensum, uti in problemate praecedente assumsimus, oscillationes peragat quam minimas, earum motum a frictione perturbatum determinare. Fig. 135.

SOLUTIO.

Maneant omnia uti in problemate praecedente conſtituimus, ac ſi initio pendulum ad angulum HGI $= \theta$ fuerit declinatum, unde deſcenſum ex quiete inchoaverit, elapſo autem tempore t angulus HGI ſit $= \varphi$, et celeritas angularis in ſenſum IH $= \omega$, in praeſenti hypotheſi anguli θ et φ erunt minimi, qui ergo loco ſinuum et coſinuum ita introducantur, ut eorum poteſtates quadrato altiores rejiciantur. Hinc aequatio integralis §. praec. eruta induet hanc formam:

$$C = \omega\omega\,((1+\delta\delta)\,kk\,\mathrm{cof}\,\zeta - \delta f b\,(\varphi + \delta - \tfrac{1}{3}\delta\varphi\varphi))^2 - 4(1+\delta\delta)^2\,gbkk\,\mathrm{cof}\,\zeta^2\,(1-\tfrac{1}{2}\varphi\varphi) + \delta\delta\,(1+\delta\delta)\,fghb\,\mathrm{cof}\,\zeta\,(1-\varphi\varphi 2) - 4\delta\,(1+\delta\delta)\,fgkk\,\varphi\,\mathrm{cof}\,\zeta - 4\,\delta\delta\,ffgb\,(1-\delta\varphi-\tfrac{1}{2}\varphi\varphi)$$

ubi conſtans $C = -4\,(1+\delta\delta)^2\,gbkk\,\mathrm{cof}\,\zeta^2\,(1-\tfrac{1}{2}\theta\theta) + \delta\delta\,(1+\delta\delta)\,fgbb\,\mathrm{cof}\,\zeta\,(1-2\theta\theta) - 4\delta\,(1+\delta\delta)\,fgkk\,\theta\,\mathrm{cof}\,\zeta - 4\delta\delta\,ffgb\,(1-\zeta\theta-\tfrac{1}{2}\theta\theta)$.

Hac igitur aequatione evoluta obtinebimus:

$$\omega\omega\,((1+\delta\delta)\,kk\,\mathrm{cof}\,\zeta - \delta\delta fb)^2 = 2gb\,((1+\delta\delta)^2\,kk\,\mathrm{cof}\,\zeta^2 - \delta\delta\,(1+\delta\delta)\,fb\,\mathrm{cof}\,\zeta + \delta\delta\,ff)\,(\theta\theta-\varphi\varphi) - 4\delta fg\,((1+\delta\delta)\,kk\,\mathrm{cof}\,\zeta - \delta\delta fb)\,(\theta-\varphi)$$

ubi in coefficiente ipſius $\omega\omega$ angulum φ neglexi, quia in evolutione perducturus eſſet ad altiores poteſtates. Ad hanc aequationem reſolvendam ſtatuamus brevitatis gratia:

$$(1+\delta\delta)\,kk\,\mathrm{cof}\,\zeta - \delta\delta fb = A$$
$$(1+\delta\delta)^2\,kk\,\mathrm{cof}\,\zeta^2 - \delta\delta\,(1+\delta\delta)\,fb\,\mathrm{cof}\,\zeta + \delta\delta\,ff = B$$

ut ſit

$$AA\,\omega\omega = 2Bgb\,(\theta\theta-\varphi\varphi) - 4A\delta fg\,(\theta-\varphi)$$

unde ponendo $\omega = 0$ invenimus, quousque pendulum ſit aſcenſurum, donec iterum ad quietem perducatur. Diviſione autem per $2g\,(\theta-\varphi)$ inſtituta oritur

$$Bb\,(\theta+\varphi) - 2A\delta f = 0$$

hincque $\varphi = -\theta + \dfrac{2A\delta f}{Bb}$, ſeu ad alteram partem ultra H tantum per angulum $\theta - \dfrac{2A\delta f}{Bb}$ aſcendet.

Porro ad durationem hujus oſcillationis inveſtigandam, cum ſit $\omega = \dfrac{r\,(2Bgb\,(\theta\theta-\varphi\varphi)-4A\delta fg\,(\theta-\varphi))}{A} = \dfrac{-d\varphi}{dt}$, erit

dt

Digitized by Google

$$ds = \frac{-2Ad\varphi}{r(2Bgh(\theta\theta-\varphi\varphi)-4A\delta fg(\theta-\varphi))} \text{ seu}$$

$$ds = \frac{-Ad\varphi}{r2g(\theta-\varphi)(Bh(\theta+\varphi)-2A\delta f)}$$

unde integrando colligitur:

$$t = \frac{A}{r2Bgh}. \text{ Arc. } cos \frac{Bh-\varphi A\delta f}{Bh\theta-A\delta f}.$$

Statuatur nunc $\varphi = -\theta + \frac{2A\delta f}{Bh}$ seu $Bh\varphi - A\delta f = -Bh\theta + A\delta f$, erit tempus oscillationis integrae $= \frac{\pi A}{r2Bgh}$; quod ergo non pendet ab amplitudine oscillationis, ita ut omnes oscillationes minimae maneant isochronae perinde ac si nulla frictio adesset. Sed non pari tempore absolventur. Quantum autem frictio tempus cujusque oscillationis turbet, quaeratur valor $\frac{A}{rB}$, ubi si crassitiem terminorum cylindricorum seu f ut minimam spectamus, est $\frac{J}{rB} = \frac{J}{(1+\delta\delta)k\,cos\zeta} + \frac{\delta\delta fh}{2(1+\delta\delta)^2k^3\,cos\zeta^2}$ ideoque $\frac{A}{rB} = k - \frac{\delta\delta fh}{2(1+\delta\delta)k\,cos\zeta}$: quare tempus unius oscillationis $= \frac{\pi}{r2gh}\left(k - \frac{\delta\delta fh}{2(1+\delta\delta)k\,cos\zeta}\right)$, unde patet, ob frictionem tempora oscillationum minui.

COROLL. 1.

1024. Si radius terminorum cylindricorum f sit valde exiguus prae quantitatibus h et k, erit proxime $B = A(1+\delta\delta)\,cos\zeta$. Hinc si primus arcus defcensus sit $= \theta$, erit sequens arcus ascensus $= \theta - \frac{2\delta f}{(1+\delta\delta)h\,cos\zeta}$, qui simul est arcus descensus in secunda oscillatione.

CO-

Digitized by Google

COROLL. 2.

1025. Oscillationes ergo successivae sequenti modo se habebunt:

In Oscillatione	arcus descensus	arcus ascensus	totus arcus
prima	θ	$\theta - \frac{2\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$	$2\theta - \frac{2\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$
secunda	$\theta - \frac{2\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$	$\theta - \frac{4\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$	$2\theta - \frac{6\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$
tertia	$\theta - \frac{4\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$	$\theta - \frac{6\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$	$2\theta - \frac{10\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$
quarta	$\theta - \frac{6\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$	$\theta - \frac{8\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$	$2\theta - \frac{14\delta f}{(1+\delta\delta)b\cos\zeta}$

COROLL. 3.

1026. Oscillationes tamdiu durabunt, quamdiu arcus ascensuum manent positivi. Statim enimque ac vel evanescunt, vel adeo negativi evadunt, motus omnis cessat. Atque ut motus oriatur, necesse est, ut sit $\theta > \frac{A\delta f}{Bb}$, si enim fuerit $\theta =$ vel $< \frac{A\delta f}{Bb}$ pendulum ob frictionem plane in quiete coercetur, etsi teneat situm inclinatum.

COROLL. 4.

1027. Ut ergo pendulum saltem unam oscillationem peragat, debet esse $\theta > \frac{A\delta f}{Bb}$ existente $\frac{A}{B} = \frac{1}{(1+\delta\delta)\cos\zeta}$: ut duas peragat oscillationes, debet esse $\theta > \frac{3A\delta f}{Bb}$: ut tres, debet esse $\theta > \frac{5A\delta f}{Bb}$, atque in genere, ut peragat n oscillationes, debet esse $\theta > \frac{(2n-1)A\delta f}{Bb}$. Verum hic numerum n majorem assumere non licet, quam ut angulus θ adhuc satis parvus maneat.

SCHOLION 1.

1028. Quod ad diminutionem temporis oscillationum singularum attinet, notasse juvabit, significare $\frac{kk}{b}$ distantiam centri oscillationis ab axe

axe gyrationis, quae si ponatur $= l$, erit tempus unius oscillationis $= \frac{\pi r l}{r 2g}(1 - \frac{\delta\delta f}{2(1+\delta\delta)\cos\zeta})$. Hic autem primum observetur, capi debere *tang* $\zeta > \delta$, ut axis GG in loco suo maneat immotus. Quare si fuerit $l = 3$ pedum, quo casu pendulum, nisi frictio obstaret, fere singulis minutis secundis oscillationes absolveret; axiculorum autem radius sit $f = \frac{1}{100}$ pedis, tum vero sumatur $\delta = \frac{1}{3}$ et $\zeta = 20°$, fiet tempus unius oscillationis $= \frac{\pi r l}{r 2g}(1 - \frac{1}{28191})$, ita ut ob frictionem demum post 28191 oscillationes peractas seu post 8 fere horas error unius minuti secundi producatur. Hoc eodem casu ut pendulum n oscillationes peragere possit, antequam ad quietem redigatur, debet esse $\theta > \frac{2n-1}{4698}$. seu $\theta > 4, 3905\,(2n-1)$ min. sec. Quare si 100 oscillationes absolvere debeat, primum sumi debet $\theta > 874''$ seu $\theta > 14', 34''$. Quod si ergo θ capiatur $= 5°$, pendulum peraget oscillationes 2050, antequam ad quietem redigetur. Si f sit major vel minor quam $\frac{1}{100}$, effectus frictionis in eadem ratione major vel minor evadet.

SCHOLION. 2.

1029. Cum jam determinaverimus motum corporum circa axem fixum, ad alias motus species progrediamur, quibus corpus, dum movetur, ad superficiem quandam atteritur. Hic igitur praecipue figura corporis, quatenus successive aliae atque aliae partes superficiei applicantur, spectari debet: ubi quidem primo ejusmodi corpora occurrunt, quae unico tantum puncto eodemque perpetuo superficiem tangunt. Hic scilicet est casus turbinum in cuspidem desinentium, qua continuo superficiei insistunt, quorum motum, quantum ob frictionem cuspidis perturbetur, definiri conveniet. Deinde occurrunt corpora, quae unico quidem puncto perpetuo superficiem tangunt, quod autem jugiter varietur, quemadmodum fit, si globi aliave corpora sphaeroidica super quadam superficie moveantur, ac praeter motum progressivum motu gyratorio quocunque ferantur. His casibus ad effectum frictionis cognoscendum directio motus, quo punctum contactus superficiem terit, quovis momento est spectanda, quippe cui directio vis frictionis est contraria. Sequuntur casus, quibus corpus eadem quidem basi superficiem perpetuo tangit, uti fit in motu progressivo, sed ubi corpus simul gyratur circa axem ad basin normalem, ita ut ipsa basis super-

superficie in gyrum agatur. Porro progrediamur ad motus corporum cylindricorum super planis superficiebus, ubi contactus perpetuo fit secundum lineam rectam, ex cujus motu et appressione frictio est definienda. Quae autem corpora figuram ejusmodi habent, angulosam, ut dum moventur, aliae atque aliae hedrae superficiei applicentur, quoniam conflictus talem motum comitatur, dum nova hedra ad contactum pertingit, eorum motus hic nondum evolvere licet, sed prius ratio conflictus explicari debet. Secundum hanc ergo divisionem motum turbinum in cuspidem desinentium super plano horizontali determinare aggrediamur.

CAPUT IV.

DE MOTU TURBINUM IN CUSPIDEM DESINENTIUM SUPER PLANO HORIZONTALI FRICTIONIS HABITA RATIONE.

PROBLEMA II.

Fig. 136. 1030. Si turbo super plano horizontali moveatur utcunque, deturque singulis momentis ejus pressio in planum, definire frictionem motumque turbinis progressivum.

SOLUTIO.

Repraesentet tabula planum horizontale, super quo turbo incedit, cujus axis transiens per centrum inertiae et cuspidem nunc elapso tempore t situm teneat AIF, ut I sit centrum inertiae in sublimi situm, F vero cuspis, qua fit contactus in plano horizontali; voceturque intervallum $IF = f$, quod est constans. Ex I in planum demittatur perpendiculum IG, et sumta in plano recta directrice OV ad fixam mundi plagam spectante, ad eam ex G et F ducantur normales GX et FZ, itemque per G recta KL ipsi OV parallela. Ponatur angulus $FIG = \varrho$, qui exprimit declinationem axis turbinis AF a situ verticali: et angulus $KGH = \Phi$, qui praebet declinationem plani verticalis, in quo jam axis turbinis versatur, a plano verticali super OV vel LK erecto.

Digitized by Google

cto. Erit ergo $GI = f \cos\varrho$ et $GF = f \sin\varrho$: tum vero $GN = f \sin\varrho \cos\varphi$ et $FN = f \sin\varrho \sin\varphi$. Praeterea vero sit $OX = x$, et $XG = y$; unde pro puncto F fit $OZ = x - f \sin\varrho \cos\varphi$ et $ZF = y + f \sin\varrho \sin\varphi$: ex quibus motus cuspidis F colligi potest, cujus celeritas secundum directionem OV vel NG est $= \frac{dx - f\,d.\sin\varrho\cos\varphi}{dt}$, et celeritas secundum directionem NF $= \frac{dy + f\,d.\sin\varrho\sin\varphi}{dt}$: quarum utraque nisi evanescat, cuspis F super plano movebitur frictionemque excitabit; ad cujus directionem inveniendam, sit Ff directio secundum quam cuspis progreditur, quae retro in L producta dabit directionem frictionis FL, pro qua ponatur angulus $FLG = \omega$ eritque $tang\,\omega = \frac{dy + f\,d.\sin\varrho\sin\varphi}{dx - f\,d.\sin\varrho\cos\varphi}$. Sit jam pressio, quam cuspis in planum exerit $= \Pi$, pondere totius turbinis existente $= M$, atque ob frictionem turbo in F sollicitatur secundum directionem FL vi $= \partial\Pi$, quae resoluta dat vim sec. $XO = \partial\Pi \cos\omega$ et sec. $FZ = \partial\Pi \sin\omega$. Ad motum ergo progressivum centri inertiae I definiendum, praeter has vires frictionis, ei applicata concipiatur vis deorsum urgens secundum IG, $= M - \Pi$, ac principia motus suppeditabunt has ternas aequationes:

$$\frac{ddx}{2g\,dt^2} = \frac{-\partial\Pi\cos\omega}{M}; \quad \frac{ddy}{2g\,dt^2} = \frac{-\partial\Pi\sin\omega}{M}$$

$$\text{et } \frac{f\,dd.\cos\varrho}{2g\,dt^2} = -1 + \frac{\Pi}{M}$$

unde statim colligimus $ddx \sin\omega = ddy \cos\omega$. Ex his aequationibus, si anguli ϱ et ω ad tempus t ut cogniti spectentur, inde primo $\frac{\Pi}{M}$ tum vero differentialia dx et dy determinantur; ex iisque tandem angulus φ ex formula $tang\,\omega = \frac{dy + f\,d.\sin\varrho\sin\varphi}{dx - f\,d.\sin\varrho\cos\varphi}$.

COROLL. 1.

1031. Si pro $\frac{\Pi}{M}$ valor inventus per ϱ substituatur, pro quantitatibus x et y determinandis habebimus has aequationes differentiales secundi gradus.

Digitized by Google

$$ddx = -2\partial g dt^2 \cos\omega - df \cos\omega\, dd.\cos\varrho$$
$$ddy = -2\partial g dt^2 \sin\omega - df \sin\omega\, dd.\cos\varrho.$$

COROLL. 2.

1032. Pro directione frictionis FL, ratione rectae FH, cum sit angulus LGF $= \varphi$ et angulus FLG $= \omega$, erit angulus GFL $= 180° - \varphi - \omega$; ipsa autem frictio est $= \partial\Pi$: nisi sit celeritas cuspidis F nulla, quo casu frictio subito evanescit: id quod evenit, si fuerit $dx = fd.\sin\varrho\cos\varphi$ et $dy = -fd.\sin\varrho\sin\varphi$.

SCHOLION.

1033. Ex his aequationibus nihil adhuc concludere licet, cum relatio variabilium ω et Π seu ϱ ad tempus t nondum constet, quae demum ex motu gyratorio erui debet. Iis autem inventis, per formulas hic traditas variabiles x et y, sicque motus progressivus centri inertiae I definiri poterit. Quamobrem angulum ω in determinationem motus gyratorii introducamus, etiamsi ejus relatio ad angulos ϱ, φ et tempus assignari possit. Cum enim sit

$$dy\cos\omega + f\cos\omega\, d.\sin\varrho\sin\varphi - dx\sin\omega + f\sin\omega\, d.\sin\varrho\cos\varphi = 0$$

quo x et y facilius elidere queamus, ponamus

$$f\cos\omega\, d.\sin\varrho\sin\varphi + f\sin\omega\, d.\sin\varrho\cos\varphi = sdt$$

ut fit $dy\cos\omega - dx\sin\omega + sdt = 0$;

quae aequatio differentiata ob $ddy\cos\omega = ddx\sin\omega$ dat

$$-dy\sin\omega - dx\cos\omega + \frac{ds\,dt}{d\omega} = 0.$$

Differentietur porro, et ob $ddy\sin\omega + ddx\cos\omega = \frac{-2\partial g\Pi dt^2}{M}$ prodit

$$\frac{2\partial g\Pi dt^2}{M} - dy\,d\omega\cos\omega + dx\,d\omega\sin\omega + dt\,d.\frac{ds}{d\omega} = 0;$$

addatur prima per $d\omega$ multiplicata, fietque per dt dividendo

$$\frac{2\partial g\Pi dt}{M} + sd\omega + d.\frac{ds}{d\omega} = 0,$$

qua aequatione relatio inter s, ω, Π et t exprimitur, quae forte in sequentibus usum habebit. Involvit autem s angulos ϱ, φ et ω, estque $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fdd.\cos\varrho}{2gdt^2}$, ita ut hic adhuc insint quatuor variabiles ϱ, φ, ω et t.

PRO-

Digitized by Google

PROBLEMA 12.

1034. Dum turbo utcunque super plano horizontali movetur, et frictionem patitur, determinare virium, quibus sollicitatur, momenta respectu axium principalium turbinis.

SOLUTIO

In sphaera centro inertiae turbinis I descripta repraesentet circulus GZH planum verticale, in quo jam axis turbinis per centrum inertiae I et cuspidem F ductus AIF versetur, qui simul sit axis principalis turbinis, ejusque respectu momentum inertiae $= Maa$, bini reliqui vero axes principales ex I ad sphaerae puncta B et C pertingant, quorum respectu sint momenta inertiae aequalia $= Mcc$, ita ut in formulis nostris generalibus sit $bb = cc$ quemadmodum jam supra assumsimus. Posito Z puncto sphaerae verticali, erit arcus $ZA = \varrho$, ponamus autem ductis arcubus ZB et ZC, ut supra $ZA = l$, $ZB = m$, et $ZC = n$, ut sit $\varrho = l$. His positis vires, quibus turbo sollicitatur, sunt primo ejus pondus $= M$, quae vis centro inertiae I applicata nulla praebet momenta; deinde adest pressio, qua planum horizontale in cuspidem F reagit, cujus directio est verticalis sursum directa FΠ, quae vis sit $= \Pi$, vidimusque esse $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{fdd.\cos\varrho}{2gdt^2}$. Denique sollicitatur turbo in F a frictione $= \int\Pi$, nisi cuspis quiescat, cujus directio FL est horizontalis: ac pro ejus situ ducatur circulus maximus horizontalis GΛH, in quo capiatur secundum §. 1032. arcus $H\Lambda = 180° - \varphi - \omega$ seu $G\Lambda = \varphi + \omega$, ubi φ denotat declinationem plani GZH a plano quodam verticali fixo; angulus ω autem ex formulis in praecedente problemate traditis definiri debet: eritque directio FL radio IΛ parallela. Iam ad virium harum momenta respectu axium principalium investiganda; primum ipsae vires secundum directiones horum axium resolvantur, quem in finem ut in centro inertiae applicatae considerentur. Vis ergo $F\Pi = \Pi$, in directione IZ applicata praebet vim sec. $IA = \Pi \cos ZA = \Pi \cos l$; vim sec. $IB = \Pi \cos ZB = \Pi \cos m$ et vim sec. $IC = \Pi \cos ZC = \Pi \cos n$. Deinde vis $FL = \int\Pi$ in IΛ applicata resolvitur in vires 1° sec. $I\Lambda = \int\Pi \cos A\Lambda$, 2° sec. $IB = \int\Pi \cos B\Lambda$, 3° sec. $IC = \int\Pi \cos C\Lambda$. Ad has autem evolvendas sit ZX ille circulus verticalis fixus, ideoque angulus $XZA = \varphi$, ponamus autem ut supra angulos $XZA = \lambda$, $XZB = \mu$ et $XZC = \nu$, ut sit $\varphi = \lambda$, et ob $AZ\lambda = 180° - \lambda - \omega$, erit $XZ\Lambda = 180° - \omega$, hincque $BZ\Lambda = \mu + \omega - 180°$, et $CZ\Lambda = 180° - \nu - \omega$, unde ob ZΛ quadrantem prodit $\cos A\Lambda = -\sin l \cos(\lambda + \omega)$,

Fig. 137.

$\cos BA = -\sin m \cos(\mu + \omega)$ et $\cos CA = -\sin n \cos(\nu + \omega)$. Quocirca habebimus

$$\text{vim sec. } IA = \Pi \cos l - \delta\Pi \sin l \cos(\lambda + \omega)$$
$$\text{vim sec. } IB = \Pi \cos m - \delta\Pi \sin m \cos(\mu + \omega)$$
$$\text{vim sec. } IC = \Pi \cos n - \delta\Pi \sin n \cos(\nu + \omega)$$

has autem vires nunc in puncto F applicatas concipi oportet, existente $IF = f$: unde momenta earum respectu axium principalium, quae supra litteris P, Q, R designavimus, concluduntur

$$P = 0,$$
$$Q = \Pi f \cos n - \delta f \Pi \sin n \cos(\nu + \omega)$$
$$R = -\Pi f \cos m + \delta\Pi f \sin m \cos(\mu + \omega).$$

PROBLEMA. 13.

1035. His virium momentis inventis exhibere aequationes, quibus motus turbinis super plano horizontali incedentis et a frictione perturbatus, contineatur.

SOLUTIO.

Fig. 137. Primo pro motu gyratorio teneat elapso tempore t turbo situm in figura repraesentatum, ubi omnes denominationes modo factae maneant. Ac nunc gyretur turbo circa axem IO in sensum ABC celeritate angulari $= \varkappa$, pro puncto O autem sint arcus $AO = \alpha$, $BO = \beta$, $CO = \gamma$, ponaturque

$$\varkappa \cos\alpha = x, \quad \varkappa \cos\beta = y, \quad \varkappa \cos\gamma = z,$$

quae quantitates per momenta modo inventa ita determinantur, ut primo sit $dx = 0$, ideoque $x = \text{const.}$ Ponatur ergo $x = b$, et pro y et z has habebimus aequationes

$$dy + \frac{(aa - cc)}{cc} bzdt = \frac{2\Pi fgdt}{Mcc}(\cos n - \delta \sin n \cos(\nu + \omega))$$

$$dz - \frac{(aa - cc)}{cc} bydt = \frac{-2\Pi fgdt}{Mcc}(\cos m - \delta \sin m \cos(\mu + \omega)).$$

Tum vero pro arcubus l, m, n itemque angulis λ, μ, ν ostendimus esse:

$$dl \sin l = dt\,(y \cos n - z \cos m); \quad d\lambda \sin l^2 = -dt\,(y \cos m + z \cos n)$$

dm

$dm \, si \, m = dt \, (z \, cos \, l - b \, cos \, n)$; $d\mu \, si \, m^2 = - dt \, (z \, cos \, n + b \, cos \, l)$
$dn \, si \, n = dt \, (b \, cos \, m - y \, cos \, l)$; $d\nu \, si \, n^2 = - dt \, (b \, cos \, l + y \, cos \, m)$
ubi praeterea hae relationes sunt notandae:

$$cos \, (\mu - \lambda) = \frac{-cos \, l \, cos \, m}{si \, l \, si \, m}; \; cos \, (\nu - \lambda) = \frac{-cos \, l \, cos \, n}{si \, l \, si \, n}$$

$$si \, (\mu - \lambda) = \frac{-cos \, n}{si \, i \, si \, m}; \; si \, (\nu - \lambda) = \frac{+cos \, m}{si \, l \, si \, n}$$

unde anguli μ et ν per λ ita definiuntur:

$$cos \, \mu = \frac{-cos \, \lambda \, cos \, l \, cos \, m + si \, \lambda \, cos \, n}{si \, l \, si \, m}; \; cos \, \nu = \frac{-cos \, \lambda \, cos \, l \, cos \, n - si \, \lambda \, cos \, m}{si \, l \, si \, n}$$

$$si \, \mu = \frac{-si \, \lambda \, cos \, l \, cos \, m - cos \, \lambda \, cos \, n}{si \, l \, si \, m}; \; si \, \nu = \frac{-si \, \lambda \, cos \, l \, cos \, n + cos \, \lambda \, cos \, m}{si \, l \, si \, n}.$$

Hicque est $\frac{\Pi}{M} = 1 + \frac{f dd. cos \, l}{2 g dt^2}$. At angulus ω ex motu progressivo est ingressus, pro quo si in fig. 136. ad situm centri inertiae I definiendum distinctionis causa vocemus coordinatas OX = X et XG = Y, existente GI = $f \, cos \, l$, ad superiores aequationes insuper has adjungere debemus:

$$\frac{ddX}{2 g dt^2} = \frac{-\delta \Pi}{M} cos \, \omega; \; \frac{ddY}{2 g dt^2} = \frac{-\delta \Pi}{M} si \, \omega$$

et $dY \, cos \, \omega - dX \, si \, \omega + f \, cos \, \omega \, d. si \, l \, si \, \lambda + f \, si \, \omega \, d. si \, l \, cos \, \lambda = 0$.
Atque in his aequationibus omnia, quae tam ad motum progressivum quam gyratorium spectant, determinantur. Si primo quantitates X et Y e calculo excludere velimus, loco harum trium postremarum aequationum sequentem unicam adhibuisse sufficit: pro qua si ponatur

$$s dt = f \, cos \, \omega \, d. si \, l \, si \, \lambda + f \, si \, \omega \, d. si \, l \, cos \, \lambda$$

seu sumtis his differentialibus locoque dl et $d\lambda$ valoribus superioribus substitutis erit

$$s = -f y \, si \, n \, si \, (\omega + \nu) + f z \, si \, m \, si \, (\omega + \mu)$$

et aequatio loco illarum trium usurpanda supra inventa est

$$\frac{2 \delta g \Pi dt}{M} + s d\omega + d. \frac{ds}{d\omega} = 0.$$

SCHOLION. I.

1036. Multitudo harum aequationum, praecipue autem angulus ω primas aequationes ingrediens in causa est, quod earum resolutionem nullo modo suscipere liceat. Unde patet motum turbinum ob frictionem maxime fore perturbatum, ita ut ex his aequationibus nihil omnino,

omnino, unde hic motus cognosci posset, concludere valeamus. Quodsi vero hujus motus causas obiter tantum contemplemur, evidens est centrum inertiae I non in recta tantum verticali, ut remota frictione eveniebat, ascendere vel descendere, sed etiam motum horizontalem adipisci, qui oritur a vi frictionis, cujus directio cum sit contraria motui cuspidis, motus centri inertiae secundum eandem directionem incitatur, unde neque uniformis neque rectilineus erit, et quatenus incurvatur, ejus convexitas in eam regionem spectabit, in quam cuspis progreditur. Simili modo etiam motus gyratorius tam ratione celeritatis quam ratione axis gyrationis maxime perturbabitur, de quo vix quicquam ex consideratione frictionis affirmare licet.

SCHOLION. 2.

1037. Verum haec tanta motus perturbatio tamdiu duntaxat durat, donec frictio cessat, hoc autem tandem evenire debere per se est evidens, quandoquidem motus ob frictionem continuo retardatur. At frictio cessare nequit, nisi cuspis turbinis in eodem loco persistat, ex quo necesse est motum ita temperari debere, ut cuspis tandem in eodem plani puncto sit perseveraturus, dummodo hoc eveniat, antequam turbo procumbat. Si enim turbini primo motus gyratorius nimis tardus fuerit impressus, nullum est dubium, quin procumbat, antequam illud phaenomenon oriatur: ex quo vicissim concludere licet, si motus satis fuerit celer, fore, ut antequam turbo procumbat, cuspis a frictione ad idem plani horizontalis punctum redigatur. Quod cum evenerit, atque in turbine adhuc motus insit gyratorius, ex superioribus patet, axem turbinis verticalem esse debere; si enim esset inclinatus, nullo modo ita gyrari posset, ut cuspis eidem puncto insisteret. Ex his igitur conjunctis hanc conclusionem deducimus: turbinem, si modo ei satis celer motus gyratorius fuerit impressus, ob frictionem se tandem in situm verticalem erigere, et tum circa axem verticalem motum gyratorium esse continuaturum. Quod phaenomenon eo magis est notatu dignum, quod soli frictioni debeatur; ita, ut ope frictionis linea verticalis, ideoque etiam planum horizontale obtineri queat; id quod in navigatione magnum usum habere potest, ad quem etiam in Anglia olim fuit commendatum.

CAPUT

Digitized by Google

CAPUT V.

DE MOTU GLOBORUM, CENTRUM INERTIAE IN IPSORUM CENTRO SITUM HABENTIUM, SUPER PLANO HORIZONTALI.

PROBLEMA. 14.

1038. Si globus super plano horizontali utcunque tam motu progressivo quam gyratorio moveatur, determinare celeritatem et directionem, qua punctum contactus radit superficiem horizontalem.

SOLUTIO.

Sit I centrum simulque centrum inertiae globi, ejusque radius $= f$, et contactus fiet in puncto imo T. Motus autem globi ita sit comparatus, ut centrum inertiae moveatur secundum directionem PIR celeritate $= v$, simul vero gyretur circa axem quemcunque IO celeritate angulari $= u$, in eum sensum, ut punctum T circa O incedat per arculum Tt, ac pro positione puncti O statuamus angulum PTO $= \theta$ et arcum TO $= s$, ubi quidem arcus ita sumo, quasi radius globi esset $= 1$. Ducatur TV ipsi PIR parallela, ac si motus gyratorius abesset, punctum contactus T rasurum esset planum horizontale celeritate $= v$ in directione TV. Deinde si globus solo motu gyratorio ferretur, quia punctum T per Tt moveretur celeritate $= fu \sin TO = fu \sin s$, cujus directio cum sit horizontalis, in plano per rectam T⊖ referatur, ita ut sit angulus ST⊖ $=$ PT$t = \theta - 90°$ ob OTt rectum. Erit ergo VT⊖ $= 270° - \theta$. Capiantur rectae TV $= v$ et T⊖ $= fu \sin s$, et quia punctum T his duobus motibus conjunctim movetur, ejus verus motus fiet secundum rectam TF diagonalem parallelogrammi TVF⊖. Ex F ad TV ducta normali FH, erit VH $= fu \sin s \sin \theta$ et FH $= -fu \sin s \cos \theta$, unde fit TH $= v - fu \sin s \sin \theta$ atque celeritas radens TF $= \sqrt{(vv - 2fuv \sin s \sin \theta + ffuu \sin s^2)}$

Fig. 138.

$$\text{et } tang \text{ VTF} = \frac{-fu \sin s \cos \theta}{v - fu \sin s \sin \theta}$$

Ducatur ex centro I ipsi TF parallela IQ, erit arcus TQ quadrans, et

Digitized by Google

angulus RTQ = VTF. Quare si IQ sit directioni, secundum quam punctum T radit, parallela, erit

$$tang\ PTQ = \frac{f\varkappa \sin s \cos\theta}{v - f\varkappa \sin s \sin\theta},$$

ac posita celeritate radente $\sqrt{(vv - 2f\varkappa v \sin s \sin\theta + ff\varkappa\varkappa \sin s^2)} = u$ erit

$$\sin PTQ = \frac{-f\varkappa \sin s \cos\theta}{u} \text{ et } \cos PTQ = \frac{f\varkappa \sin s \sin\theta - v}{u}.$$

COROLL. 1.

1039. Fieri ergo potest, ut celeritas radens ideoque et attritus evanescat, quo casu hae duae conditiones locum habere debent, altera $\varkappa \sin s \cos\theta = 0$, altera $v = f\varkappa \sin s \sin\theta$. Unde statim patet, si *nullus* adsit motus progressivus, seu $v = 0$, nullum attritum affore, si $\sin s = 0$, *hoc* est si globus circa axem verticalem ZT gyretur.

COROLL. 2.

1040. Deinde motus globi ab attritu erit liber, si fuerit primo $\cos\theta = 0$, seu angulus PTO rectus: deinde celeritas progressiva v ad angularem $\varkappa$ hanc relationem tenere debet, ut sit $v = f\varkappa \sin s$, seu TV = TΘ, et angulus STΘ = 0.

COROLL. 3.

1041. Quando ergo globus hujusmodi motum est consecutus, quia sublato omni attritu etiam nulla adest frictio, globus eundem motum constanter conservabit, siquidem axis gyrationis IO habeat proprietatem axis principalis.

SCHOLION. 1.

1042. Quemadmodum hic frictionem *constituimus*, ea non obstat, quominus globus super plano horizontali motum suum intemeratum conservare possit, quod tamen minime fieri observamus, cum globus super tabula tali motu latus mox omnem motum amittat, cujus rei causa resistentiae aeris tribui nequit. Verum hic primum animadverto, experimenta nunquam Theoriae perfectissime congruere: veluti dum casu hic tractato assumsimus, contactum unico fieri puncto, id semper in praxi secus evenit. Interim tamen si arcus TO est quadrans et PTO = 90°, existente $v = f\varkappa$, tametsi contactus non fiat in uno

Digitized by Google

uno puncto, tamen attritus evanescit, ideoque hic motus extinctio neutiquam frictioni adscribi potest. Ex quo concludere debemus, praeter frictionem, uti hic eam definivimus, aliud adhuc dari motus impedimentum, dum corpora super superficiebus incedunt, a frictione probe distinguendum, cujus ratio utcunque fuerit comparata, ejus effectus potius seorsim investigari convenit, quam frictionis indolem hic stabilitam immutari. Et quemadmodum hic a resistentia aeris mentem abstrahimus, ita etiam licebit hoc obstaculum frictionem concomitans a praesenti argumento sejungere.

SCHOLION. 2.

1043. Corpora hic sphaerica considero, in quorum centro situm sit ipsorum centrum inertiae I, quod ergo ipsum etiam in plano horizontali moveatur, et puncto contactus T perpetuo verticaliter immineat. Ex quo patet, pressionem in contactu semper fore ponderi corporis M aequalem. Si ergo corpus ex materia uniformi constaret, omnes ejus diametri proprietate axium principalium gauderent, sed concipiamus materiae distributionem utcunque inaequabilem, ita tamen ut centrum inertiae cadat in centrum figurae: Quare necesse erit in globo ternos axes principales considerari, qui ex centro I pertingant in puncta A, B, C, quadrantibus a se invicem distantia, quorum respectu sit, ut supra posuimus, momenta inertiae Maa, Mbb, Mcc. Quanquam autem deinceps bina vel omnia haec momenta inter se aequalia statuemus, tamen conveniet hujusmodi tria puncta in superficie fixa notasse, quo ex eorum relatione ad spatium absolutum, facilius motus globi definiri possit. Constitutis autem in globo his tribus punctis A, B, C, quoniam motus gyrationis circa O, quem in plagam Tt dirigi assumsimus, sensum habet CBA contrarium ei, quem supra statuimus, in applicatione formularum generalium ad hunc casum celeritatem angularem δ ut negativam spectare debemus.

PROBLEMA. 15.

1044. Si globus super plano horizontali utcunque moveatur, definire vires, quibus sollicitatur, earumque momenta respectu trium axium principalium globi.

SOLUTIO.

Inclusus concipiatur globus sphaerae vel fixae vel cum eo parem motum progressivum habenti, in qua Z sit punctum verticale ejusque Fig. 139.

Digitized by Google

oppositum T punctum contactus, DE vero sit diameter horizontalis ad certam mundi plagam tendens, et DPQE circulus maximus horizontalis. Nunc autem elapso tempore t, moveatur globus motu progressivo secundum directionem PI celeritate $= v$, ponaturque arcus DP seu angulus DZP $= \varphi$; axes autem principales nunc sint in A, B, C. Tum vero globus jam gyretur circa axem IO, celeritate angulari $= \varkappa$ in sensum ACB: sitque pro situ puncti O angulus PTO seu PZO $= \theta$, et arcus ZO $= s$. Etsi enim ante arcum TO posuimus $= s$, quia tantum ejus sinus in computum intrat, perinde est. Erit ergo angulus DZO $= \theta + \varphi$, et EZO $= 180° - \theta - \varphi$. Deinde si a punctis A, B, C tam ad O quam ad Z arcus circulorum magnorum ducti concipiantur, sint ut hactenus arcus AO $= \alpha$, BO $= \beta$, CO $= \gamma$; ZA $= l$, ZB $= m$, ZC $= n$, et anguli EZA $= \lambda$, EZB $= \mu$, EZC $= \nu$. *In praecedente autem problemate ostendimus, punctum contactus T planum subjectum radere secundum directionem radio IQ parallelam celeritate* $= \sqrt{(vv - 2f\varkappa v \sin s \sin\theta + ff \sin s^2)}$, foreque

$$\tang \text{PTQ} = \tang \text{PZQ} = \frac{f\varkappa \sin s \cos\theta}{v - f\varkappa \sin s \sin\theta}.$$

denotante f radium globi. Cum igitur pressio in T sit $= M$, frictio erit $= \delta M$, quae puncto T est applicata secundum directionem ipsi QI parallelam. Hac ergo vi resoluta secundum directiones axium principalium IA, IB, IC, prodit vis sec. IA $= -\delta M \cos$ AQ; vis sec. IB $= -\delta M \cos$ BQ, et vis sec. IC $= -\delta M \cos$ CQ, quae ternae vires in puncto T applicatae sunt concipiendae, unde colliguntur momenta

Resp. axis IA in sensum BC $= -\delta M f \cos$ CQ $\cos$ BT $+ \delta M f \cos$ BQ $\cos$ CT $=$ P

Resp. axis IB in sensum CA $= -\delta M f \cos$ AQ $\cos$ CT $+ \delta M f \cos$ CQ $\cos$ AT $=$ Q

Resp. axis IC in sensum AB $= -\delta M f \cos$ BQ $\cos$ AT $+ \delta M f \cos$ AQ $\cos$ BT $=$ R.

Erunt ergo haec tria momenta:

$$P = \delta M f (\cos m \cos \text{CQ} - \cos n \cos \text{BQ})$$
$$Q = \delta M f (\cos n \cos \text{AQ} - \cos l \cos \text{CQ})$$
$$R = \delta M f (\cos l \cos \text{BQ} - \cos m \cos \text{AQ}).$$

Pro puncto autem Q ponamus angulum PZQ $= \xi$ ut sit $\tang \xi = \dfrac{f\varkappa \sin s \cos\theta}{v - f\varkappa \sin s \sin\theta}$ et posita celeritate radente $\sqrt{(vv - 2f\varkappa v \sin s \sin\theta + ff\varkappa\varkappa \sin s^2)}$

$= u$,

$= u$, erit $\sin \xi = \frac{-f x \sin s \cos \theta}{u}$ et $\cos \xi = \frac{f x \sin s \sin \theta - v}{u}$.

Fit ergo $DZQ = \varphi + \xi$ et $EZQ = 180° - \xi - \varphi$; hincque
$AZQ = 180° - \xi - \varphi - \lambda$; $BZQ = \mu + \xi + \varphi - 180°$;
$CZQ = 180° - \xi - \varphi - \nu$
ergo $\cos AQ = -\cos(\xi + \varphi + \lambda) \sin l$
$\cos BQ = -\cos(\xi + \varphi + \mu) \sin m$
$\cos CQ = -\cos(\xi + \varphi + \nu) \sin n$.
Ex relatione igitur, quae inter angulos λ, μ et ν intercedit, concludemus momenta virium:
$P = \partial M f \sin l \sin(\lambda + \varphi + \xi)$
$Q = \partial M f \sin m \sin(\mu + \varphi + \xi)$
$R = \partial M f \sin n \sin(\nu + \varphi + \xi)$.

PROBLEMA. 16.

1045. Si motum gyratorium ad quodvis tempus ut datum ſpectemus, definire motum progreſſivum globi.

SOLUTIO.

Quia centrum globi in plano horizontali movetur, deſcripſerit id tempore t lineam GI, quae referatur ad diretricem GX ſuperiori directioni fixae DE parallelam, ductaque IX ad GX normali, ſint coordinatae $GX = X$, $XI = Y$. Per I ducatur recta DE ipſi GX parallela, quae erit ipſa diameter DE in fig. 139. Ducatur IP, ut ſit $DIP = EIR = \varphi$ et centrum I per hypotheſin progreditur in directione IR celeritate $= v$, ita ut ſit celeritas ſecundum $GX = v \cos \varphi$ et celeritas ſecundum $XI = v \sin \varphi$, ideoque $dX = vdt \cos \varphi$ et $dY = vdt \sin \varphi$. Ducatur recta QIS, ut IQ ſit directioni, qua punctum contactus radit parallela, erit angulus $EIQ = DIS = 180° - \xi - \varphi$, eſt enim aequalis angulo EZQ in praec. figura, unde globus ſollicitari conſendus eſt vi $= \partial M$ in directione IS. Hinc ergo oritur vis ſecundum $ID = -\partial M \cos(\xi + \varphi)$ et vis ſecundum $XI = \partial M \sin(\xi + \varphi)$. Ex quibus colligitur Fig. 140.

$$\frac{d.v\cos\varphi}{2gdt} = \frac{dv\cos\varphi - vd\varphi\sin\varphi}{2gdt} = \partial\cos(\xi+\varphi)$$

$$\frac{d.v\sin\varphi}{2gdt} = \frac{dv\sin\varphi + vd\varphi\cos\varphi}{2gdt} = \partial\sin(\xi+\varphi)$$

Digitized by Google

hincque porro

$$\frac{dv}{2g\,dt} = \vartheta \cos\xi \text{ et } \frac{v\,d\varphi}{2g\,dt} = \vartheta \sin\xi$$

ita ut sit $\frac{v\,d\varphi}{dv} = \tan\xi = \frac{f\varkappa \sin s \cos\theta}{v - f\varkappa \sin s \sin\theta}$.

PROBLEMA 17.

1046. Definito motu progressivo globi, determinare ejus motum gyratorium.

SOLUTIO.

Fig. 139. Spectetur nunc centrum globi I ut quiescens, et maneant omnes denominationes in probl. 15. adhibitae, sintque Maa, Mbb, Mcc momenta inertiae respectu axium principalium IA, IB, IC, quae primo ut inaequalia consideremus. Quoniam vero hic celeritatem angularem $\varkappa$ ut negativam spectare debemus, quia tendit in sensum ACB, si ponamus $\varkappa \cos\alpha = x$, $\varkappa \cos\beta = y$, et $\varkappa \cos\gamma = z$, in formulis generalibus has literas x, y, z negative sumi oportet, ex §. 810. habebimus has aequationes motum determinantes,

$$dx + \frac{bb-cc}{aa}\,yz\,dt + \frac{2\vartheta f g}{aa}\,dt \sin l \sin(\lambda + \varphi + \xi) = 0$$

$$dy + \frac{cc-aa}{bb}\,xz\,dt + \frac{2\vartheta f g}{bb}\,dt \sin m \sin(\mu + \varphi + \xi) = 0.$$

$$dz + \frac{aa-bb}{cc}\,xy\,dt + \frac{2\vartheta f g}{cc}\,dt \sin n \sin(\nu + \varphi + \xi) = 0$$

$dl \sin l = dt\,(z\cos m - y\cos n)$; $d\lambda \sin l^2 = dt\,(y\cos m + z\cos n)$
$dm \sin m = dt\,(x\cos n - z\cos l)$; $d\mu \sin m^2 = dt\,(z\cos n + x\cos l)$
$dn \sin n = dt\,(y\cos l - x\cos m)$; $d\nu \sin n^2 = dt\,(x\cos l + y\cos m)$.

Tum vero ex motu progressivo habemus:

$$dv = 2\vartheta g\,dt\cos\xi;\quad v\,d\varphi = 2\vartheta g\,dt\sin\xi$$

et $\tan\xi = \frac{f\varkappa \sin s \cos\theta}{v - f\varkappa \sin s \sin\theta}$.

Ubi est PZO $= \theta$ et ZO $= s$. Cum ergo sit EZO $= 180° - \vartheta - \varphi$: erit AZO $= 180° - \lambda - \theta - \varphi$: hincque

cos

$$\cos\alpha = \cos l \cos s - \sin l \sin s \cos(\lambda + \theta + \varphi)$$
$$\cos\beta = \cos m \cos s - \sin m \sin s \cos(\mu + \theta + \varphi)$$
$$\cos\gamma = \cos n \cos s - \sin n \sin s \cos(\nu + \theta + \varphi)$$

existente $\cos s = \cos l \cos\alpha + \cos m \cos\beta + \cos n \cos\gamma$

unde sequitur fore

$$\sin l \cos l \cos(\lambda + \theta + \varphi) + \sin m \cos m \cos(\mu + \theta + \varphi) + \sin n \cos n \cos(\nu + \theta + \varphi) = 0.$$

Ponamus $v \cos s = p$ et $v \sin s = q$, ut sit $\tang \xi = \frac{fq\cos\theta}{v - fq\sin\theta} = \frac{v\,d\varphi}{dv}$; eritque

$$x = p\cos l - q \sin l \cos(\lambda + \theta + \varphi)$$
$$y = p\cos m - q \sin m \cos(\mu + \theta + \varphi)$$
$$z = p\cos n - q \sin n \cos(\nu + \theta + \varphi)$$

ex quibus valoribus fit

$$dl = qdt \sin(\lambda + \theta + \varphi);\quad d\lambda = pdt + qdt \cot l \cos(\lambda + \theta + \varphi)$$
$$dm = qdt \sin(\mu + \theta + \varphi);\quad d\mu = pdt + qdt \cot m \cos(\mu + \theta + \varphi)$$
$$dn = qdt \sin(\nu + \theta + \varphi);\quad d\nu = pdt + qdt \cot n \cos(\nu + \theta + \varphi)$$

indeque porro

$$dx = dp\cos l - dq \sin l \cos(\lambda + \theta + \varphi) + q(d\theta + d\varphi) \sin l \sin(\lambda + \theta + \varphi)$$
$$dy = dp\cos m - dq \sin m \cos(\mu + \theta + \varphi) + q(d\theta + d\varphi) \sin m \sin(\mu + \theta + \varphi)$$
$$dz = dp\cos n - dq \sin n \cos(\nu + \theta + \varphi) + q(d\theta + d\varphi) \sin n \sin(\nu + \theta + \varphi).$$

At sine subsidio harum substitutionum ex aequationibus ternis primis, cum in genere sit $\sin l \cos l \sin(\lambda + A) + \sin m \cos m \sin(\mu + A) + \sin n \cos n \sin(\nu + A) = 0$, elicimus hanc aequationem

$$aadx \cos l + bbdy \cos m + ccdz \cos n - aaxdl \sin l - bbydm \sin m - cczdn \sin n = 0$$

cujus integrale est

$$aax \cos l + bby \cos m + ccz \cos n = C$$

quae adhibitis substitutionibus abit in hanc formam:

$$p(aa\cos l^2 + bb\cos m^2 + cc\cos n^2) - q(aa \sin l \cos l \cos(\lambda + \theta + \varphi) + bb \sin m \cos m \cos(\mu + \theta + \varphi) + cc \sin n \cos n \cos(\nu + \theta + \varphi)) = \text{Const.}$$

Deinde

Deinde etiam per reductiones §. 934, traditas pro vi viva colligitur haec aequatio differentialis

$$aaxdx + bbydy + cczdz = 2\partial fgqdt\, \mathfrak{f}(\xi - \theta).$$

SCHOLION.

1047. Ad reductiones hic factas intelligendas ex formulis supra traditis, ubi angulos μ et ν per λ, l, m, n expressimus, notari convenit fieri:

$$\cos(\mu + \theta + \varphi) = \frac{-\cos l \cos m \cos(\lambda+\theta+\varphi) + \cos n\, \mathfrak{f}(\lambda+\theta+\varphi)}{\mathfrak{f} l \mathfrak{f} m}$$

$$\cos(\nu + \theta + \varphi) = \frac{-\cos l \cos n \cos(\lambda+\theta+\varphi) - \cos m\, \mathfrak{f}(\lambda+\theta+\varphi)}{\mathfrak{f} l \mathfrak{f} n}$$

$$\mathfrak{f}(\mu + \theta + \varphi) = \frac{-\cos l \cos m\, \mathfrak{f}(\lambda+\theta+\varphi) - \cos n \cos(\lambda+\theta+\varphi)}{\mathfrak{f} l \mathfrak{f} m}$$

$$\mathfrak{f}(\nu + \theta + \varphi) = \frac{-\cos l \cos n\, \mathfrak{f}(\lambda+\theta+\varphi) + \cos m \cos(\lambda+\theta+\varphi)}{\mathfrak{f} l \mathfrak{f} n}.$$

Ac simili modo anguli $\mu + \varphi + \xi$ et $\nu + \varphi + \xi$ ad angulum $\lambda + \varphi + \xi$ revocari possunt. Deinde etiam pro sequentibus reductionibus haec forma imprimis est notanda

$$\mathfrak{f}(\mu + B)\cos(\nu + C) = \mathfrak{f}(\nu + B)\cos(\mu + C)$$

quae ob $\mathfrak{f} M \cos N = \frac{1}{2}\mathfrak{f}(M + N) + \frac{1}{2}\mathfrak{f}(M - N)$ reducitur ad $\mathfrak{f}(\mu - \nu)\cos(B - C)$; hocque modo reductionem pro aliis formulis instituendo, reperimus:

$$\mathfrak{f}(\mu + B)\cos(\nu + C) - \mathfrak{f}(\nu + B)\cos(\mu + C) = \mathfrak{f}(\mu - \nu)\cos(B - C)$$

$$\mathfrak{f}(\mu + B)\mathfrak{f}(\nu + B) - \mathfrak{f}(\nu + B)\mathfrak{f}(\mu + C) = -\mathfrak{f}(\mu - \nu)\mathfrak{f}(B - C)$$

$$\cos(\mu + B)\cos(\nu + C) - \cos(\nu + B)\cos(\mu + C) = -\mathfrak{f}(\mu - \nu)\mathfrak{f}(B - C)$$

ubi $\mathfrak{f}(\mu - \nu)$ per formulas usurpatas datur, est enim $\mathfrak{f}(\mu - \nu) = \frac{\cos l}{\mathfrak{f} m \mathfrak{f} n}$.

PROBLEMA 18.

1048. Si globus ex materia uniformi conflet; vel saltem ita fuerit comparatus, ut omnia momenta inertiae sint inter se aequalia, eique initio impressus fuerit motus quicunque, determinare ejus continuationem.

SO-

Digitized by Google

SOLUTIO.

Cum hic sit $aa = bb = cc$, seu momentum inertiae respectu omnium diametrorum $= Maa$, prima aequatio integrata praebet $aap =$ Const. unde p erit quantitas constans. Statuatur ergo $p = b$: et ternae aequationes differentiales priores induent has formas:

I. $-dq\,cos(\lambda+\theta+\varphi)+q(d\theta+d\varphi)\,sin(\lambda+\theta+\varphi)+\frac{2\delta fg}{aa}dt\,sin(\lambda+\varphi+\xi)=0$

II. $-dq\,cos(\mu+\theta+\varphi)+q(d\theta+d\varphi)\,sin(\mu+\theta+\varphi)+\frac{2\delta fg}{aa}dt\,sin(\mu+\varphi+\xi)=0$

III. $-dq\,cos(\nu+\theta+\varphi)+q(d\theta+d\varphi)\,sin(\nu+\theta+\varphi)+\frac{2\delta fg}{aa}dt\,sin(\nu+\varphi+\xi)=0$

quarum autem sufficit binas considerasse, quia inde jam nata est conclusio $p = b$. Iam per superiores reductiones binae posteriores ita combinentur:

II. $cos(\nu+\theta+\varphi)$ − III. $cos(\mu+\theta+\varphi)$ praebet

$$q(d\theta+d\varphi)\,sin(\mu-\nu)+\frac{2\delta fg}{aa}dt\,sin(\mu-\nu)\,cos(\xi-\theta)=0$$

seu $$q(d\theta+d\varphi)+\frac{2\delta fg}{aa}dt\,cos(\xi-\theta)=0$$

Deinde II. $sin(\nu+\theta+\varphi)$ − III. $sin(\mu+\theta+\varphi)$ dat

$$dq\,sin(\mu-\nu)-\frac{2\delta fg}{aa}dt\,sin(\mu-\nu)\,sin(\xi-\theta)=0$$

seu $$dq=\frac{2\delta fg}{aa}dt\,sin(\xi-\theta)$$

qui valor in ultima aequatione pro viribus vivis substitutus praebet $xdx+ydy+zdz=qdq$

hinc que $xx+yy+zz=uu=$ Const. $+qq=$ Const. $+uu\,sin\,s^2$ ita ut sit $uu\,cos\,s^2=$ const. ut jam invenimus ob $u\,cos\,s=p=b$. Hinc istas habemus aequationes a litteris l, m, n, λ, μ, ν immunes:

I. $q(d\theta + d\varphi) + \frac{2\delta f g}{aa} dt \cos(\xi - \theta) = 0$; II. $dq = \frac{2\delta f g}{aa} dt \sin(\xi - \theta)$

III. $du = 2\delta g dt \cos\xi$; IV. $v d\varphi = 2\delta g dt \sin\xi$

quibus adjungatur haec finita $tang\, \xi = \frac{fq\cos\theta}{v - fq\sin\theta}$, quae transformata in hanc $v\sin\xi - fq\cos(\xi - \theta) = 0$, differentietur

$$dv\sin\xi + vd\xi\cos\xi - fdq\cos(\xi-\theta) + fqd\xi\sin(\xi-\theta) - fqd\theta\sin(\xi-\theta) = 0.$$

Iam I. $\sin(\xi-\theta)$ + II. $\cos(\xi-\theta)$ dat

$$q(d\theta + d\varphi)\sin(\xi-\theta) + dq\cos(\xi-\theta) = 0$$

quae per f multiplicata illi addatur

$$dv\sin\xi + vd\xi\cos\xi + fq(d\xi + d\varphi)\sin(\xi-\theta) = 0.$$

Porro ob $\frac{dv}{vd\varphi} = \frac{\cos\xi}{\sin\xi}$, erit

$$v(d\varphi + d\xi)\cos\xi + fq(d\xi + d\varphi)\sin(\xi-\theta) = 0$$

seu $(d\varphi + d\xi)(v\cos\xi + fq\sin(\xi-\theta)) = 0$

quorum factorum finitus $v\cos\xi + fq\sin(\xi-\theta)$ evanescere nequit, ob $v\sin\xi - fq\cos(\xi-\theta) = 0$, sequeretur enim inde $v\cos\theta = 0$, et $fq\cos\theta = 0$; quod nonnisi casu $\theta = 90°$ locum habet. Relinquitur ergo ut sit $d\varphi + d\xi = 0$ ideoque $\varphi + \xi = Const.$

Hoc impetrato reliqua non difficulter expedientur; ad integrationes autem determinandas pro statu initiali $t = 0$, ponamus fuisse celeritatem progressivam $v = c$, ang. $\varphi = 0$; ang. PZO $= \theta = f$, arcum ZO $= s = \mathfrak{f}$; et celeritatem angularem $u = \varepsilon$ in sensum ACB; hinc que $p = h = u\cos s = \varepsilon\cos\mathfrak{f}$, et $q = \varepsilon\sin\mathfrak{f}$; porro $tang\, \xi = \frac{\varepsilon f\sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{h}}{c - \varepsilon f\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h}}$. Statuatur $\frac{\varepsilon f\sin\mathfrak{f}\cos\mathfrak{h}}{c - \varepsilon f\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h}} = tang\, \zeta$ ut fuerit initio $\xi = \zeta$, ac perpetuo erit $\xi + \varphi = \zeta$, ita ut angulus DZQ $= \zeta$ maneat constans. Quare cum sit $\xi = \zeta - \varphi$: erit $v\sin(\zeta - \varphi) = fq\cos(\zeta - \theta - \varphi)$. Supra autem invenimus:

$$\frac{dv\cos\varphi}{2gdt} = \delta\cos(\xi + \varphi) = \delta\cos\zeta; \text{ et } \frac{dv\sin\varphi}{2gdt} = \delta\sin(\xi + \varphi) = \delta\sin\zeta,$$

unde

unde integrando colligimus

$$v \cos\varphi = c + 2\delta g t \cos\zeta \text{ et } v \sin\varphi = 2\delta g t \sin\zeta$$

hincque $v = \sqrt{(cc + 4\delta cgt\cos\zeta + 4\delta\delta gg tt)}$ et $\tang\varphi = \frac{2\delta g t \sin\zeta}{c + 2\delta g t \cos\zeta}$

atque $\tang(\zeta - \varphi) = \frac{e\sin\zeta}{e\cos\zeta + 2\delta g t} = \frac{fq\cos\theta}{v - fq\sin\theta} = \tang\xi$.

Deinde ob $d\varphi = -d\xi$ binae priores aequationes abeunt in

$$\text{I. } q(d\xi - d\theta) = \frac{2\delta fg}{aa} dt \cos(\xi - \theta) \text{ ; II. } dq = \frac{2\delta fg}{aa} dt \sin(\xi - \theta),$$

quarum haec per illam divisa dat:

$\frac{dq}{q(d\xi - d\theta)} = \frac{\sin(\xi-\theta)}{\cos(\xi-\theta)}$, quae integrata dat $q\cos(\xi - \theta) = \text{Const.}$

ideoque $q\cos(\xi - \theta) = s\sin\zeta\cos(\zeta - \mathfrak{h})$, unde valor ipsius q in prima substitutus praebet:

$$\frac{s(d\xi - d\theta)\sin\zeta\cos(\zeta-\mathfrak{h})}{\cos(\xi-\theta)^2} = \frac{2\delta fg}{aa} dt, \text{ et integrando}$$

$$s\sin\zeta\cos(\zeta - \mathfrak{h})\tang(\xi-\theta) = C + \frac{2\delta fg}{aa} t,$$

ubi $C = s\sin\zeta\sin(\zeta - \mathfrak{h})$. At $\tang(\xi - \theta) = \tang(\zeta - \varphi - \theta)$

$= \frac{\tang(\zeta-\varphi) - \tang\theta}{1 + \tang\theta\tang(\zeta-\varphi)}$, et $\tang\theta = \frac{\tang\xi - \tang(\xi-\theta)}{1 + \tang\xi\tang(\xi-\theta)}$.

Sed per hypothesin est $s\sin\zeta = \frac{e\sin\zeta}{f\cos(\zeta-\mathfrak{h})}$; unde fit

$\tang(\xi - \theta) = \tang(\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta ffgt}{eaa\sin\zeta}$, at $\tang\xi = \frac{e\sin\zeta}{e\cos\zeta + 2\delta g t}$

hinque angulus θ facile determinatur: indeque $q = \frac{e\sin\zeta}{f\cos(\xi-\theta)}$.

Verum hic notari oportet, cum sit $\tang\zeta = \frac{sf\sin\zeta\cos\mathfrak{h}}{e - sf\sin\zeta\sin\mathfrak{h}}$, esse ut supra de angulo ξ ostendimus,

Digitized by Google

$$\sin\zeta = \frac{-\varepsilon f \sin f \cos\eta}{r(ee - 2e\cos f \sin f \sin\eta + \varepsilon\varepsilon ff \sin f^2)} \text{ et } \cos\zeta = \frac{-e + \varepsilon f \sin f \sin\eta}{r(ee - 2e\cos f \sin f \sin\eta + \varepsilon\varepsilon ff \sin f^2)}$$

$$\text{unde } \cos(\zeta - \eta) = \frac{-e\cos\eta}{r(ee - 2\varepsilon ef \sin f \sin\eta + \varepsilon\varepsilon ff \sin f^2)}.$$

His inventis cum sit $\omega \cos s = \varepsilon \cos f$ et $\omega \sin s = q$, erit $\omega = r(qq + \varepsilon\varepsilon \cos f^2)$ et $\tan g\, s = \frac{q}{\varepsilon \cos f}$. Sicque tam motus progressivus, quam ad quodvis tempus axis gyrationis O cum celeritate angulari ω poterit assignari, id quod ad motus cognitionem sufficit. Determinatio autem situs punctorum A, B, C ad quodvis tempus nimis est ardua, quam ut eam perficere liceat.

COROLL. 1.

1049. Cum sit celeritas angularis $\omega = \frac{\varepsilon \cos f}{\cos s}$, seu cosinui arcus SO reciproce proportionalis; sequitur, si polus gyrationis O initio fuerit in superiori hemisphaerio DZE, eum nunquam in inferius pervenire posse: in transitu enim per circulum horizontalem DE prodiret celeritas angularis ω infinita.

COROLL. 2.

1050. Ob eandem rationem, si polus gyrationis O initio fuerit in hemisphaerio inferiori DTE, is nunquam in superius ascendet. Sin autem initio fuerit in ipso circulo horizontali DE, perpetuo in eodem manebit. Scilicet si initio axis gyrationis fuerit horizontalis, perpetuo horizontalis manebit.

COROLL. 3.

1051. Si fuerit initio angulus DZO $= \eta$ rectus, fiet $\sin\zeta = 0$ et ob $\tan g\,(\zeta - \eta) = \frac{\varepsilon f \sin f - e \sin\eta}{e\cos\eta}$, erit etiam $\xi - \theta$ rectus. Sed ob $\tan g\, \xi = \frac{e \sin\zeta}{e\cos\zeta + 2\delta gt}$, angulus ξ evanescit, unde angulus $\theta =$ PZO prodit rectus. Simulatque igitur angulus PZO factus fuerit rectus, perpetuo rectus manebit.

CO-

Digitized by Google

COROLL. 4.

1052. Memorabilis est etiam proprietas, quod angulum $\xi + \varphi$ seu DZQ et in fig. 140. angulus DIQ sit constans. Recta enim QIS sibi perpetuo manebit parallela, et quia globus in motu progressivo sollicitatur vi constante δM secundum eandem directionem IS, curva ab eo descripta GI parabola sit necesse est.

SCHOLION. 1.

1053. Hic autem motus globi, uti nostris formulis est definitus, diutius non durat, quam revera frictio adest, seu planum horizontale in puncto contactus T raditur. Si enim eveniat, ut rasio cesset, seu celeritas radens in T evanescat, subito frictio evanescit, formulaeque inventae non amplius locum habent. Tum igitur globus motu tam progressivo, quam gyratorio uniformiter in directum progredietur, neque axis gyrationis ullam amplius mutationem patietur. Ac si statim initio motus globo impressus ita fuerit comparatus, ut frictio fuerit nulla, quod evenit, si tam $\varepsilon f \, si \, \mathfrak{f} \, cos \, \mathfrak{h} = 0$ quam $e = \varepsilon f \, si \, \mathfrak{f} \, si \, \mathfrak{h}$, deinceps etiam globus nullam frictionem sentiet, et statim ab initio motum progressivum uniformiter in directum prosequetur, simulque uniformiter circa eundem axem gyrabitur. Verum si corpori ab initio alius motus quicunque fuerit impressus, semper aliquo tempore elapso eo reducetur, ut frictio evanescat, indeque motum suum uniformiter prosequetur; quod memorabile temporis punctum in sequenti problemate investigabimus.

SCHOLION. 2.

1054. Quae in solutione problematis elicuimus, huc redeunt: Ex motu primum impresso habemus celeritatem motus progressivi $= e$ secundum directionem DI: ac si gyretur circa axem IO celeritate angulari ε in sensum ACB seu ZETD, qui sensus *antrorsum tendens* dici solet, fueritque arcus ZO $= \mathfrak{f}$ et angulus DZO $= \mathfrak{h}$: tum vero radius globi sit $= f$ ejusque momentum inertiae $=$ Maa respectu omnium diametrorum, existente M ejus massa: ex his datis colligitur celeritas radens in puncto contactus $= \sqrt{(ee - 2\varepsilon ef \, si \, \mathfrak{f} \, si \, \mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff \, si \, \mathfrak{f}^2)}$ quae si ponatur $= k$, quaeratur angulus ζ, ut sit $si \, \zeta = \frac{-\varepsilon f \, si \, \mathfrak{f} \, cos \, \mathfrak{h}}{k}$ et $cos \, \zeta = \frac{\varepsilon f \, si \, \mathfrak{f} \, si \, \mathfrak{h} - e}{k}$, qui sit DZQ $= \zeta$, eritque IQ directio motus radentis. Fig. 139.

Tum si elapso tempore t globi centrum proferatur celeritate v secundum directionem PI, et gyretur celeritate angulari $= u$ in sensum ZETD circa polum O, ponaturque DZP $= \varphi$, PZO $= \theta$, et ZO $= s$: invenimus primo: $tang\ \varphi = \frac{2\delta g t \sin\zeta}{e + 2\delta g t \cos\zeta}$ et celeritatem centri D $= \gamma\,(ee + 4\delta\delta egt\cos\zeta + 4\delta\delta ggtt)$, at celeritas radens etiamnum fiet in directione IQ, existente DZQ $= \zeta$: unde posito PZQ $= \xi$ erit $tang\ \xi = \frac{e\sin\zeta}{e\cos\zeta + 2\delta g t}$. Porro est $tang\,(\xi - \theta) = tang\,(\zeta - \eta) + \frac{2\delta ff g t}{eaa\sin\zeta}$ existente $tang\,(\zeta - \eta) = \frac{af\sin\varphi - e\sin\eta}{e\cos\eta}$, unde angulus θ innotescit, hincque ob DZO $= \varphi + \theta = \zeta - \xi + \theta$ concluditur $tang$ DZO $= tang\,(\varphi + \theta) = \frac{eaak\sin\varphi\sin\eta + 2\delta fgt(e - af\sin\varphi\sin\eta)}{eaak\sin\varphi\cos\eta - 2\delta ff g t\sin\varphi\cos\eta}$. Atque ex his tandem nacti sumus:

$$u\cos s = u\cos\varphi \text{ et } u\sin s = \frac{e\sin\zeta}{f\cos(\xi - \theta)}.$$

Denique pro celeritate radente secundum IQ, ea est $= \gamma\,(vv - 2uf v\sin s\sin\theta + uuff\sin s^2)$; quae si vocetur $= w$, supra ostendimus esse

$$\sin\xi = \frac{-uf\sin s\cos\theta}{w} \text{ et } \cos\xi = \frac{uf\sin s\sin\theta - v}{w},$$

unde u et s definiuntur. Sed pro situ punctorum A, B, C in globo fixorum ad quodvis tempus determinando formulae adeo fiunt intricatae, ut nihil inde concludi queat. Interim si pro puncto A vocetur ZA $= l$ et EZA $= \lambda$, ad has binas aequationes totum negotium reducitur:

$$\text{I. } dl = dt\,(u\sin\varphi\sin\sin(\eta + \lambda) - \frac{2\delta fgt}{aa}\cos(\zeta + \lambda))$$

$$\text{II. } d\lambda\sin l = udt\cos\varphi\sin l + dt\cos l\,(u\sin\varphi\cos(\eta + \lambda) + \frac{2\delta fgt}{aa}\sin(\zeta + \lambda))$$

quarum resolutio vereor ne frustra suscipiatur. Cum autem ad quodvis tempus axem gyrationis cum celeritate angulari assignare valeamus, quod ad motus cognitionem, qualis vulgo desideratur, sufficere potest, eo magis mirum videtur, quod motus singulorum globi punctorum quasi vires analyseos superet. Multo minus igitur de motu globorum,

Digitized by Google

rum, in quibus momenta inertiae non sunt aequalia, quicquam definire licebit.

PROBLEMA. 19.

1055. Si globo, cujus omnia momenta inertiae sunt inter se aequalia, motus quicunque fuerit impressus, assignare temporis punctum, ubi celeritas radens ideoque frictio evanescit, indeque globus motu uniformi progredi pergat.

SOLUTIO.

Supra §. 1039. vidimus, ut attritus evanescat, has duas requiri conditiones, alteram $\alpha \beta \gamma \cos\theta = 0$ alteram $v = f \alpha \beta \gamma \sin\theta$, seu in expressione $tang\ \xi = \frac{f \alpha \beta \gamma \cos\theta}{v - f \alpha \beta \gamma \sin\theta}$ tam numeratorem quam denominatorem simul evanescere debere. Cum autem invenerimus $tang\ \xi = \frac{e \sin\zeta}{e \cos\zeta + 2\delta g t}$, ubi numerator $e \sin\zeta$ est constans, si in illa formula numerator evanescit, necesse est denominator simul evanescat, quia alioquin aequalitas inter has duas fractiones subsistere nequit. Unde positio $\cos\theta = 0$ tempus quaesitum declarabit. Verum idem luculentius determinabimus, si ad quodvis tempus elapsum t celeritatem radentem w investigemus. Cum igitur ex formula $\sin\xi = \frac{-\alpha f \sin\gamma \cos\theta}{w}$ fit $w = \frac{-\alpha f \sin\gamma \cos\theta}{\sin\xi}$, quae expressio, ob $\alpha \sin\gamma = \frac{e \sin\zeta}{f \cos(\xi - \theta)}$, abit in $w = \frac{-e \sin\zeta \cos\theta}{\sin\xi \cos(\xi - \theta)}$; atque ob $\alpha = \xi - (\xi - \theta)$ in hanc $w = -e \sin\zeta\ (\cot\xi + tang\ (\xi - \theta))$, si hic pro $tang\ \xi$ et $tang\ (\xi - \theta)$ valores supra inventos substituamus, reperiemus:

$$w = -\left(e \cos\zeta + 2\delta g t + e \sin\zeta\ tang\ (\zeta - \mathfrak{h}) + \frac{2\delta f f g t}{a a}\right).$$

At $\cos\zeta + \sin\zeta\ tang\ (\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{\cos\mathfrak{h}}{\cos(\zeta - \mathfrak{h})}$, et $\cos(\zeta - \mathfrak{h}) = \frac{-e \cos\mathfrak{h}}{k}$, unde $e \cos\zeta + e \sin\zeta\ tang\ (\zeta - \mathfrak{h}) = -k$, ubi k denotat celeritatem radentem initialem. Quamobrem elapso tempore t habebimus celeritatem radentem $w = k - 2\delta g \left(1 + \frac{f f}{a a}\right) t$, ita ut ea labente tempore uniformiter

formiter decrescat. Tandem ergo certo evanescet, idque fiet elapso tempore $t = \frac{aak}{2\delta g(aa+ff)}$; eritque tum $\cos\theta = 0$ et $\theta = 90° =$ PZO. Quod ergo cum evenerit, videamus quomodo reliquae motus determinationes se sint habiturae: et quoniam $2\delta g t = \frac{aak}{aa+ff}$, erit $\tang \varphi = \frac{aak \sin\zeta}{e(aa+ff)+aak\cos\zeta}$ et $\tang \xi = \frac{e(aa+ff)\tang\zeta}{e(aa+ff)+aak}$. Hinc fit $\mathfrak{s} \sin s = \frac{e\sin\zeta}{f\sin\xi}$. Cum autem sit $v = \sqrt{\left(ee + \frac{2aaek\cos\zeta}{aa+ff} + \frac{a^4kk}{(aa+ff)^2}\right)}$; erit $\sin\varphi = \frac{aak\sin\zeta}{(aa+ff)v}$ et $\cos\varphi = \frac{e(aa+ff)+aak\cos\zeta}{(aa+ff)v}$; atque $\sin\xi = \frac{e\sin\zeta}{v}$, ideoque $\mathfrak{s}\sin s = \frac{v}{f}$. Porro quia $\mathfrak{s}\cos s = \mathfrak{e}\cos\mathfrak{f}$, erit $\tang s = \frac{v}{\mathfrak{e}f\cos\mathfrak{f}}$ et $\mathfrak{s} = \sqrt{\left(\frac{vv}{ff} + \mathfrak{e}\mathfrak{e}\cos\mathfrak{f}^2\right)}$ seu $\mathfrak{s} = \frac{\sqrt{(eeff + 2\mathfrak{e}eaaf\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h} + \mathfrak{e}\mathfrak{e}a^4\sin\mathfrak{f}^2 + \mathfrak{e}\mathfrak{e}(aa+ff)^2\cos\mathfrak{f}^2)}}{aa+ff}$

ob $kk = ee - 2\mathfrak{e}ef\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h} + \mathfrak{e}\mathfrak{e}ff\sin\mathfrak{f}^2$.

COROLL. 1.

1056. Quo major ergo initio fuerit celeritas radens k, eo diutius motus durat, antequam cessante frictione ad uniformitatem redigatur. Ac si globus constet ex materia homogenea, fit $aa = \frac{2}{3}ff$, ideoque motus uniformitas incipit elapso tempore $t = \frac{k}{7\delta g}$ min. sec. hinc in hypothesi $\delta = \frac{1}{3}$ fit $t = \frac{3k}{7g}$, existente $g = 15\frac{1}{8}$ ped. Rhen.

COROLL. 2.

1057. Ut centrum globi eodem tempore ad quietem redigatur, status initialis ita comparatus esse debet, ut sit $\cos\zeta = -1$ et $e = \frac{aak}{aa+ff}$. Fit ergo $k = e - \mathfrak{e}f\sin\mathfrak{f}\sin\mathfrak{h}$, et $\sin\mathfrak{h} = 1$; seu $\mathfrak{h} = 90°$; et $k = e - \mathfrak{e}f\sin\mathfrak{f}$; hincque

hincque $\epsilon \mathit{si} \mathfrak{f} = \frac{-ef}{aa}$. Porro ob $v = 0$ fit $s = 0$; et $\mathfrak{u} = \epsilon \cos \mathfrak{f}$, qua celeritate angulari jam globus circa axem verticalem quiescentem gyrabitur: elapso ab initio tempore $t = \frac{e}{2\delta g}$ min. sec.

COROLL. 3.

1058. Hoc autem casu, quo initio est $\mathfrak{h} = 90°$, et $\epsilon = \frac{-ef}{aa \mathit{si} \mathfrak{f}}$, fit $\zeta = 180$; $\varphi = 0$; $\xi = 180$; $\theta = 90°$; $v = e - 2\delta g t$; tum vero $\mathfrak{u} \cos s = \frac{-ef \cos \mathfrak{f}}{aa \mathit{si} \mathfrak{f}}$; $\mathfrak{u} \mathit{si} s = \frac{-ef}{aa}\left(1 - \frac{2\delta g t}{e}\right)$, hincque $\tang s = \left(1 - \frac{2\delta g t}{e}\right) \tang \mathfrak{f}$ et $\mathfrak{u} = \frac{-ef}{aa \mathit{si} \mathfrak{f}} \sqrt{\left(1 - \frac{4\delta g t}{e} \mathit{si} \mathfrak{f}^2 + \frac{4\delta\delta g g t t}{ee} \mathit{si} \mathfrak{f}^2\right)}$. At initio erat celeritas radens $k = e\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)$, elapso autem tempore t ea est $w = \left(1 + \frac{ff}{aa}\right)(e - 2\delta g t)$, sicque posito $t = \frac{e}{2\delta g}$ simul fit $w = 0$, $v = 0$ et $s = 0$, ut ante.

COROLL. 4.

1059. Ne valor $\mathfrak{u} \mathit{si} s = \frac{e \mathit{si} \zeta}{f \cos(\xi - \theta)}$ indefinitus videatur, quod fit si numerator ac denominator evanescant, seu $\zeta = 0$, conveniet loco $\mathit{si} \zeta$ et $\cos(\xi - \theta)$ valores ex superioribus substitui, atque hinc reperietur:

$$\mathfrak{u} \mathit{si} s = \sqrt{\left(\epsilon\epsilon \mathit{si} \mathfrak{f}^2 - \frac{4\delta\epsilon f g t \mathit{si} \mathfrak{f}(\epsilon f \mathit{si} \mathfrak{f} - e \mathit{si} \mathfrak{h})}{aak} + \frac{4\delta\delta ff g g t t}{a^4}\right)}$$

unde ob $\mathfrak{u} \cos s = \epsilon \cos \mathfrak{f}$ prodit:

$$\mathfrak{u}\mathfrak{u} = \epsilon\epsilon - \frac{4\delta\epsilon f g t \mathit{si} \mathfrak{f}(\epsilon f \mathit{si} \mathfrak{f} - e \mathit{si} \mathfrak{h})}{aak} + \frac{4\delta\delta ff g g t t}{a^4}.$$

COROLL. 5.

1060. Cum sit vis viva globi $= M(vv + aa\,\mathfrak{u}\mathfrak{u})$, erat ea initio $= M(ee + \epsilon\epsilon\, aa)$, elapso autem tempore t ea erit $=$

$$M\left(ee + \varepsilon\varepsilon aa - 4\delta gkt + 4\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)\delta\delta gg\, tt\right).$$

At elapso tempore $t = \frac{aak}{2\delta g(aa+ff)}$, vis viva fiet $= \frac{M(eeff + 2\varepsilon eaaf\,\mathrm{si}\,\mathfrak{f}\,\mathrm{si}\,\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon aa(aa + ff\cos\mathfrak{f}^2))}{aa+ff}$, cujus defectus ab initiali est $= \frac{Maa(ee - 2\varepsilon ef\,\mathrm{si}\,\mathfrak{f}\,\mathrm{si}\,\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff\,\mathrm{si}\,\mathfrak{f}^2)}{aa+ff} = \frac{Maakk}{aa+ff}$, ita ut ista vis viva sit $= M\left(ee + \varepsilon\varepsilon aa - \frac{aakk}{aa+ff}\right)$.

SCHOLION.

1061. Ex his ergo formulis totus motus globi assignari potest, quicunque motus ei initio fuerit impressus: interim tamen hae formulae non parum sunt complexae, unde ad clariorem explicationem haud abs re erit, casus quosdam magis notabiles evolvi. Cujusmodi sunt, uti jam supra innuimus, duo potissimum, alter quo arcus ZO initio erat quadrans, alter vero quo angulus DZO $= \mathfrak{h}$ erat rectus: utrumque igitur seorsim explicemus.

PROBLEMA. 20.

1062. Si globo, in quo omnia momenta inertiae sunt aequalia, initio motus gyratorius circa axem horizontalem fuerit impressus praeter motum progressivum, definire continuationem motus.

SOLUTIO.

Fig. 139. Cum initio axis gyrationis fuerit horizontalis, erit $\mathfrak{f} = ZO = 90^\circ$. Denotante ergo e celeritatem progressivam secundum directionem DIE, et ε celeritatem angularem circa axem IO in sensum ZETD, sit pro puncto O angulus DZO $= \mathfrak{h}$: manente $f =$ radio globi et $Maa =$ momento inertiae. Ex his erat initio celeritas radens $k = \gamma(ee - 2\varepsilon ef\,\mathrm{si}\,\mathfrak{h} + \varepsilon\varepsilon ff)$ et pro ejus directione IQ angulus DZQ $= \zeta$ ut sit $\mathrm{si}\,\zeta$

Fig. 140. $= \frac{-\varepsilon f\cos\mathfrak{h}}{k}$ et $\cos\zeta = \frac{\varepsilon f\,\mathrm{si}\,\mathfrak{h} - e}{k}$. His pro statu initiali constitutis elapso tempore t centrum globi descripserit viam GI, ut jam sit in I ubi ejus celeritas secundum IK erit $= v = \gamma\left(ee + \frac{4\delta egt(\varepsilon f\,\mathrm{si}\,\mathfrak{h} - e)}{k} + \right.$

4δδ

$4\delta\delta gg\,tt$): unde positis coordinatis $GX = X$ et $XI = Y$ ob *tang* EIR $= tang\ \varphi = \frac{-2\delta\varepsilon fgt\cos\eta}{ek + 2\delta gt(\varepsilon f\sin\eta - e)}$ erit $dX = edt + \frac{2\delta gt\,dt}{k}(\varepsilon f\sin\eta - e)$ et $dY = \frac{-2\delta\varepsilon fgt\,dt\cos\eta}{k}$, ideoque $GX = X = et + \frac{\delta gtt}{k}(\varepsilon f\sin\eta - e)$ et $XI = Y = \frac{-\delta\varepsilon fgtt}{k}\cos\eta$. Tum vero pro motu Fig. 139. gyratorio, qui jam fiat in sensum ZETD celeritate angulari $= \omega$ circa polum O existente $ZO = s$, $PZO = \theta$, et $DZQ = \varphi + \xi$, ubi IQ refert directionem celeritatis radentis, quia constanter est $\varphi + \xi = \zeta$, seu directio IQ constans, erit $tang\ \xi = \frac{-\varepsilon f\cos\eta}{\varepsilon ef\sin\eta - ee + 2\delta gkt}$, et $tang\ (\xi - \theta) = \frac{\varepsilon f - e\sin\eta}{e\cos\eta} - \frac{2\delta fgkt}{\varepsilon eaa\cos\eta}$, unde ambo anguli ξ et θ definiuntur. Vel erit $tang\ (\varphi + \theta) = \frac{\varepsilon aak\sin\eta + 2\delta fgt(e - \varepsilon f\sin\eta)}{\varepsilon aak\cos\eta - 2\delta\varepsilon ffgt\cos\eta}$.

Celeritas autem radens secundum directionem IQ est $v = k - 2\delta g\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)t$. Tum vero ob $\omega\cos s = 0$, erit arcus $ZO = s$ quadrans, et $\omega = r\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon fgt(\varepsilon f - e\sin\eta)}{aak} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right)$.

Hic motus inaequabilis autem tantum durabit per tempus $t = \frac{aak}{2\delta g(aa+ff)}$, quo elapso est $tang\ \varphi = \frac{-\varepsilon aaf\cos\eta}{e(aa+ff) + aa(\varepsilon f\sin\eta - e)} = \frac{-\varepsilon aa\cos\eta}{ef + \varepsilon aa\sin\eta} = r\left(\varepsilon\varepsilon + \frac{2aae(\varepsilon f\sin\eta - e)}{aa+ff} + \frac{a^4kk}{(aa+ff)^2}\right)$, $s = 90°$, et $\omega = \frac{v}{f} = \frac{r(eeff + 2\varepsilon eaaf\sin\eta + \varepsilon\varepsilon a^4)}{aa+ff}$, substituto pro kk valore. Tum autem fit angulus $\theta = 90°$, et $\sin\xi = \frac{e\sin\zeta}{v}$.

COROLL. 1.

1063. Si initio fuerit angulus $DZO = f = 0$, erit $k = r(ee + \varepsilon\varepsilon ff)$ pro

pro angulo DZQ $= \zeta$ fit $\sin\zeta = \frac{-sf}{k}$; $\cos\zeta = \frac{-e}{k}$; tum poſt tempus t prodit $v = \gamma\left(ee - \frac{4\delta eegt}{k} + 4\delta\delta ggtt\right)$; $\tang\Phi = \frac{-2\delta sfgt}{e(k-2\delta gt)}$; $X = et\left(1 - \frac{\delta gt}{k}\right)$, $Y = \frac{-\delta sfgtt}{k}$. Porro $\tang\xi = \frac{sef}{ee-2\delta gkt}$; $\tang(\xi-\theta) = \frac{sf}{e} - \frac{2\delta fgkt}{seaa}$ $\tang(\Phi+\theta) = \frac{2\delta\delta fgt}{saak-2\delta sffgt}$: $x = \gamma\left(tt - \frac{4\delta sffgt}{aak} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right)$ et $w = k - 2\delta g\left(1+\frac{ff}{aa}\right)t$.

Elapſo autem tempore $t = \frac{aak}{2\delta g(aa+ff)}$ erit $\tang\Phi = \frac{-saa}{ef}$; $v = \frac{f\gamma(eeff+ssa^4)}{aa+ff} = fu$; $\theta = 90°$ et $\tang\xi = \frac{sef(aa+ff)}{ee(aa+ff)-aakk} = \frac{se(aa+ff)}{f(ee-ssaa)}$.

COROLL. 2.

1064. Si angulus DZO $= f$ eſſet $= 180°$, eaedem formulae motum indicabunt, ſumta celeritate angulari s negativa ſeu motu gyratorio in contrarium verſo. At ſi ſit $s = 0$, ſeu globo ſolus motus progreſſivus fuerit impreſſus, fit $k = e$, $\zeta = 180°$, $v = e - 2\delta gt$; $\Phi = 0$, $X = t(e - \delta gt)$, $Y = 0$; $\xi = 180°$; $\theta = 90°$, $x = \frac{2\delta fgtt}{aa}$; et elapſo tempore $t = \frac{aae}{2\delta g(aa+ff)}$, fit $v = \frac{eff}{aa+ff}$, $x = \frac{ef}{aa+ff}$ et $X = \frac{tt(aa+2ff)}{2(aa+ff)} = \frac{aaee(aa+2ff)}{4\delta g(aa+ff)^2}$.

SCHOLION.

1065. Caſus hic, quo globus initio nullum motum gyratorium eſt adeptus, in genere valet, neque ad ullam hypotheſin angulorum f et ζ eſt adſtrictus. Tum igitur globus in directum progreditur motu progreſſivo

Digitized by Google

greſſivo retardato, motumque paulatim gyratorium accipiet, donec elapſo tempore $t = \frac{aae}{2\delta g(aa+ff)}$ motum uniformem acquirat, quo deinceps continuo progrediatur. Hinc deducimur ad caſum, quo globus initio motum tantum gyratorium acceperit ſine ullo motu progreſſivo, cujus evolutio eſt facilis. Poſito enim $e = 0$, erit $k = \varepsilon f \sin \phi$, hincque fit $\sin \zeta = -\cos \phi$ et $\cos \zeta = \sin \phi$, ergo $\zeta = \phi - 90°$: ubi pro axe gyrationis initio impreſſae IO eſt $ZO = f$ et $DZO = \phi$, exiſtente celeritate angulari in ſenſum $ZETD = \varepsilon$. Elapſo ergo tempore t fit $\varphi = \zeta$, ſcilicet ſublato ab angulo $DZO = \phi$ angulo recto PZO, erit PI directio motus progreſſivi, quem globus acquiret, cujus celeritas erit $v = 2\delta gt$., ideoque tempori proportionalis. Tum vero erit $tang\ \xi = 0$ et $tang\ (\xi - \theta) = \infty$, ergo ob $\varphi + \xi = \zeta = \phi - 90°$, erit $\xi = 0$, et $\theta = 90°$, hinc $DZO = \zeta + 90 = \phi$, ita ut polus gyrationis O in eodem perpetuo circulo verticali reperiatur. Denique ex §. 1059. eſt $\varkappa \sin s = r\left(\varepsilon \sin f^2 - \frac{4\delta\varepsilon fgt \sin f}{aa} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right) = \varepsilon \sin f - \frac{2\delta fgt}{aa}$ et $\varkappa \cos s = \varepsilon \cos f$, unde fit $tang\ s = tang\ f - \frac{2\delta fgt}{\varepsilon aa \cos f}$, ita ut arcus ZO diminuatur, niſi fuerit quadrans vel eo major, et $\varkappa = r\left(\varepsilon - \frac{4\delta fgt \sin f}{aa} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right)$. Motus autem ad uniformitatem reducetur elapſo tempore $t = \frac{\varepsilon aa f \sin f}{2\delta g(aa+ff)}$; fitque tum $\varkappa = \frac{\varepsilon r(a^4 \sin f^2 + (aa+ff)^2 \cos f^2)}{aa+ff}$; $v = \frac{\varepsilon aaff \sin f}{aa+ff}$ et $tang\ s = \frac{aa\, tang\, f}{aa+ff}$. Si ergo fuiſſet $f = 0$, ſeu globo motus gyratorius circa axem verticalem impreſſus eſſet ſine ullo motu progreſſivo, eundem motum ſine ulla mutatione eſſet conſervaturus.

PROBLEMA. 21.

1066. Si globo, in quo omnia momenta inertiae ſunt aequalia, motus gyratorius fuerit impreſſus circa axem ad motus progreſſivi directionem normalem; definire continuationem motus.

Digitized by Google

SOLUTIO.

Fig. 139. Cum motus progressivi initio impressi directio sit recta DIE, et celeritas $= e$, angulus $DZO = \mathfrak{h}$ est rectus, et sumto $ZO = f$ *erat* O polus circa quem initio globus accepit celeritatem angularem $= \varepsilon$ *in* sensum ZETD. Habemus ergo $k = \pm (e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f})$ ubi valorem positivum pro k sumi oportet: ita ut hic, prodeant duo casus seorsim tractandi.

Casus I. Sit $e > \varepsilon f \sin \mathfrak{f}$, erit $k = e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f}$, quae est celeritas radens initio, ejusque directio IQ, ut sit $\sin DQ = 0$ et $\cos DQ = -1$ ideoque $DQ = \zeta = 180°$, et Q cadat in E: globusque a frictione ∂M secundum ID constanter retrahatur: unde statim colligitur globi centrum I in eadem recta DE esse incessurum. Elapso tempore t ergo ob $\cos \zeta = -1$ fit celeritas centri $v = e - 2\partial g t$, et celeritas *radens* $w = e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f} - 2\partial g \left(1 + \frac{ff}{aa}\right) t$: tum vero $\varphi = 0$ et $\xi = 180°$, atque $\theta = 90°$. Quare pro axe gyrationis praelente IO, est $DIO = 90°$, et posito arcu $ZO = s$ et celeritate angulari $= u$ habemus $u \cos s = \varepsilon \cos \mathfrak{f}$ et ex §. 1059. $u \sin s = \varepsilon \sin \mathfrak{f} + \frac{2\partial f g t}{aa}$, unde colligitur $\tang s = \tang \mathfrak{f} + \frac{2\partial f g t}{\varepsilon aa \cos \mathfrak{f}}$, et $u = r\left(\varepsilon\varepsilon + \frac{4\partial\varepsilon f g t \sin \mathfrak{f}}{aa} + \frac{4\partial\partial f f g g t t}{a^4}\right)$. Hocque tempore t percurrit centrum I lineam rectam $GX = X = t(e - \partial g t)$. Hic autem motus inaequabilis durabit per tempus $t = \frac{aa(e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f})}{2\partial g(aa + ff)}$ quo elapso erit spatium $X = \frac{aa(e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f})(e(aa + 2ff) + \varepsilon aa f \sin \mathfrak{f})}{2\partial g(aa + ff)^2}$, et celeritas $v = \frac{f(ef + \varepsilon aa \sin \mathfrak{f})}{aa + ff}$. At pro motu gyratorio $\tang s = \tang ZO = \tang \mathfrak{f} + \frac{f(e - \varepsilon f \sin \mathfrak{f})}{\varepsilon(aa + ff)\cos \mathfrak{f}} = \frac{ef + \varepsilon aa \sin \mathfrak{f}}{\varepsilon(aa + ff)\cos \mathfrak{f}}$, existente perpetuo $DIO = 90°$ et celeritas angularis

$$u = \frac{r(ee ff + 2ee aa f \sin \mathfrak{f} + \varepsilon\varepsilon a^4 \sin \mathfrak{f}^2 + \varepsilon\varepsilon(aa + ff)^2 \cos \mathfrak{f}^2)}{aa + ff}.$$

Casus II. Sit $e < \varepsilon f \sin \mathfrak{f}$ seu $k = \varepsilon f \sin \mathfrak{f} - e$, quae est celeritas radens initio, ejusque directio IQ talis ut sit $\sin DQ = 0$ et $\cos DQ = 1$, ergo

ergo DQ $= \zeta = 0$, et Q in D cadat. Globus ergo a frictione δM secundum directionem IE constanter acceleratur, ejusque centrum I in eadem recta IE progreditur: atque elapso tempore t erit ejus celeritas $v = e + 2\delta g t$, et celeritas radens $w = \varepsilon f \sin\varphi - e - 2\delta g\left(1 + \frac{ff}{aa}\right) t$. Tum vero fit $\varphi = 0$ et $\xi = 0$, atque $\theta = 90°$. Quare pro axe gyrationis praesente IO est DIO $= 90°$, et posito arcu ZO $= s$ et celeritate angulari $= \alpha$ habemus $\alpha \cos s = \varepsilon \cos\varphi$ et $\alpha \sin s = \varepsilon \sin\varphi - \frac{2\delta f g t}{aa}$, unde fit $\tan g\, s = \tan g\, \varphi - \frac{2\delta f g t}{\varepsilon aa \cos\varphi}$ et $\alpha = \gamma\left(aa - \frac{4\delta e f g t \sin\varphi}{aa} + \frac{4\delta\delta f f g g t t}{aa}\right)$ hocque tempore t centrum globi percurrit lineam rectam GX $=$ X $= t(e + \delta g t)$. Hic autem motus inaequabilis durabit tantum tempore $t = \frac{aa(\varepsilon f \sin\varphi - e)}{2\delta g(aa + ff)}$, quo elapso erit celeritas $v = \frac{f(ef - \varepsilon aa \sin\varphi)}{aa + ff}$, et spatium $X = \frac{aa(\varepsilon f \sin\varphi - e)(e(aa + 2ff) + \varepsilon aa f \sin\varphi)}{2\delta g(aa + ff)^2}$. At pro motu gyratorio reperitur $\tan g\, s = \tan g\, ZO = \frac{ef + \varepsilon aa \sin\varphi}{\varepsilon(aa + ff)\cos\varphi}$ existente perpetuo DIO $= 90°$, et celeritas angularis

$$\alpha = \frac{\gamma(ee ff + 2e\varepsilon aa f \sin\varphi + \varepsilon\varepsilon a^4 \sin\varphi^2 + \varepsilon\varepsilon(aa + ff)^2 \cos\varphi^2)}{(aa + ff)}.$$

COROLL. 1.

1067. Si fuerit $e = \varepsilon f \sin\varphi$, globus statim ab initio motum prosequetur uniformem, tam progressivum quam gyratorium, qui casus limitem constituit inter binos tractatos.

COROLL. 2.

1068. Ad priorem casum quo $e > \varepsilon f \sin\varphi$ referendi sunt ii, quibus ε habet valorem negativum, seu globo impressus fuerit initio motus gyratorius in sensum ZDTE. Posito autem $-\varepsilon$ loco ε, fieri potest, ut globus

globus revertatur, antequam ad uniformitatem pervenerit: ſcilicet ſi fuerit $\varepsilon > \frac{ef}{aa\sin f}$.

COROLL. 3.

1069. Caſu hoc, quo ε negative capitur, habebimus ad tempus t: $\varphi = 0$, $\theta = 0$, $\xi = 180$, $v = e - 2\delta gt$; $w = e + \varepsilon f \sin f - 2\delta g\left(1 + \frac{ff}{aa}\right)t$; $tang\ s = tang\ f - \frac{2\delta fgt}{\varepsilon aa\cos f}$; et $u = r\left(\varepsilon\varepsilon - \frac{4\delta\varepsilon fgt\sin f}{aa} + \frac{4\delta\delta ffggtt}{a^4}\right)$. At poſt tempus $t = \frac{aa(e+\varepsilon ff\sin f)}{2\delta g(aa+ff)}$ percurſo ſpatio $X = \frac{aa(e+\varepsilon ff\sin f)(e(aa+2ff)-\varepsilon aaf\sin f)}{2\delta g(aa+ff)^2}$, uniformitatem attinget, eritque tum $v = \frac{f(ef-\varepsilon aa\sin f)}{aa+ff}$; $tang\ s = \frac{\varepsilon aa\sin f - ef}{\varepsilon(aa+ff)\cos f}$ et $u = \frac{r(ee ff - 2\varepsilon e aa f\sin f + \varepsilon\varepsilon a^4\sin f^2 + \varepsilon\varepsilon(aa+ff)^2\cos f^2)}{aa+ff}$.

SCHOLION.

1070. Caſus hic praecipue eſt memorabilis, quo globo ejusmodi motus imprimi poteſt, ut primo recedat, mox autem iterum revertatur, quod experimento oſtendi ſolet, dum digito ad globum circa D applicato et deorſum preſſo duplex motus globo imprimitur, alter progreſſivus in directione DIE, alter gyratorius in ſenſum ZDTE. Sed ut phaenomenon ſuccedat, neceſſe eſt, ut celeritas angularis praeprogreſſiva certum quendam limitem excedat; quem quo facilius agnoſcamus, calculum ad iſtum caſum accommodemus, quo motus gyratorius *globo* circa axem horizontalem et ad directionem motus *progreſſivi* normalem imprimitur. Quod ſi ergo e denotet *celeritatem* progreſſivam ſecundum directionem DIE, et ε celeritatem *angularem* retro gyrantem in ſenſum ZDTE, exiſtente f radio globi et Maa ejus momento inertiae, frictioneque $= \delta M$; primo globus in directione DIE procedet, et elapſo tempore t ejus celeritas ſecundum eandem directionem erit $v = e - 2\delta gt$, confecto ſpatio $X = t(e - \delta gt)$: tum vero etiamnum circa eundem axem retro volvetur celeritate angulari $u = \varepsilon - \frac{2\delta fgt}{aa}$.

Motus

Motus autem aequabilis evadit elapso tempore $t = \frac{ah(e+ef)}{2\delta g(aa+ff)}$, eritque tum celeritas progressiva $v = \frac{f(ef-eaa)}{aa+ff}$; et angularis $s = \frac{eaa-ef}{aa+ff}$.

Quare si fuerit $s > \frac{ef}{aa}$, globus nunc retro movetur, gyratorio adhuc retro vergente: sin autem fuerit $s < \frac{ef}{aa}$, globus adhuc procedit, et gyratio in sensum contrarium est versa. Illo casu globus regredi coepit elapso tempore $t = \frac{e}{2\delta g}$ et percurso spatio $X = \frac{ee}{4\delta g}$.

Si globus sit homogeneus, erit $aa = \frac{2}{5}ff$, et ef exprimit celeritatem gyrationis in puncto contactus, quae si vocetur $= b$, erit post tempus t celeritas progressiva $v = e - 2\delta gt$, et gyratoria in puncto contactus, quae sit $u = b - 5\delta gt$, et spatium percursum $= t(e - \delta gt)$: motus vero aequabilis evadet elapso tempore $t = \frac{e+b}{7\delta g}$, et confecto spatio $= \frac{(6e-b)(e+b)}{49\delta g}$: ubi erit $v = \frac{5e-2b}{7}$, et $u = \frac{2b-5e}{7}$.

Ut ergo phaenomenum memoratum succedat, debet esse initio $b > \frac{5}{2}e$. Sin autem esset $b = \frac{5}{2}e$ uterque motus simul extingueretur elapso tempore $= \frac{e}{2\delta g}$ min. sec. et confecto spatio $= \frac{ee}{4\delta g}$.

Digitized by Google

SUPPLEMENTUM
ad Problema 80. §. 761. de motu quocunque libero corporis solidi a nullis viribus sollicitati.

Posito $x = u \cos \alpha$; $y = u \cos \mathfrak{C}$; et $z = u \cos \gamma$, aequationes resolvendae erunt novem sequentes:

I. $dx = \frac{bb-cc}{aa} yzdt$; II. $dy = \frac{cc-aa}{bb} xzdt$; III. $dz = \frac{aa-bb}{cc} xydt$

IV. $dl \sin l = dt (y \cos n - z \cos m)$; VII. $d\lambda \sin l^2 = -dt (y \cos m + z \cos n)$
V. $dm \sin m = dt (z \cos l - x \cos n)$; VIII. $d\mu \sin m^2 = -dt (z \cos n + x \cos l)$
VI. $dn \sin n = dt (x \cos m - y \cos l)$; IX. $d\nu \sin n^2 = -dt (x \cos l + y \cos m)$

unde novem quantitates x, y, z, l, m, n, λ, μ, ν definiri oportet. Trium priorum quidem solutio jam in antecedentibus problematibus est tradita; ad usum autem sequentium statuatur

$$\frac{bb-cc}{aa} = \mathfrak{A}; \quad \frac{cc-aa}{bb} = \mathfrak{B}; \quad \frac{aa-bb}{cc} = \mathfrak{C} \text{ et } xyzdt = du$$

eritque $xdx = \mathfrak{A} du$; $ydy = \mathfrak{B} du$; $zdz = \mathfrak{C} du$

unde integrando elicitur:

$$xx = 2\mathfrak{A}u + \mathfrak{A}; \quad yy = 2\mathfrak{B}u + \mathfrak{B}; \quad zz = 2\mathfrak{C}u + \mathfrak{C}$$

ideoque $dt = \frac{du}{\sqrt{(2\mathfrak{A}u+\mathfrak{A})(2\mathfrak{B}u+\mathfrak{B})(2\mathfrak{C}u+\mathfrak{C})}}$

Ratione autem quantitatum A, B, C eae ita inter se sunt comparatae, ut sit: $Aaa + Bbb + Ccc = 0$ et $Aa^4 + Bb^4 + Cc^4 = 0$; Quare fiet $aaxx + bbyy + cczz = \mathfrak{A}aa + \mathfrak{B}bb + \mathfrak{C}cc =$ quantitati constanti. Restitutis autem pro x, y, z valoribus assumtis fit

$$aaxx + bbyy + cczz = uu (aa \cos \alpha^2 + bb \cos \mathfrak{C}^2 + cc \cos \gamma^2) = \text{Const.}$$

At posita massa corporis $= M$ expressio $M(aa \cos \alpha^2 + bb \cos \mathfrak{C}^2 + cc \cos \gamma^2)$ denotat momentum inertiae corporis respectu axis IO, circa quem corpus nunc gyratur, quod momentum ergo si dicatur $= Mrr$, erit $Mrr\,uu$ vis viva corporis, quae ergo manet constans.

Deinde cum sit $\cos \alpha^2 + \cos \mathfrak{C}^2 + \cos \gamma^2 = 1$ erit

$$u = r(xx + yy + zz) = r(2(\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})u + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C})$$

et ex cognitis x, y, z per u, etiam anguli α, $\mathfrak{C}$, γ, per u definiuntur. Atque hucusque quidem in problematibus antecedentibus pertingere licuit;

Digitized by Google

cuia; nunc igitur videamus, quomodo ſolutio propria probl. 80. expediri queat. Omnem autem difficultatem in aequationibus IV, V, VI ſitam eſſe patet, ad quam ſuperandam, ſtatuamus

$$\cos l = px, \quad \cos m = qy, \text{ et } \cos n = rz,$$

ut prodeant hae aequationes:

IV. $0 = pdx + xdp + dt\,(ryz - qyz)$ at eſt $yzdt = \frac{dx}{A}$

V. $0 = qdy + ydq + dt\,(pxz - rxz)$ $\quad xzdt = \frac{dy}{B}$

VI. $0 = rdz + zdr + dt\,(qxy - pxy)$ $\quad xydt = \frac{dz}{C}$

unde hae aequationes in ſequentes formas mutantur

IV. $0 = pdx + xdp + \frac{(r-q)\,dx}{A}$; ſeu $\frac{dx}{x} = \frac{A\,dp}{q - r - Ap} = \frac{A\,du}{2Au + \mathfrak{A}}$

V. $0 = qdy + ydq + \frac{(p-r)\,dy}{B}$; ſeu $\frac{dy}{y} = \frac{A\,dp}{r - q - Bq} = \frac{B\,du}{2Bu + \mathfrak{B}}$

VI. $0 = rdz + zdr + \frac{(q-p)\,dz}{C}$; ſeu $\frac{dz}{z} = \frac{C\,dr}{p - q - Cr} = \frac{C\,du}{2Cu + \mathfrak{C}}$.

Multiplicetur IV. per aax; V. per bby et VI. per ccz, ut habeatur

IV. $aapxdx + aaxxdp = a^2 \frac{(q-t)\,xxdx}{A} = a^2\,(q - r)\,du$

V. $bbqydy + bbyydq = \frac{bb(r-p)\,yydy}{B} = bb\,(r - p)\,du$

VI. $ccrzdz + cczzdr = \frac{cc(p-q)\,zdz}{C} = cc\,(p - q)\,du$.

Ex terminis autem primis colligitur

I. $aapxdx = Aaapdu = (bb - cc)\,pdu$

II. $bbqydy = Bbbqdu = (cc - aa)\,qdu$

III. $ccrzdz = Cccrdu = (aa - bb)\,rdu$.

His sex aequationibus in unam summam conjectis, partes posteriores se mutuo destruunt, proditque aequatio integrabilis:

$$2aapxdx + aaxxdp + 2bbqydy + bbyydq + 2ccrzdz + ccxzdr = 0$$

cujus integrale est

$$aapxx + bbqyy + ccrzz = \text{Const.}$$

in quo maxima vis inest ad integrationem desideratam absolvendam, si conjungatur cum aequatione $cos\, l^2 + cos\, m^2 + cos\, n^2 = 1$, quae abit in $ppxx + qqyy + rrzz = 1$. Cum enim x, y, z dentur per u ex his duabus aequationibus quantitates p et q per u et r definiri poterunt, qui in aequatione $\frac{dr}{p-q-Cr} = \frac{du}{2Cu+\mathfrak{C}}$ substituti perducent ad aequationem binas tantum variabiles u et r involventem, ex qua etiam r per u determinare licebit.

Primum autem observo, aequationibus nostris satis fieri posse, tribuendo litteris p, q, et r valores constantes: ad hoc enim necesse est fiat

$$q - r - Ap = 0\,;\quad r - p - Bq = 0\,;\quad p - q - Cr = 0\,;$$

unde fit $p = n(1 - B)$; $q = n(1 + A)$ et $r = n(1 + AB)$
si modo sit $A + B + C + ABC = 0$, quod autem revera evenit. Erit ergo pro A, B, C valores assumtos substituendo

$$p = \frac{n(aa+bb-cc)}{bb}\,;\quad q = \frac{n(aa+bb-cc)}{aa} \text{ et } r = \frac{ncc(aa+bb-cc)}{aabb}$$

quare sumto $n = \frac{maabb}{aa+bb-cc}$, colligitur

$$p = maa\,;\quad q = mbb\,;\text{ et } r = mcc,$$

ubi coefficiens m ita debet esse comparatus, ut fiat $ppxx + qqyy + rrzz = 1$ seu $mm(a^4(2Au + \mathfrak{A}) + b^4(2Bu + \mathfrak{B}) + c^4(2Cu + \mathfrak{C})) = 1$;

quare cum sit $Aa^4 + Bb^4 + Cc^4 = 0$, erit $m = \frac{1}{\sqrt{(\mathfrak{A}a^4 + \mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4)}}$

simulque fit

$$aapxx + bbqyy + ccrzz = m(a^4(2Au + \mathfrak{A}) + b^4(2Bu + \mathfrak{B}) + c^4(2Cu + \mathfrak{C}))$$

cujus ergo expressionis valor constans est $= +(\mathfrak{A}a^4 \sqrt{\mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4})$. Observo autem, hanc integrationem non esse pro incompleta habendam, propterea quod vertex sphaerae immobilis Z pro lubitu assumi potest. Eum ergo semper ita accipere licebit, ut quantitates p, q, r fiant constantes

ſtantes. Poſito itaque brevitatis gratia $r^4(\mathfrak{A}a^4 + \mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4) = n$ omnia per u ſequenti modo definientur: ut ſit

$$x = r(2Au + \mathfrak{A}); \; p = \frac{aa}{n}; \; \cos l = \frac{aa}{n} r(2Au + \mathfrak{A})$$

$$y = r(2Bu + \mathfrak{B}); \; q = \frac{bb}{n}; \; \cos m = \frac{bb}{n} r(2Bu + \mathfrak{B})$$

$$z = r(2Cu + \mathfrak{C}); \; r = \frac{cc}{n}; \; \cos n = \frac{cc}{n} r(2Cu + \mathfrak{C})$$

Pro ternis poſtremis aequationibus ob $dt = \frac{du}{xyz}$ fiet

$$d\lambda = \frac{-ndt(\mathfrak{B}bb + \mathfrak{C}cc - 2A^2aau)}{\mathfrak{B}b^4 + \mathfrak{C}c^4 - 2Aa^4u},$$

ſufficit autem unicum ternorum angulorum λ, μ, ν determinaſſe, cum bini reliqui ex eo per ſe conſtent.

Digitized by Google

EMENDANDA.

Pag. 3. *lin.* 1. *loco* et *leg.* eſt
— 4 — 19 — alia — alio
— 5 — 18 — nullum — ullum
— 5 — 26 — piis — iis
— 21 — 5 — Deinde cum — Deinde
— 22 — 21 — $zdxdy\ cof\ \eta$ — $zdxdz\ cof\ \eta$
— 27 — 4 — $r\,(1 - cof\,\varphi - \omega)^2 - r\,(1 - cof\,(\varphi - \omega)^2$
— 27 — 6 — aequae — aeque
— 28 — 24 — $dv^2\,vvd\sigma^2 - dv^2 + vvd\sigma^2$
— 32 — 7 — incommodo — incommoda
— 37 — 18 — $P\beta$ — $B\beta$
— 41 — 6 — $\frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dx}$
— 53 — 28 — demetiendi — dimetiendi
— 56 — 28 — Ax — $A\omega$
— 80 — 30 et 35 — $Pdy + Qdx$ — $Pdy - Qdx$
— 84 — 27 — $\frac{f^4\,dt}{u} - \frac{f^2\,dt}{u}$
— 84 — 28 — $udt^2 - ccdt^2$
— 87 — *ult* — $\frac{P}{V\sin\omega} - \frac{R}{V\sin\omega}$
— 90 — 20 — $zgRdt^2 - zgRdt^2$
— 94 — 23 — reſpectu O — reſpectu o
— 100 — 33 — corpuſculum Aa — corpuſculum A a
— 111 — 23 — ſingularium — ſingularum
— 121 — *ult* — extrema — externa
— 139 — 19 — Rs et St — Rs et Sz
— 146 — 15 — ipſi — ipſis
— 149 — 1 — $frrydM$ — $frrdM$
— 160 — 7 — ibidem — itidem
— 163 — 20 — OF — AF
— 167 — 6 — ſecundam — ſecundum
— 175 — 32 — inertiae , — inertiae novimus,
— 191 — 4 — $\zeta\ 90° - \zeta = 90°$
— 199 — 3 — $\int r^3\,drdt\varphi\ cof\ \varphi - \int r^3\,drdtd\varphi\ cof\ \varphi$
— 201 — 18 — et inte — et in inte —
— 223 — 28 — ipſium — ipſi

Pag.

Digitized by Google

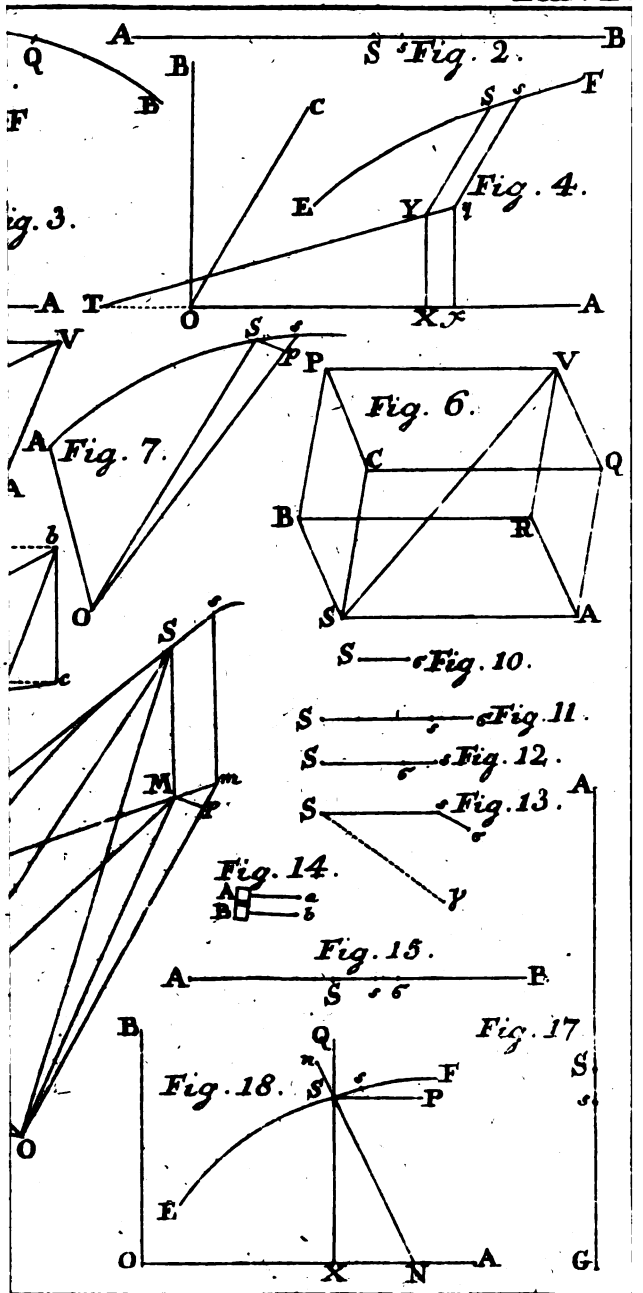
Pag. 223 *lin.* 28 *loco* ſuſtineat *leg.* ſuſtineant
— 228 — 18 — viribus, — viribus ſollicitatur,
— 235 — *ult* — + — ±
— 237 — 14 — ſingulas — ſingulae
— 246 — *ult* — ob RR — = F, ob RR
— 249 — 28 — quod — quod pro
— 251 — 17 — $bb\int\eta^2/\theta^2$ — $bb\int\eta^2 col\,\theta^2$
— 253 — 7 — $cot\,\theta$ — $cot\,\delta$
— 256 — 9 refera — revera
— 256 — 28 — fore, o — fore o'
— 262 — 1 — et vis Oq — et vis Op
— 267 — 16 — $aab\int\gamma$ — $aabb\int\gamma$
— 279 — 4 — pervenit — pervenerit
— 300 — 2 — $\frac{bbcc}{(bb-cc)(cc-aa)}$ — $\frac{bbcc}{(bb-aa)(cc-aa)}$
— 304 — 5 — *ſi* a — ſi a
— 306 — 10 — $m+n-n$ — $m+n-v$
— 328 — 23 — $\frac{s}{\cdot} = \frac{s}{cos\,\omega}$ — $s = \frac{s}{cos\,\omega}$
— 347 — 18 — VXVY — ZXVY
— 350 — 5 — IA, IB, IB — IA, IB, IC,
— 353 — 4 — ZE^3 — ZF^3
— 356 — 2 — $\frac{Mre}{ss}$ — $\frac{Mee}{ss}$
— 369 — 8 — *ſi* *aa* — ſi *aa*
— 379 — 20 — $\frac{adq}{dt^2}$ — $\frac{ddq}{dt^2}$
— 381 — 11 — nevam — novam
— 381 — 11 — finitum — finitam
— 381 — 14 — $(qz-ry)^2\frac{Ccc}{ff}$ — $(qz-ry)^2 = \frac{Ccc}{ff}$
— 383 — 17 — $-ee\,a^4(p-pp)$ — $-ee\,a^4(p-p))$
— 383 — 23 — $+eea^4ff(p-)^2$ — $+eea^4ff(p-p)^2$
— 383 — *ult* — $4cccfg$ — $4ccfg$
— 384 — 5 — $\frac{\Pi}{M}$: — $\frac{\Pi}{M}$.
— 386 — 25 — $a\,p$ — $a\,p$
— 388 — 8 — *ſi* A — ſi A
— 395 — 16 — corpus — corporis

Pag.

Digitized by Google

Pag. 397 *lin.* 16 *loco* *si* FI *leg.* si FI
--- 399 --- 9 --- fint --- fient
--- 408 --- 10 --- $d\lambda =$ --- $\lambda =$
--- 409 --- 20 --- $\mathfrak{b}(L - \mathfrak{c}u)$ --- $\mathfrak{b}(L - \mathfrak{b}u)$
--- 411 --- 14 --- $(aa - cc)\,\delta\mathfrak{r}\,\zeta\,si\,cos\,\zeta$ --- $(aa - cc)\,\delta\mathfrak{r}\,si\,\zeta\,cos\,\zeta$
--- 413 --- 25 --- $\delta\,(1 - bb)$ --- $\delta\,(1 - bbu)$
--- 416 --- 5 --- $cos\,n - cos\,\eta$ --- $cos\,n - cos\,\theta$
--- 418 --- 5 --- $\mathfrak{r}\,si\,cos\,\mathfrak{m}$ --- $\mathfrak{r}\,si\,\eta\,cos\,\mathfrak{m}$
--- 421 --- 13 et 14 --- $cc\,cos\,\mathfrak{G}\,sin\,\zeta$ --- $cc\,cos\,\mathfrak{b}\,si\,\zeta$.
--- 424 --- 6 --- $\delta t + \mathfrak{h}$ --- $\delta' t + \mathfrak{h}$
--- 424 --- 8 --- $cos\,\delta t$ et $\delta\,sin\,\zeta$ --- $cos\,\delta' t$ et $\delta'\,sin\,\zeta$
--- 424 --- 9 --- $\dfrac{\mathfrak{s}\,cos\,\mathfrak{c}\,sin\,\delta t}{\delta}$ --- $\dfrac{\mathfrak{s}\,cos\,\mathfrak{c}\,sin\,\delta t}{\delta^2}$
--- 435 --- 2 --- $xlfsi\zeta$ --- $xsifsi\zeta$
--- 454 --- 2 --- frictionis --- pressionis
--- 462 --- 4 --- $M\,(si - \delta\,cos\,\delta)$ --- $M\,(si\,\zeta - \delta\,cos\,\zeta)$
--- 465 --- 11 --- cylindricorum --- cylindrorum
--- 467 --- 20 --- $+\,\delta E si$ --- $+\delta F si\zeta$
--- 477 --- 13 --- $(cos\,\varphi - \zeta\,si\,\varphi)$ --- $(cos\,\varphi - \delta\,si\,\varphi)$
--- 477 --- 16 --- $-\,\zeta\,(1 + \delta\delta)$ --- $-\,\delta\,(1 + \delta\delta)$
--- 478 --- 11 --- $(1 - \varphi\varphi 2)$ --- $(1 - 2\varphi\varphi)$
--- 478 --- 15 --- $(1 - \zeta\theta$ --- $(1 - \delta\theta$
--- 479 --- 4 --- $Bb - \varphi A\delta f$ --- $Bb\varphi - A\delta f$
--- 487 --- 5 --- $si\,i\,si\,m$ --- $si\,l\,si\,m$
--- 491 --- 29 --- δ --- $\mathfrak{x}$
--- 496 --- 21 --- $sin\,(\mu + B)\,sin\,(\nu + B)$ --- $sin\,(\mu + B)\,sin\,(\nu + \mathfrak{G})$
--- 498 --- 21 --- $\theta = f$ --- $\theta = \mathfrak{h}$
--- 503 --- 19 --- ob $\mathfrak{x} =$ --- ob $\theta =$

Digitized by Google



Digitized by Google

Pag. 397 *lin.* 16 *loco* $\int$ FI *leg.* $\int$ FI
--- 399 --- 9 --- fint --- fient
--- 408 --- 10 --- $d\lambda =$ --- $\lambda =$
--- 409 --- 20 --- $b(L - cu)$ --- $b(L - bu)$
--- 411 --- 14 --- $(aa - cc)\partial t\, \zeta \int \cos \zeta$ --- $(aa - cc)\partial t \int \zeta \cos \zeta$
--- 413 --- 25 --- $\partial (1 - bb)$ --- $\partial (1 - bbu)$
--- 416 --- 5 --- $\cos n - \cos \eta$ --- $\cos n - \cos \theta$
--- 418 --- 5 --- $r \int \cos m$ --- $r \int \eta \cos m$
--- 421 --- 13 et 14 --- $cc \cos \mathfrak{C} \sin \zeta$ --- $cc \cos \mathfrak{b} \int \zeta$.
--- 424 --- 6 --- $\partial t + \mathfrak{h}$ --- $\partial' t + \mathfrak{h}$
--- 424 --- 8 --- $\cos \partial t$ et $\partial \sin \zeta$ --- $\cos \partial' t$ et $\partial' \sin \zeta$
--- 424 --- 9 --- $\frac{s \cos \epsilon \sin \partial t}{\partial}$ --- $\frac{s \cos \epsilon \sin \partial t}{\partial^2}$
--- 435 --- 2 --- $x \mathfrak{l} \int \zeta$ --- $x \int \int \zeta$
--- 454 --- 2 --- frictionis --- preſſionis
--- 462 --- 4 --- $M (\int - \partial \cos \partial)$ --- $M (\int \zeta - \partial \cos \zeta)$
--- 465 --- 11 --- cylindricorum --- cylindrorum
--- 467 --- 20 --- $+ \partial E \int$ --- $+ \partial F \int \zeta$
--- 477 --- 13 --- $(\cos \varphi - \zeta \int \varphi)$ --- $(\cos \varphi - \partial \int \varphi)$
--- 477 --- 16 --- $- \zeta (1 + \partial\partial)$ --- $- \partial (1 + \partial\partial)$
--- 478 --- 11 --- $(1 - \varphi\varphi 2)$ --- $(1 - 2\varphi\varphi)$
--- 478 --- 15 --- $(1 - \zeta\theta$ --- $(1 - \partial\theta$
--- 479 --- 4 --- $Bb - \varphi A \partial f$ --- $Bb\varphi - A \partial f$
--- 487 --- 5 --- $\int i \int m$ --- $\int l \int m$
--- 491 --- 29 --- ∂ --- u
--- 496 --- 21 --- $\sin (\mu + B) \sin (\nu + B)$ --- $\sin (\mu + B) \sin (\nu + C)$
--- 498 --- 21 --- $\theta = f$ --- $\theta = \mathfrak{h}$
--- 503 --- 19 --- ob $u =$ --- ob $\theta =$

Digitized by Google

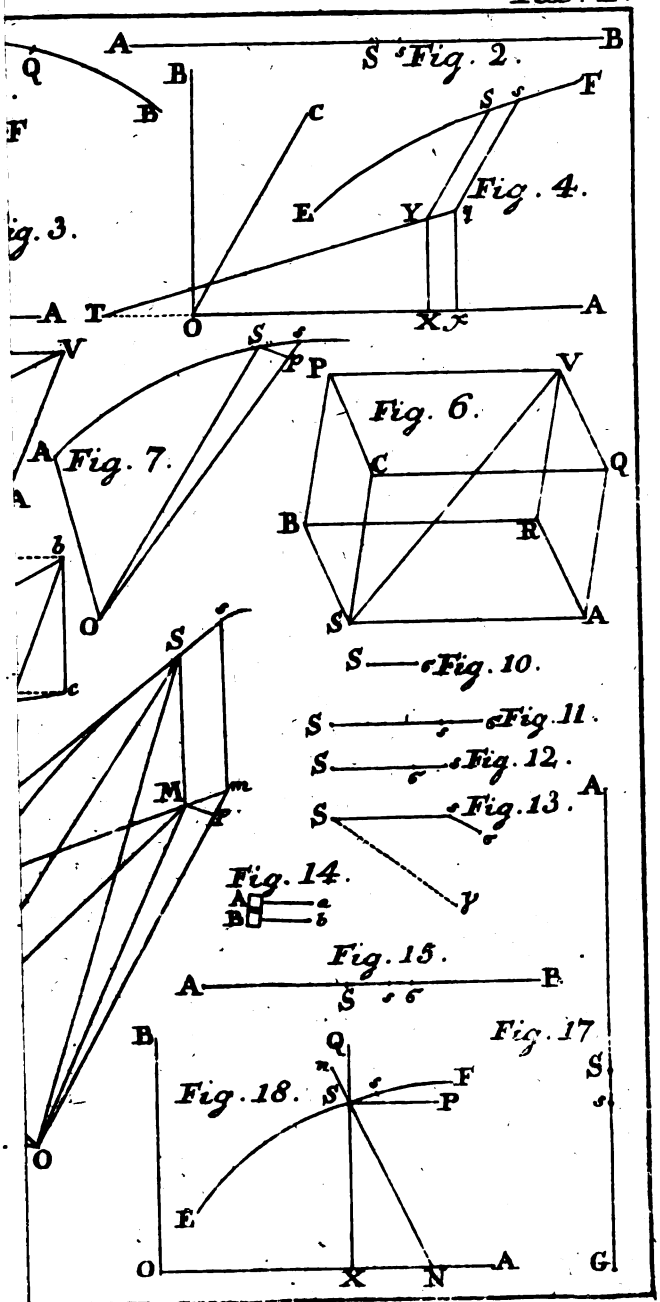


Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 17.
Fig. 18.

Fig. 22.

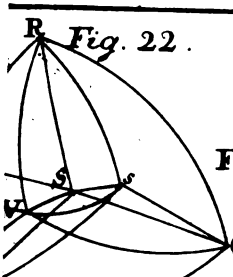
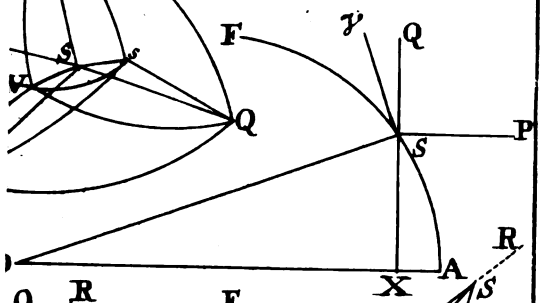


Fig. 20.



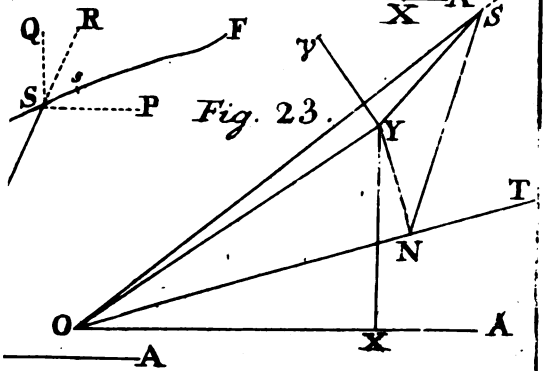
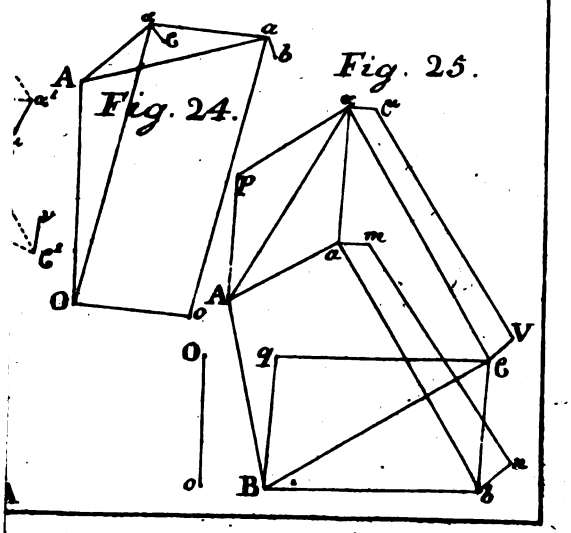


Fig. 23.

Fig. 24.



Digitized by Google

Digitized by Google

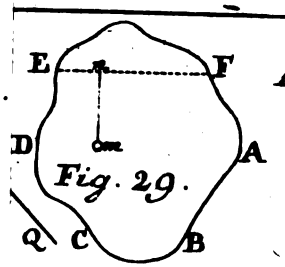


Fig. 29.

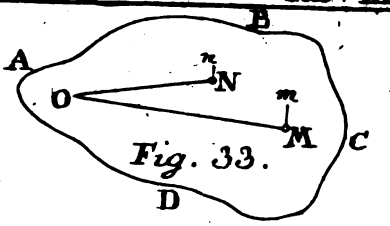


Fig. 33.

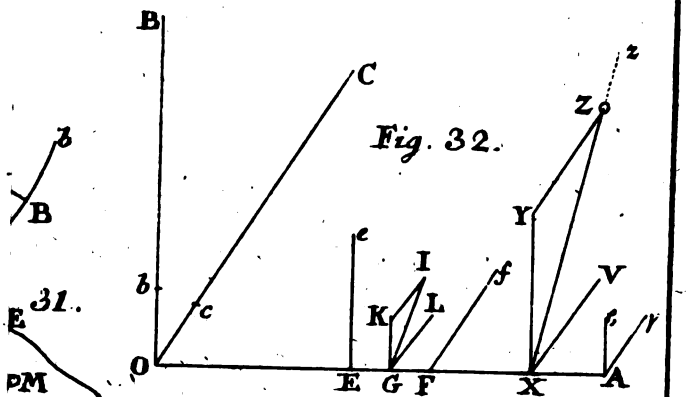


Fig. 32.

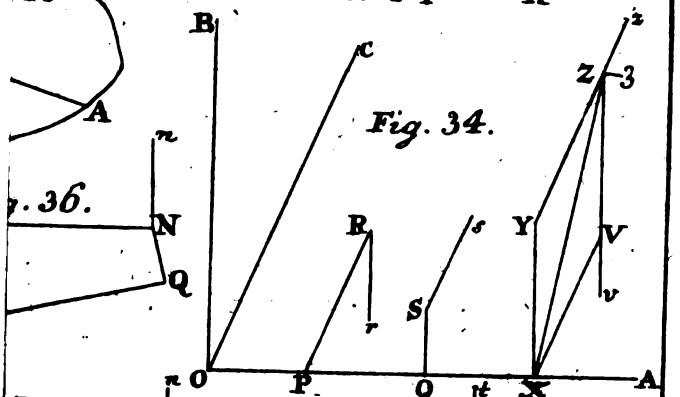


Fig. 34.

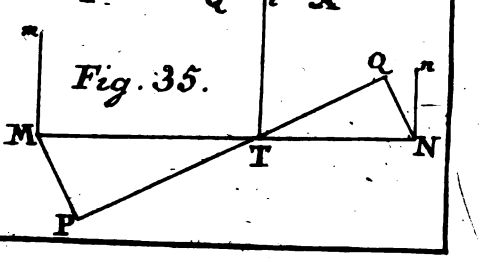
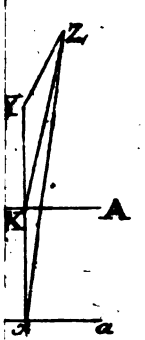


Fig. 35.

Digitized by Google



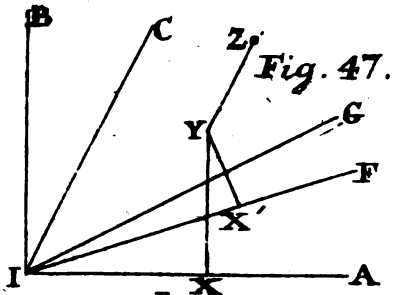


Fig. 47.

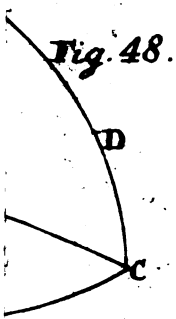


Fig. 48.

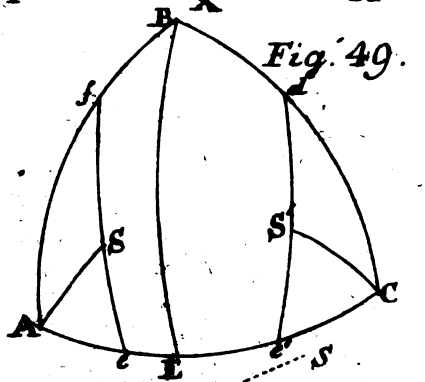


Fig. 49.

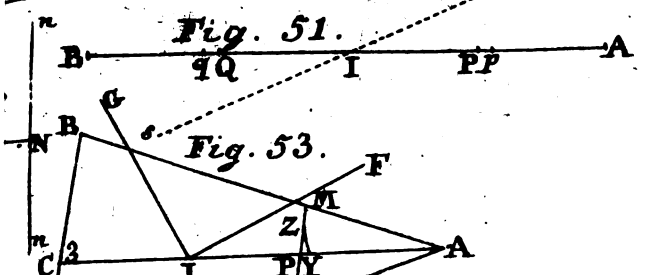


Fig. 51.

Fig. 53.

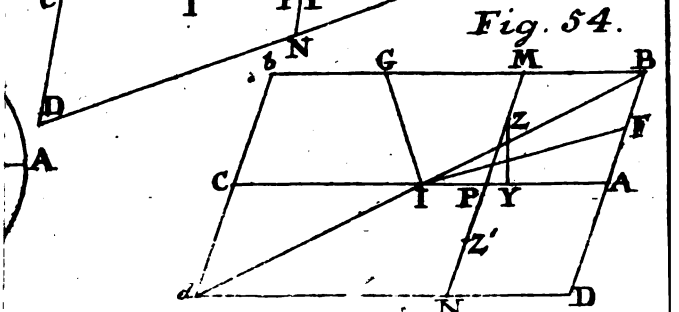
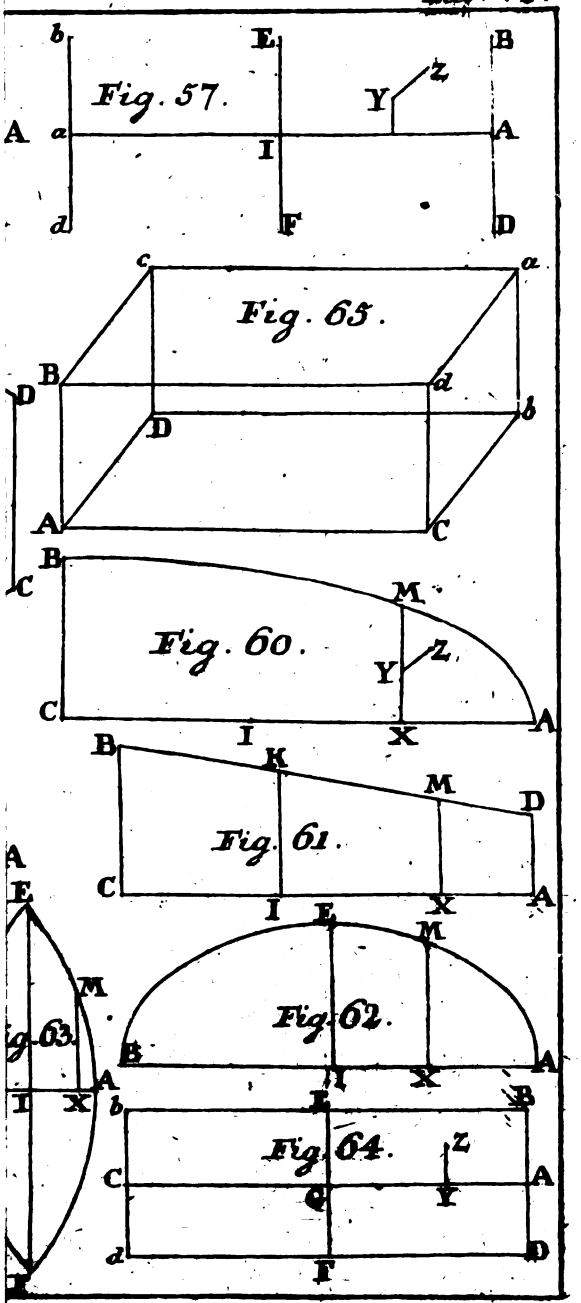


Fig. 54.

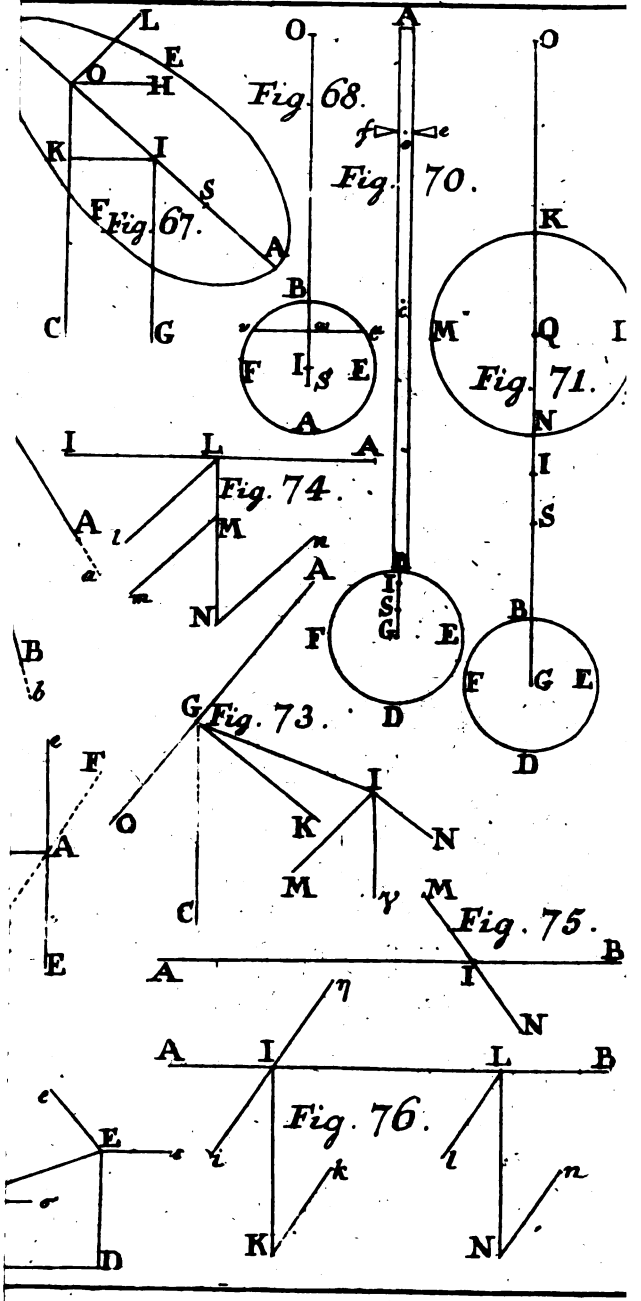
Digitized by Google

Digitized by Google



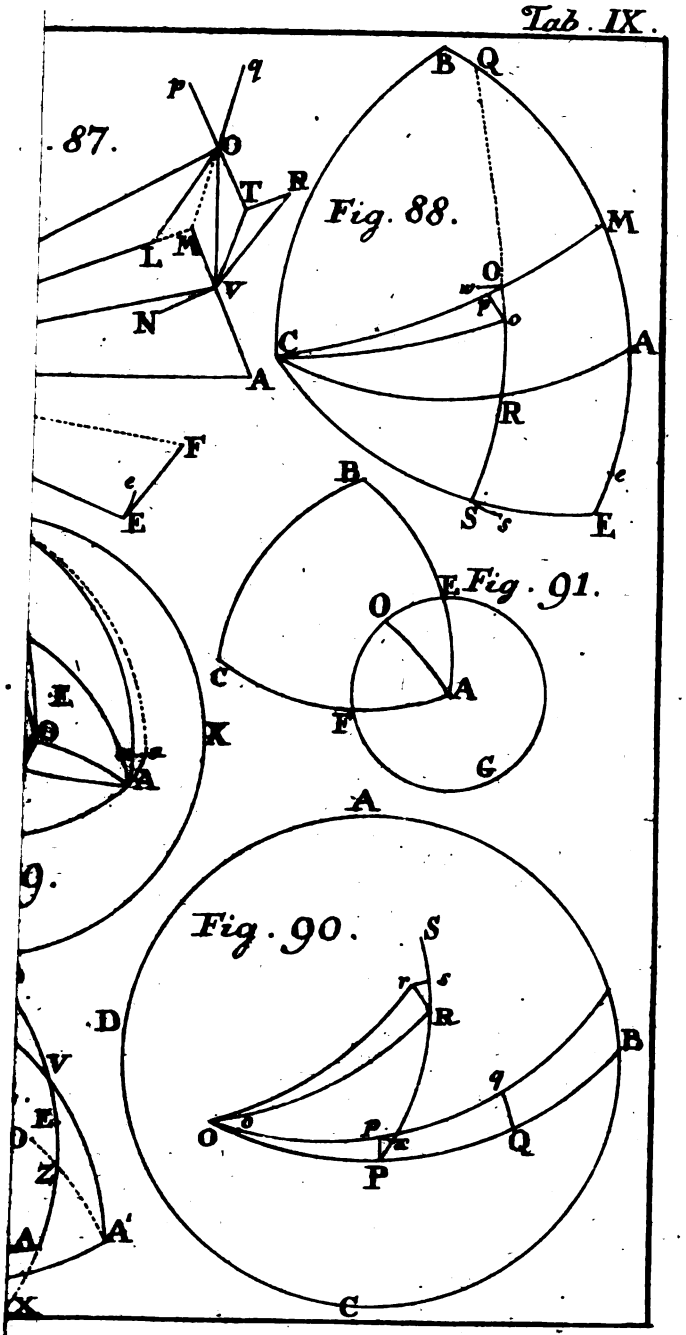
Digitized by Google

Digitized by Google

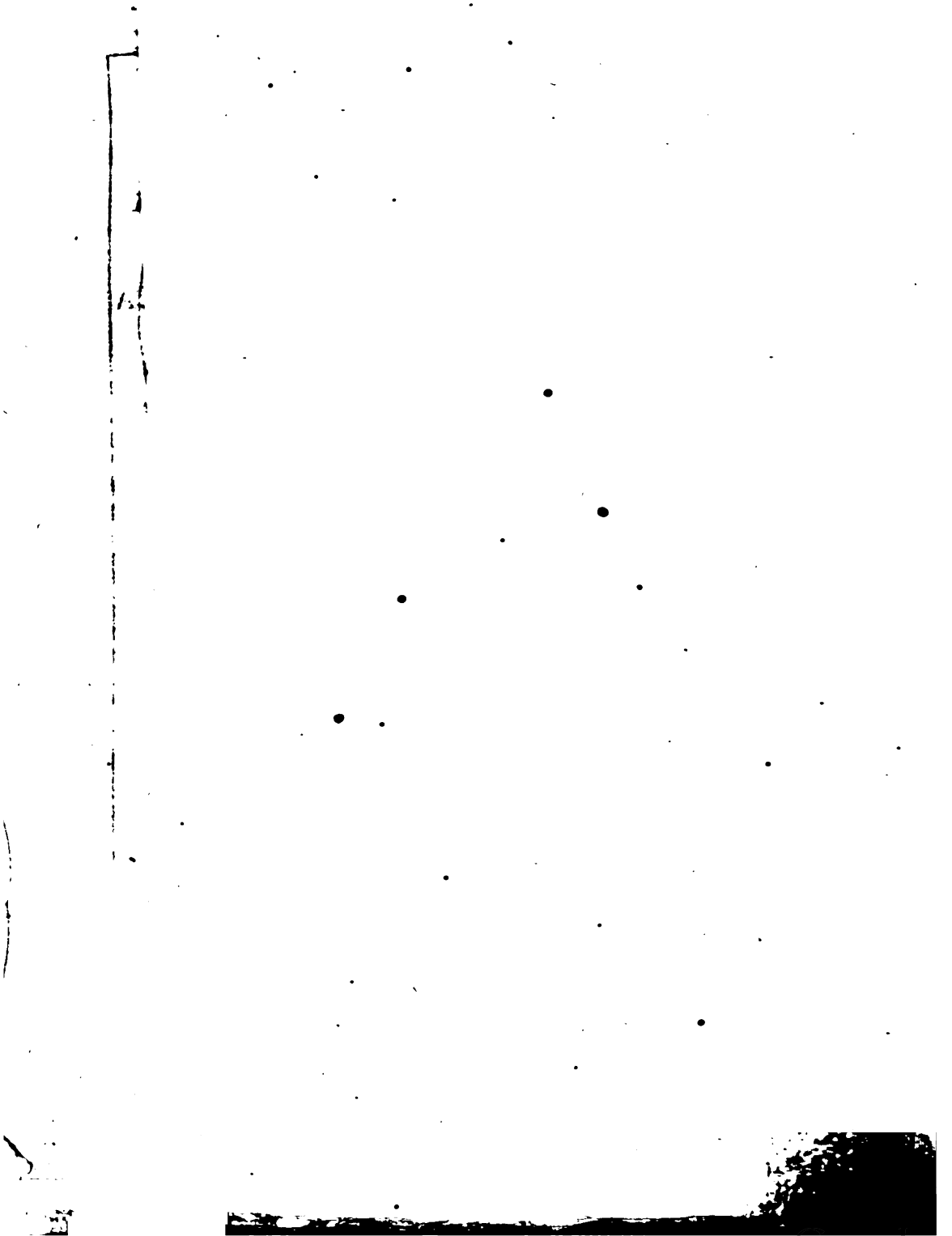


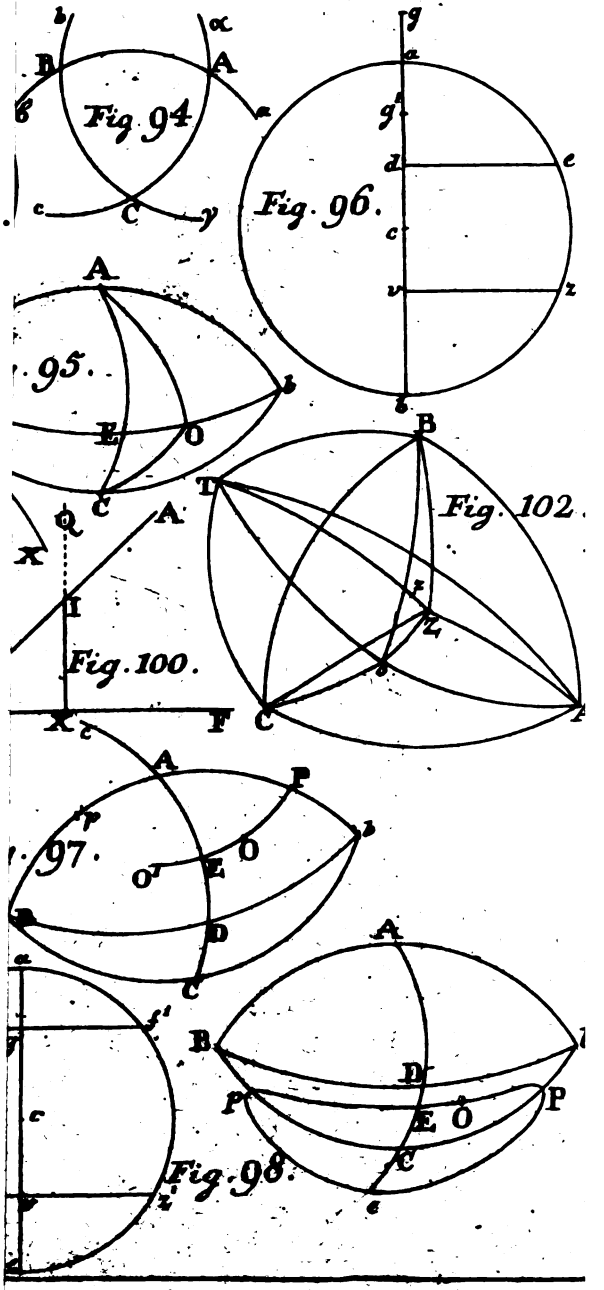
Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

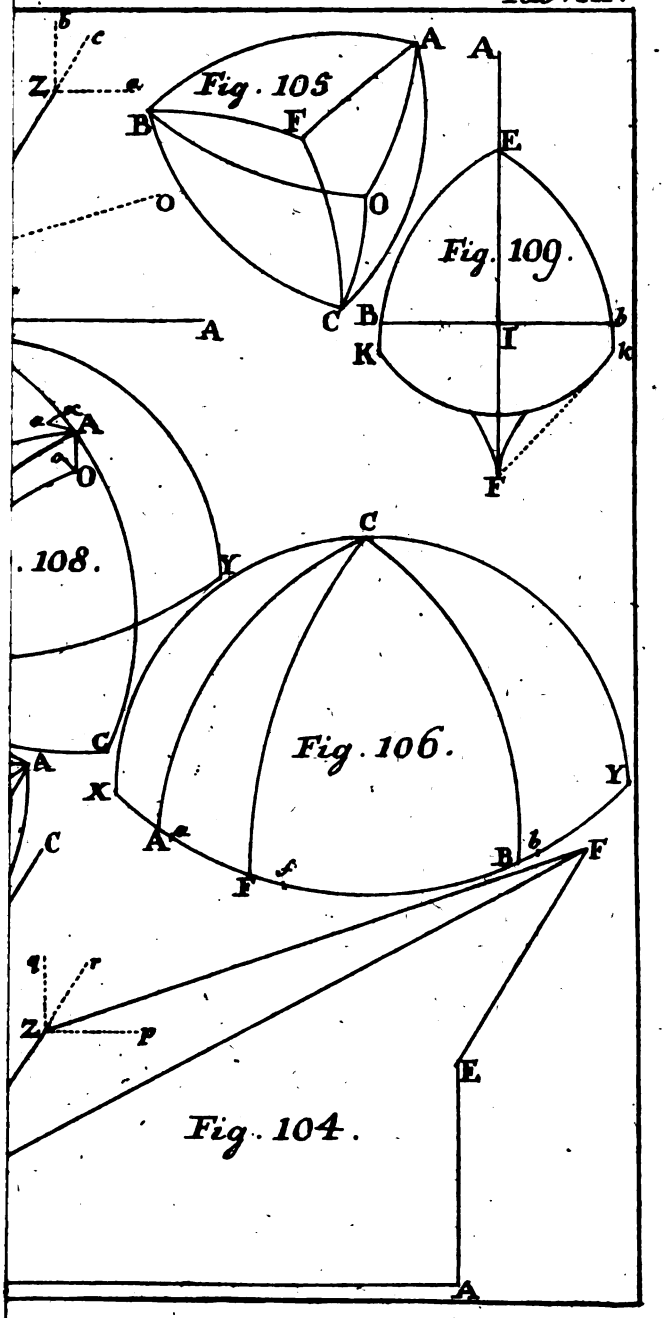

Digitized by Google



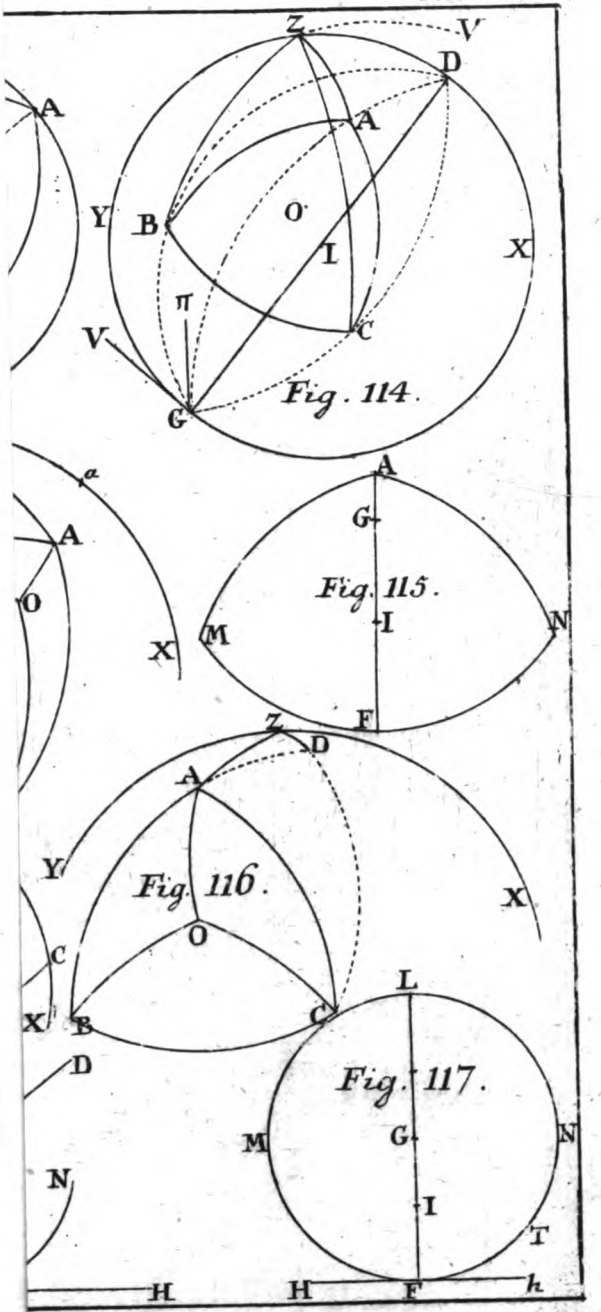
Digitized by Google

Digitized by Google

Tab. XI.



Digitized by Google



Digitized by Google

Fig. 118.

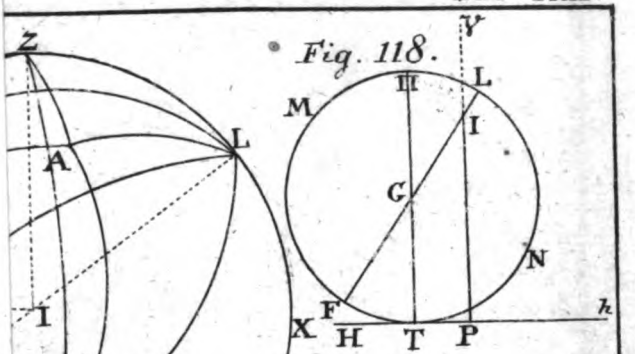


Fig. 119.

Fig. 121.

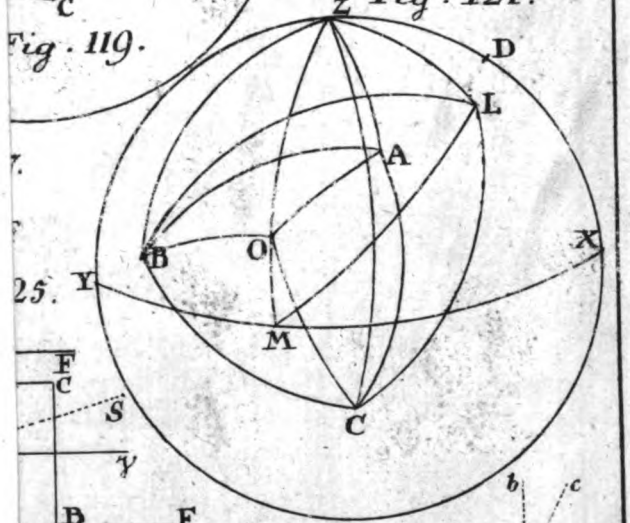
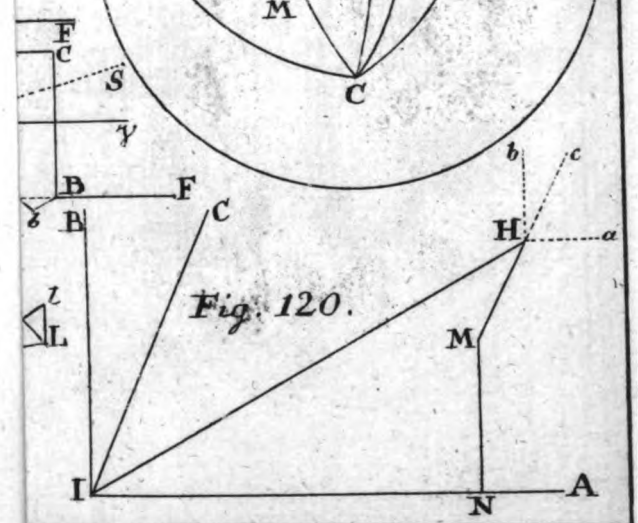


Fig. 120.



123 u. 124. stehen auf Tab XIV.

Digitized by Google

Digitized by Google

Tab. XV.

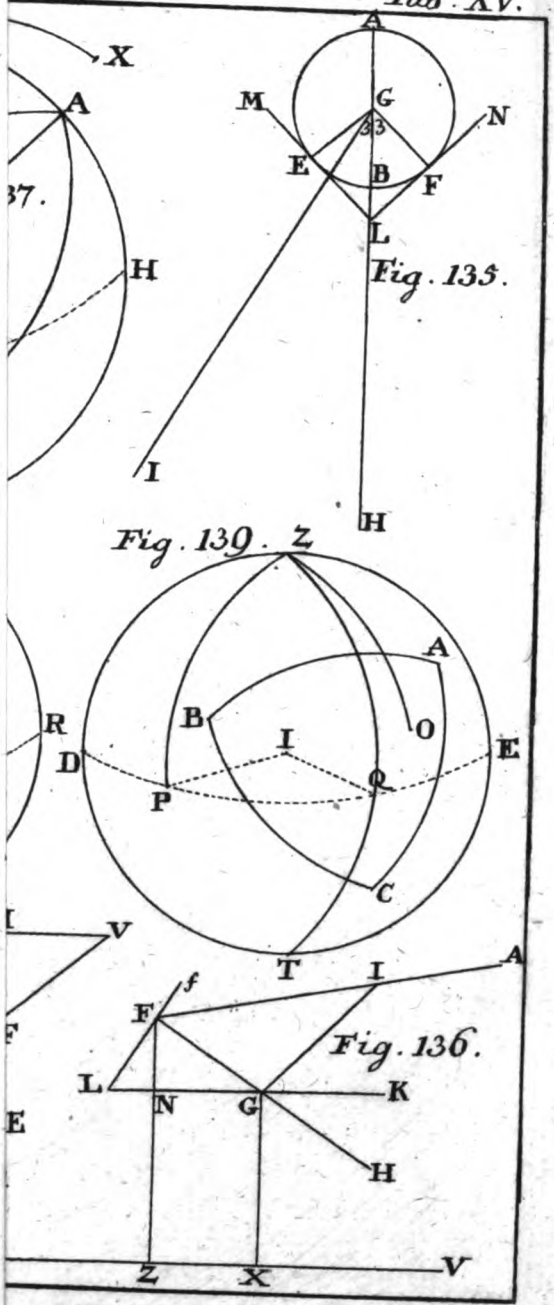


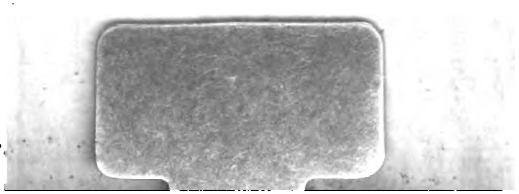
Fig. 135.

Fig. 130.

Fig. 136.

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google